

# Modelowanie geometryczne

## Krzywe parametryczne

Wojciech Kowalewski

fraktal@amu.edu.pl



Wydział Matematyki i Informatyki UAM  
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

*Semestr zimowy 2021/22*

# Wprowadzenie do kursu

“... the sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models.”

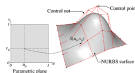
— John von Neumann

- ▶ *Model naukowy* - fizyczna i/lub matematyczna i/lub koncepcyjna *uproszczona reprezentacja* systemu idei, zdarzeń lub procesów, które są *doświadczane w świecie rzeczywistym*.
- ▶ W *procesie modelowania* budowane modele są zwykle wynikiem interpretacji *danych* - utworzony model posiada zwykle własności *predykcyjne*, tzn. zastępuje kolejne pomiary przez przeprowadzenie *symulacji modelu*
- ▶ Przedmiotem *modelowania geometrycznego* jest opis *kształtów* obserwowanych w świecie rzeczywistym obiektów - jego wynikiem jest *model geometryczny*
- ▶ Tak rozumiane modelowanie przynależy do *matematyki stosowanej* jako pola działania, tzn. używa metod matematycznych wspomagających analizę kształtów - należą do nich przede wszystkim różne poddziedziny geometrii:
  - podstawy teoretyczne dają przede wszystkim *topologia* i *geometria różniczkowa*
  - *geometria obliczeniowa* umożliwia przekształcenie modeli teoretycznych do postaci obliczeniowej - wynikiem są tu zwykle konkretne algorytmy, niemniej dla ich skonstruowania geometria obliczeniowa definiuje wiele nowych pojęć

- ▶ *Modele* utworzone w procesie modelowania geometrycznego wymagają zwykle zastosowania komputerów w fazie *symulacji* - z tego punktu widzenia modelowanie geometryczne jest częścią (nieobowiązkową) systemów *Komputerowego Wspomagania Produkcji* (**CAM - Computer Aided Manufacturing**)
- ▶ Systemy *Komputerowego Wspomagania Projektowania* (**CAD - Computer Aided Design**) są (z historycznych raczej powodów) ograniczone do geometrycznego rozumienia *projektowania* - zwykle zakresem ich produkcji jest wytwarzanie *komputerowych modeli geometrii* 2D i 3D. W tym przypadku modelowanie geometryczne jest bezpośrednim narzędziem dla CAD
  - Tak rozumiane CAD naturalnie koncepcyjnie lokuje się w sferze animacji komputerowej, generowania komputerowych efektów filmowych oraz projektowaniu przemysłowym
  - Narzędzia CAD obligatoryjnie posiadają podsystemy *wizualizacji geometrii 2D i 3D*, a także dobrze wystandaryzowany zbiór *formatów zapisu geometrii* w plikach.
- ▶ Modele CAD (więc również modelowanie geometryczne) są obiektami źródłowymi dla systemów *Komputerowego Wspomagania Prac Inżynierskich* - (**CAE - Computer Aided Engineering**)
  - W szczególności lokują się tu *metody elementu skończonego* (finite element analysis (FEA)), *obliczeniowa dynamika płynów* (computational fluid dynamics (CFD)), *dynamika układów wielu ciał* multibody (dynamics (MBD)), a także wiele zagadnień teorii optymalizacji.
  - Wszystkie te metody są również obligatoryjne w efektach ze świata rozrywki (film, gry komputerowe).

## ► Uwaga ideowa:

- W tym kursie będziemy się zajmowali budową modeli geometrycznych dla obiektów *świata makroskopowego*, tzn. świata, w którym rządzą prawa fizyki *ośrodków ciągłych*. Ciągłość materii rozumiemy tu jako pominięcie jej budowy cząsteczkowej.
- W przypadku płynów (ciecze i gazy), wskaźnikiem, na ile takie przybliżenie jest możliwe jest tzw. *liczba Knudsen*  $Kn$ . Ośrodki dla których liczba Knudsen jest mniejsza od 0.01 mogą być traktowane jako złożone z materii ciągłej.
- Ponadto praktyczny aspekt tego kursu implikuje ograniczenie się do świata trójwymiarowego, natomiast aspekt skończoności czasu implikuje ograniczenie do modelowania powierzchni.



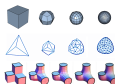
## ► Modelowanie parametryczne

- Opis wykorzystujący *funkcje parametryczne* znane z kursów matematyki oraz zbiory tzw. *punktów kontrolnych* - jest to zatem opis *ciągły*
- Współrzędne obiektów wymiaru topologicznego  $n \geq 1$  są definiowane w przestrzeni wymiaru  $m \geq n$  przez zbiór  $n$  parameterów  $x_i = x_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $u \in [u_1, u_2]$  (*image*)
- Przykładowo, krzywe ( $n = 1$ ) w dowolnej przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  są określone przez zależności  $x_i = x_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gdzie  $u$  jest parametrem, np. okrąg jednostkowy w centrum płaszczyzny ma opis:  $x = x_1(u) = \cos(u)$ ,  $y = x_2(u) = \sin(u)$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ .



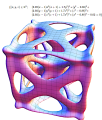
## ► Modelowanie siatkowe

- Reprezentacja powierzchni przez skończony zbiór *wierzchołków*, będących próbkami współrzędnych pobranych z powierzchni oryginalnego obiektu, wzbogacony (często, ale nie zawsze) o pewne informacje dotyczące wzajemnych relacji tych wierzchołków.
- Wierzchołki dają aproksymację powierzchni oryginalnego obiektu przez wygenerowanie z nich *powierzchni wielokątowej* - zwykle stosujemy tu algorytmy *triangulacji* (*image*)
- Rekonstrukcja powierzchni ze zbioru próbek wierzchołkowych nie jest oczywista, np. w przypadku chmury punktów ze skanera 3D



## ► Modelowanie subdivision

- W tym przypadku chodzi o połączenie precyzji modelowania parametrycznego (funkcje ciągłe odpowiednio wysoko różniczkowalne) z prostotą i szybkością renderingu na powierzchniach reprezentowanych przez pewne triangulacje
- Dodatkowo z definicji tej reprezentacji otrzymujemy tutaj reprezentację hierarchiczną o wzrastającej dokładności i zbieżną do pewnej reprezentacji parametrycznej (*image*)
- Ponadto umożliwiają one (w odróżnieniu od reprezentacji parametrycznej) reprezentowanie obiektów o skomplikowanej topologii i w miarę łatwą ich animację



## ► Modelowanie niejawne

- Reprezentacja definiowana przez ogólne równanie postaci  $f(x, y, z) = 0$ , czyli przez pewną izopowierzchnię
- Efektywnie sprowadzamy ją do postaci wygodnej dla renderingu, np. do siatki wielokątowej, używając algorytmu *marching cubes*
- Reprezentacja wygodna dla skomplikowanych topologicznie obiektów (image)



## ► Modelowanie proceduralne

- Pojęcie modelowania proceduralnego nie jest ściśle określone, ale zwykle wiąże się je z funkcyjnymi generatorami obiektów o złożonej geometrii - często przyrodniczych
- Teoretycznie istotne są tu co najmniej trzy grupy generatorów: *języki generatywne* (zwykle znacznikowe, np. GML), *zbiory fraktalne* (m.in. rzeźba terenu, chmury) oraz związane z nimi *L-systemy* (rośliny) (image)
- Ponadto można tu rozpatrywać różne generatory oparte o *dane*, np. tekstury

# Krzywe parametryczne



# Parametryczne krzywe trzeciego stopnia

- ▶ Rozpatrzmy wielomian trzeciego stopnia reprezentuj/acy sko/nczony segment krzywej. Jego parametryczna forma ma postać

$$\begin{cases} x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad (1)$$

- ▶ Macierzowo równanie (1) przybiera postać

$$Q(t) = C \cdot T, \quad (2)$$

gdzie

$$C = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Zatem pochodna

$$\frac{d}{dt} Q(t) = C \cdot \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Rodzaje ciągłości krzywych parametrycznych

- ▶ Jeśli połączymy z sobą dwa segmenty  $Q_1(t)$ ,  $Q_2(t)$  krzywej, to gdy:
  - (a)  $Q_1(1) = Q_2(0)$  to krzywa ma *ciągłość geometryczną*  $G^0$
  - (b)  $\frac{d}{dt} Q_1^+(1) = a \frac{d}{dt} Q_2^-(0)$ ,  $a \in R+$ , to krzywa ma *ciągłość geometryczną*  $G^1$
  - (c)  $\frac{d^n}{dt^n} Q_1^+(1) = \frac{d^n}{dt^n} Q_2^-(0)$  to krzywa ma *ciągłość parametryczną*  $C^n$
- ▶ Ciągłość  $G^0$  oznacza po prostu zwykłą ciągłość funkcji w punkcie.
- ▶ Pierwsza pochodna  $Q'(t)$  wyraża prędkość punktu krzywej względem parametru  $t$ . Zatem ciągłość geometryczna  $G^1$  oznacza jedynie, że prędkość przy przejściu przez punkt połączenia nie zmieni kierunku, natomiast może zmienić wartość.
- ▶ Implikuje to, że używanie takiej krzywej jako ścieżki kamery w animacji spowoduje wyraźny skok szybkości przesuwania się kadrów, co oczywiście jest zwykle niepożądane.
- ▶ Podobnie negatywny efekt w animacji daje ciągłość parametryczna  $C^1$ , gdyż w przypadku, gdy drugie pochodne segmentów w punkcie połączenia są różne to punkt na krzywej (kamera) zmienia skokowo przyspieszenie.
- ▶ Dopiero ciągłość parametryczna  $C^2$  usuwa ten problem.
- ▶ Możemy zatem powiedzieć, że krzywą  $Q(t)$  charakteryzują:
  - (1) punkty początkowe i końcowe kolejnych segmentów
  - (2) rodzaj ciągłości w punkcie łączenia segmentów

# Macierz bazowa i macierz geometrii

- ▶ Dla jednoznacznego określenia krzywej trzeciego stopnia potrzebujemy czterech współczynników dla każdej z trzech zmiennych w każdym segmencie.
- ▶ Dla jasnego zarysowania sytuacji macierz  $C$ , której wymiar wynosi  $3 \times 4$ , rozbijemy na iloczyn dwóch macierzy  $G \cdot M$ .
- ▶ Pierwszą z nich określamy *macierzą geometrii*, drugą *macierzą bazową*, przy czym  $G \in \mathcal{M}_{3 \times 4}$ ,  $M \in \mathcal{M}_{4 \times 4}$ . Daje to następujące rozwinięcie

$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{1x} & G_{2x} & G_{3x} & G_{4x} \\ G_{1y} & G_{2y} & G_{3y} & G_{4y} \\ G_{1z} & G_{2z} & G_{3z} & G_{4z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Oznaczmy teraz przez  $G_i = [G_{ix} \ G_{iy} \ G_{iz}]^T$ ,  $i=1,2,3,4$ ,  
 $G_x = [G_{1x} \ G_{2x} \ G_{3x} \ G_{4x}]$  (analogicznie określamy  $G_y$  i  $G_z$ ).
- ▶ Wtedy jeśli przez  $B$  oznaczymy iloczyn  $M \cdot T$ , to otrzymujemy

$$Q(t) = \begin{cases} x(t) & = & G_x \cdot B \\ y(t) & = & G_y \cdot B \\ z(t) & = & G_z \cdot B \end{cases} \quad (3)$$

# Funkcje bazowe Hermite'a trzeciego stopnia

- ▶ Macierz geometrii  $G_H$  dla tej krzywej zawiera informacje o punktach początkowym i końcowym danego segmentu oraz o wektorach stycznych w tych punktach

$$G_H = [P_p \ P_k \ T_p \ T_k], \quad (4)$$

gdzie  $P_p, P_k$  oznaczają odpowiednio punkt początkowy i końcowy segmentu, a  $T_p, T_k$  oznaczają styczne w tych punktach.

- ▶ Wtedy

$$x(t) = G_H^x \cdot M_H \cdot T = \begin{bmatrix} P_p^x & P_k^x & T_p^x & T_k^x \end{bmatrix} \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Stąd oczywiście

$$x(0) = P_p^x = G_H^x \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x(1) = P_k^x = G_H^x \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x'(0) = T_p^x = G_H^x \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x'(1) = T_k^x = G_H^x \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Funkcje bazowe Hermite'a trzeciego stopnia

- ▶ W sumie daje to postać

$$G_H^x = G_H^x \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

co musi implikować

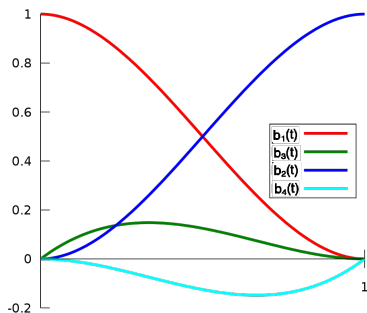
$$M_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

- ▶ Otrzymaliśmy zatem cztery funkcje bazowe krzywej Hermite'a

$$\begin{cases} b_1(t) = [2 \ -3 \ 0 \ 1] \cdot [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T \\ b_2(t) = [-2 \ 3 \ 0 \ 0] \cdot [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T \\ b_3(t) = [1 \ -2 \ 1 \ 0] \cdot [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T \\ b_4(t) = [1 \ -2 \ 1 \ 0] \cdot [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T \end{cases} \quad (7)$$

# Funkcje bazowe Hermite'a trzeciego stopnia

- ▶ Wykresy tych funkcji są przedstawione na Rys. 1

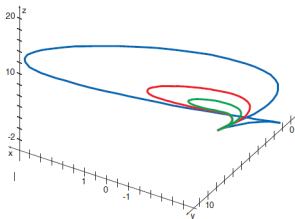


Rys. 1. Funkcje bazowe Hermite'a stopnia trzeciego.

- ▶ Wyraźnie widać, że w punkcie początkowym jedynie  $b_1(t)$  jest niezerowe, a w punkcie końcowym tylko  $b_2(t)$  posiada tę własność.
- ▶ Podobnie jest dla pochodnych funkcji bazowych. Dla  $t = 0$  tylko  $b_3'(t) \neq 0$ , dla  $t = 1$  tylko  $b_4'(t) \neq 0$ .

# Skalowanie wektorów stycznych

- ▶ Każdy punkt krzywej  $Q(t)$  jest wektorem w przestrzeni  $R^3$ . Rozpatrzmy ten wektor nie jako punkt, ale jako kierunek wraz z przypisaną mu długością.
- ▶ Jeśli przez  $u_x(t)$ ,  $u_y(t)$ ,  $u_z(t)$  oznaczymy odpowiednie kosinusy kierunkowe wektora  $Q'(t)$ , tzn.  $u_x(t) = \frac{Q'_x(t)}{|Q'(t)|}$ ,  $u_y(t) = \frac{Q'_y(t)}{|Q'(t)|}$ ,  $u_z(t) = \frac{Q'_z(t)}{|Q'(t)|}$ , to  $Q'(t) = |Q'(t)|u(t)$ , gdzie  $u(t) = [u_x(t) \ u_y(t) \ u_z(t)]$  (oczywiście  $|u(t)| = 1$ ).
- ▶ Wtedy macierz geometrii  $G_H$  można zapisać jako  $[Q(0) \ Q(1) \ |Q'(0)|u(0) \ |Q'(1)|u(1)]$ .
- ▶ Wynika z tego, że dla ustalonego układu  $\{Q(0), Q(1), u(0), u(1)\}$  istnieje nieprzeliczalnie wiele różnych kształtów krzywej Hermite'a, takich samych punktach końcowych i takich samych nachyleniach w tych punktach (Rys. 2).



Rys. 2. Wszystkie krzywe mają jednakowe parametry z wyjątkiem długości wektorów stycznych

# Reparametryzacja krzywych Hermite'a

- ▶ Generalną zasadą dla krzywych Hermite'a jest, że przy ustalonych punktach końcowych i ustalonych nachyleniach w tych punktach, jeśli długości wektorów stycznych są małe w stosunku do odległości punktów  $Q(0)$ ,  $Q(1)$  to kształt krzywej jest łagodnym łukiem, jeśli jednak stosunek ten przekroczy pewną liczbę całkowitą to w krzywej zaczynają pojawiać się pętle
- ▶ Nietrudno też pokazać, że przy tych samych warunkach każdy punkt pośredni segmentu, tzn.  $Q(t_i)$ , gdzie  $t_i \in (0, 1)$  leży na płaszczyźnie równoległej do obu stycznych i przechodzącej przez punkt  $t_i(Q(0) + Q(1))$ .
- ▶ Rozważmy teraz sytuację kiedy macierz geometrii  $G_H = [Q(0) \ Q(1) \ Q'(0) \ Q'(1)]$  zastąpimy macierzą  $\overline{G}_H = [Q(1) \ Q(0) \ -Q'(1) \ -Q'(0)]$ , tzn. segmenty posiadają te same nachylenia stycznych w tych punktach, z odwrotnym zwrotem.
- ▶ Oznacza to, że jeśli  $t$  i  $v$  określają parametryzację tych krzywych to  $v = 1 - t$  oraz że kształty obu tych krzywych są identyczne. Jest to najprostszy przykład operacji *reparametryzacji krzywych*.
- ▶ Reparametryzacja ta posiada własność niezmienniczości kształtu, tzn. kształt krzywej jest jej niezmiennikiem. Zachowanie kształtu w tym przypadku wynika po prostu z faktu, iż  $b_1(1 - t) = b_2(t)$  oraz  $b_3(1 - t) = -b_4(t)$ .



# Reparametryzacja krzywych Hermite'a

- ▶ W ogólnym przypadku reparametryzacja polega na zastąpieniu parametru  $t \in [t_1, t_2]$ , parametrem  $v \in [v_1, v_2]$ , tzn. przyporządkowaniu punktowi reprezentowanemu przez parametr  $t = \alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2$ , ( $\alpha \in [0, 1]$ ) punktu określonego przez parametr  $v = \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2$ .
- ▶ Niech  $v = f(t)$ . Dla zachowania stopnia wielomianu krzywej i kierunków wektorów stycznych potrzeba, aby  $f$  była liniowa, tzn.  $v = f(t) = at + b$ . Wtedy  $\frac{dv}{dt} = a$ .
- ▶ Żądanie aby parametry  $t_1, t_2$  i  $v_1, v_2$  odpowiadały sobie wzajemnie implikuje, że  $v_1 = at_1 + b$ ,  $v_2 = at_2 + b$ . Stąd  $\frac{v_1 - v_2}{t_1 - t_2} = a$ .
- ▶ Przyjmijmy, że krzywa reprezentowana przez parametr  $t$  to  $Q(t)$ , a reprezentowana przez parametr  $v$  to  $R(v)$ .
- ▶ Wtedy  $R'(v) = \frac{1}{a}Q'(t)$  oraz macierze geometrii spełniają następujące warunki

$$\begin{cases} R(v_1) &= Q(t_1) \\ R(v_2) &= Q(t_2) \\ R'(v_1) &= \frac{1}{a}Q'(t_1) \\ R'(v_2) &= \frac{1}{a}Q'(t_2) \end{cases}$$

- ▶ Wynika z tego że długości tych stycznych zmieniają się proporcjonalnie do zmiany parametru.

# Obcinanie krzywych Hermite'a

- ▶ Naturalnym zastosowaniem reparametryzacji jest sytuacja *obcinania krzywej* (np. w punktach przecięcia z inną krzywą przy modelowaniu).
- ▶ Bez zmiany ogólności możemy założyć, że obcinanie krzywej  $Q(t)$  odbywa się wewnątrz segmentu określonego przez parametry  $t = 0$  i  $t = 1$ .
- ▶ Niech  $t_1$  i  $t_2$  oznaczają parametry obcinania.
- ▶ Wtedy potrzebujemy znaleźć nową parametryzację dla pozostawionego kawałka segmentu, tzn. taką aby  $v = 0$  odpowiadało wartości  $t = t_1$ , a  $v = 1$  wartości  $t = t_2$ .
- ▶ Z przeprowadzonych powyżej wyprowadzeń dostajemy, że

$$\begin{cases} R(0) &= Q(t_1) \\ R(1) &= Q(t_2) \\ R'(0) &= Q'(t_1)(t_2 - t_1) \\ R'(1) &= Q'(t_2)(t_2 - t_1) \end{cases}$$

- ▶ Liniowa zależność pomiędzy parametrami przyjmuje w tym przypadku postać  $t = t_1 + v\Delta t$ , gdzie  $\Delta t = t_2 - t_1$ .
- ▶ Wtedy  $n$ -ta potęga parametru  $t$  wyraża się wzorem

$$t^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t_1^k (v\Delta t)^{n-k} \quad (8)$$

# Reparametryzacja krzywych Hermite'a

- ▶ Dla  $n = 3$  odwzorowujemy na siebie wektory  $T = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T$  oraz  $V = [v^3 \ v^2 \ v \ 1]^T$ .
- ▶ Macierz  $S_{V \rightarrow T}$ , która dokonuje tej transformacji spełnia warunek  $T = S_{V \rightarrow T} \cdot V$  i ma wobec równania (8) postać

$$S_{V \rightarrow T} = \begin{bmatrix} \Delta t^3 & 0 & 0 & 0 \\ 3t_1 \Delta t^2 & \Delta t^2 & 0 & 0 \\ 3t_1^2 \Delta t & 2t_1 \Delta t & \Delta t & 0 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Stosowanie reparametryzacji w podziale krzywej na mniejsze kawałki wykonuje się identycznie, stosując powyższe procedury dla każdego kawałka. Jest to szczególnie efektywne przy podziale jednostajnym segmentu na  $2^n$  kawałków o długości  $\frac{1}{2^n}$

## Inne reprezentacje krzywej Hermite'a

- ▶ Zdefiniowanie krzywej Hermite'a nie musi odbywać się bezpośrednio przez wskazanie macierzy  $G_H$ . Można np. pokazać, że wystarczy znajomość dwóch punktów końcowych, nachyleń w tych punktach (tylko kierunków) oraz pewnego punktu, o którym wiemy, że leży wewnątrz krzywej (ale nie znamy jego parametru). Wyprowadzenie macierzy  $G_H$  w tym przypadku pozostawia się czytelnikowi.
- ▶ Inna możliwa realizacja krzywej Hermite'a zakłada znajomość czterech punktów do niej należących wraz z odpowiadającymi im parametrami.
- ▶ Oznaczmy je przez  $P_1, P_2, P_3, P_4$ .
- ▶ Niech  $P$  oznacza macierz  $3 \times 4$  zawierającą ich współrzędne, tzn.

$$P = \begin{bmatrix} P_{1x} & P_{2x} & P_{3x} & P_{4x} \\ P_{1y} & P_{2y} & P_{3y} & P_{4y} \\ P_{1z} & P_{2z} & P_{3z} & P_{4z} \end{bmatrix}$$

- ▶ Wiadomo, że dla  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $P_i = G_H \cdot M_H \cdot T_i$ , gdzie  $T_i = [t_i^3 \ t_i^2 \ t_i \ 1]^T$ .
- ▶ Niech  $T_C = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4]$ . Wtedy  $P = G_H \cdot M_H \cdot T_C$ , co daje  $G_H = M_H^{-1} \cdot T_C^{-1} \cdot P$ .
- ▶ Ustalając zbiór parametrów otrzymujemy rodzinę wszystkich krzywych Hermite'a generowaną przez punkty odpowiadające tym parametrom i stałą macierz  $M_H^{-1} \cdot T_C^{-1}$ .

## Łączenie segmentów krzywych Hermite'a

- ▶ Łączenie segmentów krzywych Hilberta można zrealizować na trzy sposoby, zależnie od pożądanych właściwości w punktach łączenia.
- ▶ Niech  $G_1 = [Q_1(0) \ Q_1(1) \ Q_1'(0) \ Q_1'(1)]$ ,  $G_3 = [Q_3(0) \ Q_3(1) \ Q_3'(0) \ Q_3'(1)]$  oznaczają dwa segmenty krzywych  $Q_1$  i  $Q_3$ , przy czym  $Q_1(1) \neq Q_3(0)$ .
- ▶ Jeśli chcemy je połączyć innym segmentem krzywej Hilberta  $Q_2$  to szukamy macierzy geometrii  $G_2 = [Q_2(0) \ Q_2(1) \ Q_2'(0) \ Q_2'(1)]$  takiej, że
  - (a)  $Q_1(1) = Q_2(0)$ ,  $Q_2(1) = Q_3(0)$  co daje ciągłość geometryczną  $G^0$
  - (b)  $Q_1(1) = Q_2(0)$ ,  $Q_2(1) = Q_3(0)$ ,  $Q_1'(1) = k_1 Q_2'(0)$ ,  $Q_2'(1) = k_2 Q_3'(0)$ , gdzie  $k_1, k_2 \neq 1$  co daje ciągłość geometryczną  $G^1$ .
  - (c)  $Q_1(1) = Q_2(0)$ ,  $Q_2(1) = Q_3(0)$ ,  $Q_1'(1) = Q_2'(0)$ ,  $Q_2'(1) = Q_3'(0)$  co daje ciągłość parametryczną  $C^1$ .
- ▶ Rozwiązaniami dla kolejnych przypadków są macierze  $G_2$  postaci
  - (a)  $G_2 = [Q_1(1) \ Q_3(0) \ A \ B]$ , gdzie  $A, B \in \mathbb{R}$
  - (b)  $G_2 = [Q_1(1) \ Q_3(0) \ k_1 Q_1'(1) \ k_2 Q_3'(0)]$ , gdzie  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$
  - (c)  $G_2 = [Q_1(1) \ Q_3(0) \ Q_1'(1) \ Q_3'(0)]$

- ▶ Krzywe te są efektem kilkuletnich prac P. Beziera, inżyniera w firmie Renault, które miały dać w efekcie krzywe, umożliwiające prostszą i bardziej intuicyjną kontrolę nad nimi, niż to miało miejsce w przypadku krzywych Hermite'a.
- ▶ Jak było widać najbardziej rzucającą się w oczy niedogodnością krzywych Hermite'a była trudna przewidywalność wielkości obszaru, który krzywa obejmuje.
- ▶ Ostateczny kształt krzywe Beziera przyjęły w roku 1970. Jako punkty kontrolne Bezier przyjął wierzchołki  $P_i$  ustalonego wielokąta o  $n + 1$  wierzchołkach, tzw. *wielokąta charakterystycznego*. Wtedy każdy punkt budowanej krzywej wyraża się jako kombinacja liniowa punktów kontrolnych i funkcji bazowych  $f_i(t)$  tzn.

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i f_i(t) \quad t \in [0, 1]$$

- ▶ *Baza*  $(f_i)_0^n$  została określona przez zbiór żądanych własności krzywych, tzn.
  - (1) krzywa  $Q(t)$  interpoluje pierwszy i ostatni punkt  $P_i$ , tzn.  $Q(0) = P_0$ ,  $Q(1) = P_n$
  - (2)  $k$ -ta pochodna w punktach końcowych segmentu jest generowana przez  $k$  pierwszych punktów kontrolnych, licząc od każdego z końców; w szczególności pierwsza pochodna (tzn. styczna w punktach  $P_0$  i  $P_n$ ) jest dana odpowiednio przez kierunki wektorów  $P_1 - P_0$  oraz  $P_n - P_{n-1}$
  - (3) funkcje  $f_i(t)$  są symetryczne względem parametrów  $t$  i  $1 - t$

- ▶ Własności te spełniają układy pierwszych  $n + 1$  wielomianów Bernsteina

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad i = 0 \dots n \quad (9)$$

- ▶ Dla trzech punktów tzn.  $n = 3$  mamy krzywe Beziera trzeciego stopnia, których funkcje bazowe przybierają postać

$$\begin{cases} B_{0,3}(t) = (1-t)^3 \\ B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2 \\ B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t) \\ B_{3,3}(t) = t^3 \end{cases} \quad (10)$$

- ▶ Wtedy

$$\begin{aligned} Q(t) &= [P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3] \cdot [B_{0,3}(t) \ B_{1,3}(t) \ B_{2,3}(t) \ B_{3,3}(t)]^T = \\ &= [P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- ▶ Stąd od razu otrzymujemy obie szukane macierze: *geometrii* i *bazową*:

$$G_B = [P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3] \in \mathcal{M}_{3 \times 4}$$

$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Odpowiadająca punktom  $P_0, P_1, P_2, P_3$  macierz geometrii krzywej Hermite'a ma postać

$$G_B = [P_0 \ P_3 \ k_1(P_1 - P_0) \ k_2(P_3 - P_2)]$$

dla pewnych  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$ . Jakie powinny być te wartości, aby obie macierze geometrii generowały identyczne krzywe?

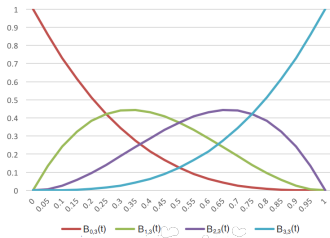
- ▶ Dla krzywej Bezierra  $Q(t)$  mamy  
 $Q'(t) = (-3t^2 + 6t - 3)P_0 + (9t^2 - 12t + 3)P_1 + (-9t^2 + 6t)P_2 + 3t^2P_3$ , co daje  
 $Q'(0) = 3(P_1 - P_0)$  oraz  $Q'(1) = 3(P_3 - P_2)$ , więc  $k_1 = k_2 = 3$ .
- ▶ Macierz konwersji  $M_{B \rightarrow H}$  pomiędzy tymi krzywymi spełnia zależność

$$G_H = M_{B \rightarrow H} \cdot G_B = M_H^{-1} \cdot M_B \cdot G_B$$

- ▶ Z faktu, iż  $\sum_{i=0}^n B_{i,n} = 1$  wynika, że krzywa Bezierra znajduje się wewnątrz powłoki wypukłej swoich punktów kontrolnych.



- ▶ Inną ważną jej własnością jest *niezmienniczość względem przekształceń afinicznych*. Co więcej, każda reparametryzacja afiniczna krzywej Beziera daje również krzywą niezmiennionego kształtu. Wykazanie tego pozostawia się czytelnikowi jako ćwiczenie.
- ▶ Poniższy rysunek przedstawia funkcje bazowe krzywej Beziera trzeciego stopnia.



Rys. 3. Funkcje bazowe Beziera stopnia trzeciego.

- ▶ Widać z niego, że w punktach końcowych jedynie  $B_{0,3}$  oraz odpowiednio  $B_{3,3}$  mają jakiś wpływ na kształt krzywej.  $B_{1,3}$  najsilniej wpływa w punkcie dla parametru  $t = \frac{1}{3}$ , natomiast  $B_{2,3}$  dla parametru  $t = \frac{2}{3}$ .
- ▶ Z własności (3) funkcji bazowych wynika, że zmiana kierunku parametru nie wpływa na kształt krzywej.

## Dodawanie punktów kontrolnych do krzywej Beziera

- ▶ Oczywiście może się zdarzyć, że cztery punkty kontrolne to za mało dla potrzeb konkretnego przypadku. Wtedy musimy dodać kolejne punkty, co oznacza zwiększenie stopnia wielomianu  $Q(t)$ . Chodzi nam oczywiście o takie dodanie punktu, aby nie zmienił się kształt krzywej, co pociąga za sobą także przemieszczenie wszystkich już istniejących punktów kontrolnych.
- ▶ Załóżmy, że dana jest krzywa z  $n + 1$  punktami kontrolnymi i że dodajemy do niej punkt  $n + 2$ -gi, żądając zachowania kształtu. Oznacza to, że wejściowy zbiór punktów kontrolnych  $(P_i)_0^n$  przejdzie w nowy zbiór  $(\bar{P}_i)_0^{n+1}$  tak, że zachodzi

$$\sum_{i=0}^{n+1} \bar{P}_i B_{i,n+1}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)$$

- ▶ Stąd

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \bar{P}_i B_{i,n+1}(t) &= \sum_{i=0}^{n+1} \bar{P}_i \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} = \\ &= \sum_{i=0}^n P_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n P_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} [t + (1-t)] = \\ &= \sum_{i=0}^n P_i \binom{n}{i} [t^i (1-t)^{n+1-i} + t^{i+1} (1-t)^{n-i}] \end{aligned}$$

- ▶ Zatem

$$\bar{P}_i \binom{n+1}{i} = P_i \binom{n}{i} + P_{i-1} \binom{n}{i-1}$$

a po redukcji

$$\bar{P}_i = P_{i-1} \left( \frac{i}{n+1} \right) + P_i \left( 1 - \frac{i}{n+1} \right) \quad i = 0, \dots, n+1$$

Otrzymaliśmy zatem jawne wzory na obliczenie nowego zbioru punktów kontrolnych.

- ▶ Wzór ten można uogólnić na przypadek dodania  $k$  punktów kontrolnych. Mamy wtedy

$$\bar{P}_i = \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} \frac{\binom{k}{i-j}}{\binom{n+k}{i}}$$

## Operacje na krzywej Beziera

- ▶ Przypadek, w którym musimy obcinać segment krzywej  $Q(t)$  w punktach  $t_1$  i  $t_2$  rozpatrujemy analogicznie jak to było z krzywą Hermite'a, tzn. dokonujemy *reparametryzacji* krzywej  $Q(t)$  dla  $t \in (t_1, t_2)$  w krzywą  $R(v)$ ,  $v \in (0, 1)$  tak, że krzywe te pokrywają się.
- ▶ Oznacza to, że wyprowadzona w przypadku Hermite'a macierz  $S_{V \rightarrow T}$  będzie taka sama tzn.  $T = S_{V \rightarrow T} V$ .

- ▶ Mamy wtedy dla  $Q(t) = G_B \cdot M_B \cdot T$  oraz  $R(v) = \overline{G}_B \cdot M_B \cdot V$  zależność

$$Q(v) = G_B \cdot M_B \cdot S_{V \rightarrow T} \cdot V = R(v) = \overline{G}_B \cdot M_B \cdot V$$

- ▶ Stąd od razu otrzymujemy nową macierz geometrii  $\overline{G}_B$ :

$$\overline{G}_B = G_B \cdot M_B \cdot S_{V \rightarrow T} \cdot M_B^{-1}$$

Jako ćwiczenie proponuje się czytelnikowi wyprowadzenie wzorów na macierz geometrii w przypadku podziału segmentu na  $2^n$  równych części względem parametru.

- ▶ Zadanie połączenia dwóch separowalnych kawałków krzywych Beziera, jest także analogiczne do przypadku krzywej Hermite'a. Warto podkreślić, że jeśli żądamy ciągłości  $G^1$  w punktach łączenia to punkt łączenia i dwaj jego sąsiedzi są współpłaszczyznowe, natomiast w przypadku ciągłości  $G^2$  (co oznacza identyczne krzywizny) pięć punktów, z których środkowy jest punktem łączenia należy do jednej płaszczyzny, co czasami może wymagać zwiększenia punktów kontrolnych.

# Reprezentacja De Casteljaou dla krzywych Beziera

- ▶ Niech  $p_0, \dots, p_n$  będą punktami kontrolnymi krzywej Beziera  $n$ -tego stopnia. Definiujemy rekurencyjny ciąg punktów następująco:

$$p_i^r(t) = tp_i^{r-1}(t) + (1-t)p_{i+1}^{r-1}(t), \quad p_i^0(t) = p_i$$

dla  $r = 1, \dots, n$ ,  $i = 0, \dots, n-r$ .

- ▶ Wtedy dostajemy, że  $Q(t) = p_0^n(t)$ . W ten sposób jesteśmy w stanie obliczyć dowolny punkt segmentu krzywej. Pozbywając się rekurencji dostajemy postać z bazami Bernsteina.
- ▶ Dla  $n = 3$  mamy następujące dane: Dla każdego  $r = 1, 2, 3$  dostajemy  $i = 0, \dots, n-r$  co generuje ciąg punktów

$$p_0^0 = p_0, p_1^0 = p_1, p_2^0 = p_0, p_3^0 = p_0,$$

$$p_0^1(t) = tp_0^0(t) + (1-t)p_1^0(t),$$

$$p_1^1(t) = tp_1^0(t) + (1-t)p_2^0(t),$$

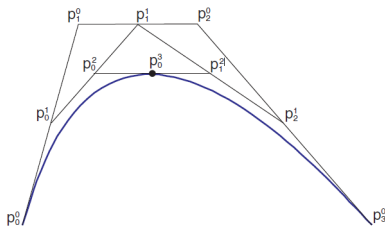
$$p_2^1(t) = tp_2^0(t) + (1-t)p_3^0(t)$$

$$p_0^2(t) = tp_0^1(t) + (1-t)p_1^1(t),$$

$$p_1^2(t) = tp_1^1(t) + (1-t)p_2^1(t),$$

$$p_0^3(t) = tp_0^2(t) + (1-t)p_1^2(t).$$

- ▶ Jeśli ustalimy  $t = 0.5$  to otrzymamy sytuację podobną jak na Rys. 4



Rys.4.

- ▶ Ponadto punkty  $p_0^0, p_0^1, p_0^2, p_0^3$  stanowią punkty kontrolne dla segmentu krzywej  $[0, t]$ , a punkty  $p_0^3, p_1^1, p_2^1, p_3^0$  punkty kontrolne dla segmentu  $[t, 1]$ .
- ▶ Daje nam to naturalną metodę podziału krzywej Beziera na dwie krzywe Beziera.