

Modelowanie geometryczne

Ogólne koncepcje modelowania siatkowego

Wojciech Kowalewski

fraktal@amu.edu.pl



Wydział Matematyki i Informatyki UAM
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Semestr zimowy 2021/22

Wprowadzenie

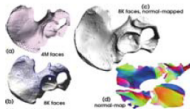
- ▶ Operacje na powierzchniach parametrycznych i niejawnych można podzielić na trzy typowe grupy
 - *Obliczanie atrybutów powierzchni* - punktów, wektorów normalnych, krzywizn itp. Wiąże się to z ustaleniem jakiejś strategii *próbkiowania powierzchni*
 - *Zapytania o własności* - typowe są tutaj pytania o przynależność punktu do powierzchni lub bryły ograniczonej powierzchnią oraz o odległość punktu od powierzchni
 - *Modyfikacje* - mogą być one opisane w języku *geometrii* (rozważmy wówczas różne *deformacje powierzchni*) lub w języku *topologii* (łączenie różnych powierzchni, usuwanie fragmentów powierzchni itp.)
- ▶ Powierzchnie parametryczne

$$p(u, v) = \begin{cases} x & = & x(u, v) \\ y & = & y(u, v) \\ z & = & z(u, v) \end{cases} \quad u, v \in [0, 1] \quad (1)$$

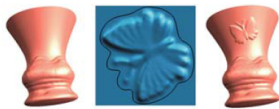
Zastosowanie parametryzacji powierzchni



Texture Mapping



Normal Mapping



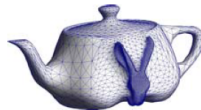
Detail Transfer



Morphing



Mesh Completion



Editing



Databases



Remeshing



Surface Fitting

[źródło: Hormann, Kai & Levy, Bruno & Sheffer, Alla. (2008). *Mesh Parameterization: Theory and Practice*. ACM SIGGRAPH 2007 Papers - International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques.]

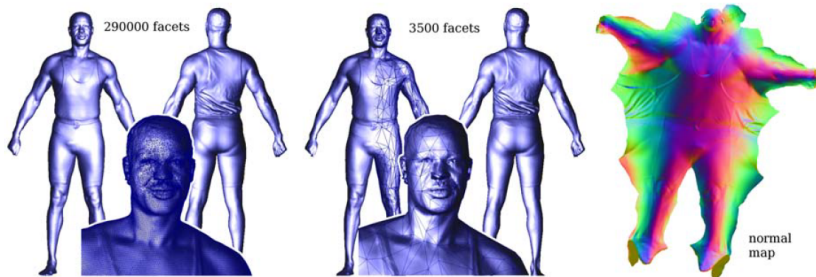


Figure 1.3: Application of parameterization: appearance-preserving simplification. All the details are encoded in a normal map, applied onto a dramatically simplified version of the model (1.5% of the original size).

[źródło: Hormann, Kai & Levy, Bruno & Sheffer, Alla. (2008). *Mesh Parameterization: Theory and Practice*. ACM SIGGRAPH 2007 Papers - International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques.]

- *Pochodne powierzchni* - funkcja parametryczna $p(u, v)$ jest odwzorowaniem określonym na podzbiornie $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ z wartościami w przestrzeni \mathbb{R}^3 , tzn. $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Zatem jej pochodna jest reprezentowana przez jacobian wymiaru 3×2 .

$$p'(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix} \quad (2)$$

- Dla prostoty stosujemy często używany symbol indeksu wskazującego zmienną kierunkową dla pochodnej cząstkowej - przykładowo $x_v(u_0, v_0) := \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)$. Dodatkowo, jeżeli punkt, w którym liczymy pochodne jest ogólny (tzn. (u, v)), możemy pominąć jego specyfikację. Wtedy

$$p'(u, v) = \begin{bmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \\ z_u(u, v) & z_v(u, v) \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \quad (3)$$

- Podobnie dla funkcji składowych: $x'(u, v) = [x_u, x_v]$, $y'(u, v) = [y_u, y_v]$, $z'(u, v) = [z_u, z_v]$.

- ▶ *Przypomnienie twierdzenia o odwracalności funkcji jednej zmiennej*
Niech $f : \mathbb{R} \supset (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1((a, b))$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}$. Jeżeli $f'(x_0) \neq 0$, to wtedy $f'(x) \neq 0$ na pewnym przedziale otwartym $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ i wtedy f jest bijekcją odcinka (a, b) na odcinek $(f(a), f(b))$ (dla $f'(x_0) > 0$; w przypadku gdy $f'(x_0) < 0$, to f bijekcją na odcinek $(f(b), f(a))$).
Innymi słowy, w każdym punkcie $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ istnieje funkcja odwrotna f^{-1} .
- ▶ Zatem jeżeli dla jakiejś funkcji f zachodzi: $f'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in [a, b]$ to funkcja ta jest *odwracalna globalnie* tzn. na całym (domkniętym!) $[a, b]$.
- ▶ *Przypomnienie twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej jednej zmiennej*
Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie odwracalna na $[a, b]$. Jeżeli $f'(x_0) \neq 0$ oraz $g := f^{-1}$
 $y_0 = f(x_0)$, to $g'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$.
- ▶ *Przykład 'patologiczny' odwzorowania wielowymiarowego* Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$. Wtedy dla każdego $x \in \mathbb{R}^2$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{bmatrix} \Rightarrow \det(f'(x)) = e^{2x} \neq 0$$

Ale $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$, z czego wynika, że nie da się takiego odwzorowania globalnie odwrócić (jest szansa że da się je odwrócić niezależnie w jakis otoczeniach punktów (x, y) oraz $(x, y + 2\pi)$).

- ▶ Ten przykład sugeruje, że w przypadku wielu zmiennych będziemy mieli gwarantowaną tylko *lokalną odwracalność* - ona często zupełnie wystarczy do osiągnięcia jakis pożądaných rezultatów.

► *Twierdzenia o funkcji odwrotnej*

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ oraz $x_0 \in \Omega$. Jeżeli $f'(x_0)$ jest odwzorowaniem odwracalnym (tzn. jego macierz jest odwracalna, tzn. $\det(f'(x_0)) \neq 0$), to f jest odwracalne *lokalnie*, tzn. dla pewnego $\delta > 0$ istnieje kula otwarta $B(x_0, \delta)$ oraz zbiór otwarty $V \subset \mathbb{R}^n$ takie, że $f : B(x_0, \delta) \rightarrow V$ jest bijekcją oraz $g := f^{-1} : V \rightarrow B(x_0, \delta)$ jest klasy C^1 na V .

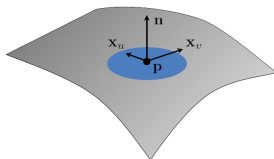
► *Twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej*

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ oraz $x_0 \in \Omega$. Jeżeli f jest odwracalna w punkcie x_0 , $g := f^{-1}$ oraz $y = f(x_0)$, to $g'(y) = (f'(x_0))^{-1}$

Własności metryczne: normalna na powierzchni

- ▶ Zakładając, że $p(u, v)$ jest *regularnym płatem powierzchniowym*, tzn. że w szczególności $p_u(u, v) \times p_v(u, v) \neq 0$ dla każdego $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$, możemy jednoznacznie zdefiniować pojęcie *wektora normalnego* do powierzchni $p(u, v)$ w punkcie (u, v) :

$$n_p(u, v) = \frac{p_u(u, v) \times p_v(u, v)}{\|p_u(u, v) \times p_v(u, v)\|} \quad (4)$$



[źródło: http://www.pmp-book.org/download/slides/Differential_Geometry.pdf]

- ▶ *Normalna do powierzchni płata powierzchniowego jest niezależna od parametryzacji*

Niech $P = \{r \in \mathbb{R}^3 : r = p(u, v)\}$, $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Definiujemy odwzorowanie $n : P \rightarrow S^2$ tak, że

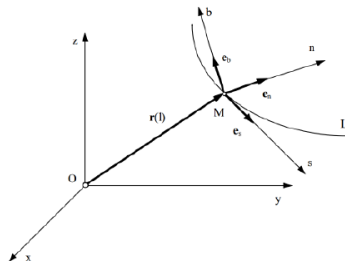
$$n(r) = n_p(p^{-1}(r)),$$

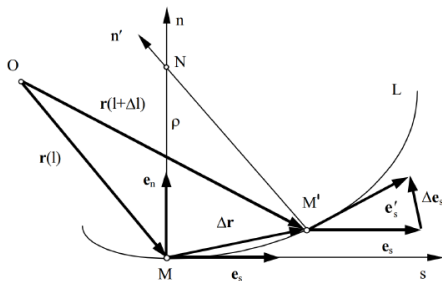
gdzie $r \in P$, a $p(u, v)$ jest dowolną parametryzacją powierzchni P .

- ▶ Rozpatrzmy parametryzację położenia względem toru

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$$

- ▶ Z punktem M należącym do krzywej L wiążemy prostokątny układ współrzędnych składający się z osi \mathbf{e}_s , \mathbf{e}_n , \mathbf{e}_b , oznaczających odpowiednio **styczną**, **normalną** oraz **binormalną** do krzywej (tzw. **układ normalny**)

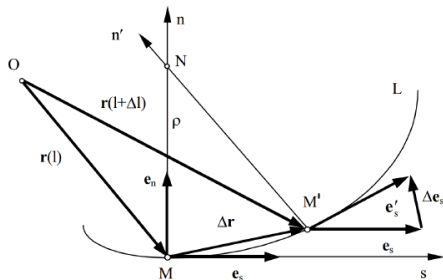




- Przedstawiając krzywą L w płaszczyźnie $\mathbf{e}_s\mathbf{e}_n$ widać, że

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta l} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right| = 1 \Rightarrow \mathbf{e}_s = \frac{d\mathbf{r}}{dl}$$

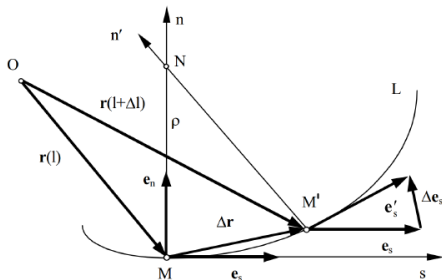
Uzupełnienie: normalna do krzywej



► Ponadto

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{e}_s}{\Delta l} = \frac{d\mathbf{e}_s}{dl} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2}$$

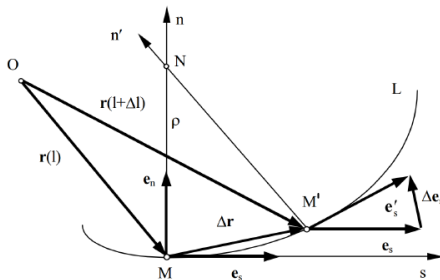
Uzupełnienie: normalna do krzywej



- ▶ Różniczkując względem czasu oczywistą zależność $\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_s = 1$ otrzymujemy

$$0 = \mathbf{e}_s \cdot \frac{d\mathbf{e}_s}{dt} = \mathbf{e}_s \cdot \frac{d\mathbf{e}_s}{dl} \frac{dl}{dt} = \mathbf{e}_s \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} \frac{dl}{dt} \Rightarrow \mathbf{e}_s \perp \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}$$

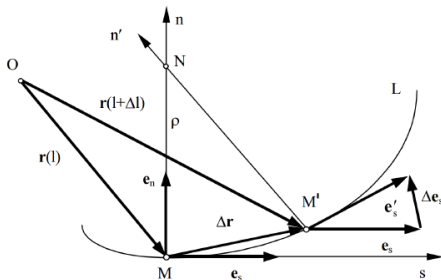
Uzupełnienie: normalna do krzywej



- Dla małych przyrostów Δr trójkąt $e_s \Delta e_s e'_s$ i trójkąt $N M M'$ są podobne. Możemy zatem napisać:

$$\left| \frac{e_s}{MN} \right| = \left| \frac{\Delta e_s}{\Delta r} \right| = \left| \frac{\Delta e_s}{\Delta l} \right|$$

Uzupełnienie: normalna do krzywej



- ▶ Przechodząc do granicy przy $\Delta l \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$\left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2} \right| = \left| \frac{\mathbf{e}_s}{MN} \right| = \frac{1}{MN} = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \mathbf{e}_n = \rho \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2}$$

- ▶ ρ jest promieniem krzywizny krzywej L w punkcie M

Uzupełnienie: długość łuku krzywej i jej krzywizna

► Długość łuku krzywej przy dowolnej parametryzacji

Rozpatrzmy krzywą parametryczną $Q(u) = [x(u), y(u), z(u)]$, $u \in [0, 1]$. Długość jej łuku wyznaczonego przez parametry $u_1, u_2 \in [0, 1]$ określa całka

$$l(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} \|Q'(u)\| du$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest ustaloną normą wektora (zwykle euklidesową)

► Krzywizna krzywej przy parametryzacji przez długość łuku

Krzywiznę definiujemy przez normę drugiej pochodnej (czyli jest ona odwrotnością *promienia* krzywizny)

$$\kappa(u) = \|Q''(u)\|$$

► Z poprzednich slajdów wynika, że

$$Q''(u) = \kappa(u) n(u),$$

gdzie $n(u)$ oznacza wektor normalny do krzywej w punkcie $Q(u)$.

Własności metryczne: pochodna kierunkowa na powierzchni

- ▶ Niech $w = [a, b]^T \in \mathbb{R}^2$ oznacza kierunek w przestrzeni parametru (wektor kolumnowy). Rozważmy prostą parametryczną w przestrzeni parametru (u, v) , sparametryzowaną przez zmienną t : $\ell = \{(u, v) : (u, v) = (u_0, v_0) + tw, t \in \mathbb{R}\}$.
- ▶ Obrazem tej prostej na powierzchni $\rho(u, v)$ jest krzywa $\rho(\ell)$:

$$\rho(\ell) = \begin{cases} x(\ell) \\ y(\ell) \\ z(\ell) \end{cases} \quad (5)$$

- ▶ W szczególności obraz $x(\ell)$ jest określony przez

$$x(\ell) = \{x \in \mathbb{R} : x = \bar{x}(t) := x(u_0 + ta, v_0 + tb), t \in \mathbb{R}\}. \quad (6)$$

- ▶ Analogicznie określamy obrazy $y(\ell)$ oraz $z(\ell)$. Zatem

$$\rho(\ell) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \bar{x}(t), y = \bar{y}(t), z = \bar{z}(t), t \in \mathbb{R}\} \quad (7)$$

- ▶ Jest to krzywa w \mathbb{R}^3 opisana przez funkcję parametryczną

$$C_w(t) := \begin{cases} \bar{x}(t) = x(u_0 + ta, v_0 + tb) \\ \bar{y}(t) = y(u_0 + ta, v_0 + tb) \\ \bar{z}(t) = z(u_0 + ta, v_0 + tb) \end{cases} \quad (8)$$

Indeks w specyfikuje, że jest ona zdefiniowana przez ustalony wektor w .

Własności metryczne: pochodna kierunkowa na powierzchni

- ▶ Styczna do krzywej $C_w(t)$ w ustalonym punkcie $t \in \mathbb{R}$ jest określona przez pochodną

$$C'_w(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}'(t) \\ \bar{y}'(t) \\ \bar{z}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(u_0 + ta, v_0 + tb) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(u_0 + ta, v_0 + tb) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(u_0 + ta, v_0 + tb) \end{bmatrix} \quad (9)$$

- ▶ Zdefiniujmy odwzorowanie $f_w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ takie, że $f_w(t) = [u_0 + ta, v_0 + tb]$
- ▶ Wtedy funkcja $x(u_0 + ta, v_0 + tb)$ jako funkcja zmiennej t jest określona przez formułę $(x \circ f_w)(t) = x(f_w(t))$.
- ▶ Zatem

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t}(u_0 + ta, v_0 + tb) &= (x \circ f_w)'(t) = x'(f_w(t)) \cdot f'_w(t) \\ &= [x_u(u_0 + ta, v_0 + tb), x_v(u_0 + ta, v_0 + tb)] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= ax_u(u_0 + ta, v_0 + tb) + bx_v(u_0 + ta, v_0 + tb) \end{aligned}$$

- ▶ Analogicznie

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t}(u_0 + ta, v_0 + tb) &= ay_u(u_0 + ta, v_0 + tb) + by_v(u_0 + ta, v_0 + tb) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(u_0 + ta, v_0 + tb) &= az_u(u_0 + ta, v_0 + tb) + bz_v(u_0 + ta, v_0 + tb) \end{aligned}$$

- ▶ Zatem

$$C'_w(t) = \begin{bmatrix} ax_u(u_0 + ta, v_0 + tb) + bx_v(u_0 + ta, v_0 + tb) \\ ay_u(u_0 + ta, v_0 + tb) + by_v(u_0 + ta, v_0 + tb) \\ az_u(u_0 + ta, v_0 + tb) + bz_v(u_0 + ta, v_0 + tb) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$= \begin{bmatrix} x_u(u_0 + ta, v_0 + tb) & x_v(u_0 + ta, v_0 + tb) \\ y_u(u_0 + ta, v_0 + tb) & y_v(u_0 + ta, v_0 + tb) \\ z_u(u_0 + ta, v_0 + tb) & z_v(u_0 + ta, v_0 + tb) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$= p'(u_0 + ta, v_0 + tb) \cdot w \quad (12)$$

- ▶ W istocie pokazaliśmy, szczególny przypadek ogólnego faktu z analizy wielowymiarowej, że pochodna kierunkowa w kierunku $w \in \mathbb{R}^n$ odwzorowania $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (tutaj $n = 2$, $m = 3$) jest równa iloczynowi pochodnej p' i kierunku w .
- ▶ Jest tak dlatego, że w tym przypadku taka pochodna kierunkowa jest definiowana jako

$$p'_w(u, v) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p((u, v) + tw)}{t} = C'_w(t) \quad (13)$$

- ▶ **Uwaga:** Pochodne $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ mają naturalną interpretację geometryczną: ponieważ $\frac{\partial x}{\partial t}(u, v) = x'(u, v) \cdot w$, więc jest to rzut prostopadły wektora $x'(u, v)$ na kierunek w (iloczyn skalarny zawiera kosinus kąta pomiędzy wektorami). Zatem $\frac{\partial x}{\partial t}$ określa tę część sumy zmian funkcji $x(u, v)$ w otoczeniu punktu (u, v) , która jest rejestrowana wzdłuż kierunku w .

Własności metryczne: pochodna kierunkowa na powierzchni

- ▶ Z ogólnych zasad różniczkowania wynika, że pochodne cząstkowe odwzorowania $p(u, v)$ są postaci

$$p_u(u, v) = \begin{bmatrix} x_u(u, v) \\ y_u(u, v) \\ z_u(u, v) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$p_v(u, v) = \begin{bmatrix} x_v(u, v) \\ y_v(u, v) \\ z_v(u, v) \end{bmatrix} \quad (15)$$

- ▶ Wtedy możemy zapisać styczną $C'_w(t)$ jako

$$C'_w(t) = a p_u(u, v) + b p_v(u, v) \quad (16)$$

- ▶ Rozpatrzmy obrazy prostych $\ell_u = \{(u, v) : (u, v) = (u_0, v_0) + t[1, 0]\}$ oraz $\ell_v = \{(u, v) : (u, v) = (u_0, v_0) + t[0, 1]\}$ w odwzorowaniu $p(u, v)$ (odpowiednio, proste $v = v_0$ oraz $u = u_0$).
- ▶ Postępując podobnie jak poprzednio, tzn. definiując funkcje $\bar{x}_u(t) := x(u_0 + t, v_0)$, $\bar{y}_u(t) := y(u_0 + t, v_0)$, $\bar{z}_u(t) := z(u_0 + t, v_0)$ (i analogicznie $\bar{x}_v(t)$, $\bar{y}_v(t)$, $\bar{z}_v(t)$) możemy określić te obrazy jako krzywe na powierzchni $p(u, v)$

$$C_u(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_u(t) \\ \bar{y}_u(t) \\ \bar{z}_u(t) \end{bmatrix} = p(u_0 + t, v_0), \quad C_v(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_v(t) \\ \bar{y}_v(t) \\ \bar{z}_v(t) \end{bmatrix} = p(u_0, v_0 + t) \quad (17)$$

Własności metryczne: pochodna kierunkowa na powierzchni

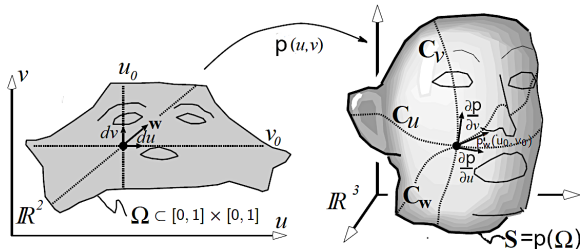
- Styczne do krzywych $C_u(t)$ oraz $C_v(t)$ są określone przez pochodne mają

$$C'_u(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}'_u(t) \\ \bar{y}'_u(t) \\ \bar{z}'_u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u(u_0 + t, v_0) \\ y_u(u_0 + t, v_0) \\ z_u(u_0 + t, v_0) \end{bmatrix} = p_u(u_0 + t, v_0), \quad (18)$$

$$C'_v(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}'_v(t) \\ \bar{y}'_v(t) \\ \bar{z}'_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_v(u_0, v_0 + t) \\ y_v(u_0, v_0 + t) \\ z_v(u_0, v_0 + t) \end{bmatrix} = p_v(u_0, v_0 + t), \quad (19)$$

- Wtedy styczna $C'_w(t)$ wyraża się przez formułę

$$C'_w(t) = a C'_u(t) + b C'_v(t) \quad (20)$$



- ▶ *Macierzą Jacobiego* (ozn. J) dla powierzchni parametrycznej $p(u, v)$ nazywamy macierz jej pierwszej pochodnej, tzn.

$$J = p'(u, v)$$

- ▶ Z poprzednich slajdów wynika, że macierz J transformuje wektor w należący do przestrzeni parametrów (u, v) , na wektor należący do płaszczyzny stycznej do powierzchni w punkcie $p(u, v)$ - równanie (12)
- ▶ *Pierwszą formą podstawową powierzchni* $p(u, v)$ nazywamy macierz

$$I := J^T J = \begin{bmatrix} p_u^T p_u & p_u^T p_v \\ p_u^T p_v & p_v^T p_v \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

- ▶ Forma podstawowa odpowiada za obliczenie większości użytecznych charakterystyk związanych z powierzchnią

Zastosowanie formy podstawowej powierzchni

► Kąt pomiędzy wektorami stycznymi do powierzchni

Jeżeli w_1, w_2 są dwoma wektorami w przestrzeni parametrów (u, v) , to iloczyn skalarny $w_1^T w_2$ jest miarą kosinusa kąta pomiędzy tymi wektorami. Niech $\bar{w}_1 = Jw_1, \bar{w}_2 = Jw_2$ (wektory styczne do powierzchni). Wtedy

$$\bar{w}_1^T \bar{w}_2 = (J\bar{w}_1)^T (J\bar{w}_2) = w_1^T I w_2$$

W szczególności kwadrat długości wektora w stycznego do powierzchni wynosi $\|Jw\|^2 = w^T I w$.

► Długość krzywej na powierzchni

Niech $q(t) = [u(t), v(t)]^T$ będzie krzywą w przestrzeni parametrów (u, v) . Jej obraz na powierzchni $p(u, v)$ jest określony przez $C(t) := p(q(t))$. Styczną do tej krzywej obliczamy stosując reguły różniczkowania odwzorowania złożonego

$$C'(t) = p'(q(t)) \cdot q'(t) = [p_u \ p_v]^T [u_t \ v_t] = p_u u_t + p_v v_t$$

Wtedy długość łuku krzywej $C(t)$ jest określona przez całkę

$$l(t_1, t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[u_t \ v_t] I [u_t \ v_t]^T} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu_t^2 + 2Fu_t v_t + Gv_t^2} dt$$

► *Pole powierzchni regularnego płata powierzchniowego*

Jeżeli $p(u, v)$ jest regularnym płatem powierzchniowym zdefiniowanym na obszarze regularnym Ω , to pole powierzchni tego płata jest określone przez całkę

$$\int \int_{\Omega} \sqrt{\det(I)} du dv = \int \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

► Dekompozycja macierzy wg wartości własnych

Jeżeli A jest macierzą rzeczywistą wymiaru $n \times n$, to zachodzi

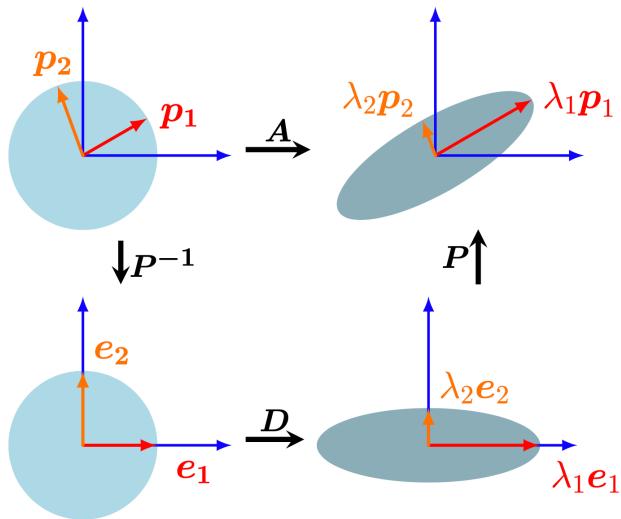
Theorem

Istnieje dekompozycja macierzy A postaci $A = PDP^{-1}$, gdzie D jest macierzą diagonalną zawierającą wartości własne macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy wektory własne macierzy A będące kolumnami macierzy P tworzą bazę przestrzeni \mathbb{R}^n .

► Interpretacja geometryczna

- Macierz P^{-1} odpowiada za zmianę bazy układu z bazą określoną przez wektory własne na układ z bazą standardową - jest macierzą obrotu
- Macierz D odpowiada za niejednorodne skalowanie wg wartości własnych - jest to miara pełnej deformacji obiektu przez macierz A
- Macierz P przywraca oryginalny układ bazowy

Przypomnienie: zagadnienie własne



[Źródło: https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spring20/cos302/files/COS_0_Precept_4.pdf]

Interpretacja geometryczna rozkładu SVD

- Szereg Taylora funkcji wielu zmiennych

Niech $\mathbf{r} = (u, v)$. Rozwinięcie przekształcenie p w otoczeniu punktu $\bar{\mathbf{r}} = p(\mathbf{r})$ w szereg Taylora, z obcięciem do pierwszej pochodnej ma postać

$$p(u + \Delta u, v + \Delta v) \approx p(u, v) + J(\mathbf{r}) \cdot [\Delta u \ \Delta v]^T =: \tilde{f}(u + \Delta u, v + \Delta v),$$

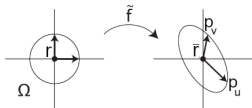
gdzie $J(\mathbf{r}) = p'(\mathbf{r})$.

- Obliczamy rozkład SVD macierzy $J(\mathbf{r})$

$$J(\mathbf{r}) = U\Sigma V^T = [U_1 \ U_2 \ U_3] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [V_1 \ V_2]^T$$

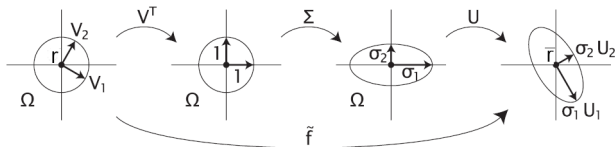
gdzie σ_1, σ_2 są *wartościami szczególnymi* macierzy $J(\mathbf{r})$, wektory U_1, U_2 oraz U_3 są kolumnami ortogonalnej macierzy U wymiaru 3×3 , natomiast wektory V_1 i V_2 są kolumnami ortogonalnej macierzy V wymiaru 2×2

- Rozpatrujemy działanie przekształcenia \tilde{f} w otoczeniu punktu $\bar{\mathbf{r}}$, demonstrując je jako deformację otoczenia kołowego



Interpretacja geometryczna rozkładu SVD

- ▶ Najpierw macierz V^T obraca wszystkie punkty dookoła punktu r tak, że wektory V_1 oraz V_2 pokrywają się z osiami, odpowiednio, u oraz v
- ▶ Następnie macierz Σ deformuje obiekt, skalując go niejednorodnie wzdłuż osi u (skala σ_1) oraz v (skala σ_2)
- ▶ Na końcu macierz U odwzorowuje wektory $[1, 0]$ i $[0, 1]$ na wektory, odpowiednio U_1 oraz U_2 w płaszczyźnie stycznej w punkcie \bar{r} .
- ▶ W rezultacie koło o promieniu R i środku w punkcie r jest przekształcane na elipsę o osiach długości $R\sigma_1$ i $R\sigma_2$ i środku w punkcie \bar{r} .
- ▶ Ponadto ortonormalny układ $[V_1, V_2]$ jest przekształcany na ortonormalny układ $[\sigma_1 U_1, \sigma_2 U_2]$



[źródło: Hormann, Kai & Levy, Bruno & Sheffer, Alla. (2008). Mesh Parameterization: Theory and Practice. ACM SIGGRAPH 2007 Papers - International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques.]

Zagadnienie własne dla pierwszej formy podstawowej

- ▶ Dekompozycja SVD jest dość skomplikowana obliczeniowo, więc częściej stosuje się zamiast niej dekompozycję wg wartości własnych macierzy pierwszej formy podstawowej.
- ▶ Niech λ_1 oraz λ_2 oznaczają odpowiednio pierwszą i drugą wartość własną macierzy $I = J^T J$. Wtedy można je obliczyć przez formuły

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(E + G + \sqrt{4F^2 + (E - G)^2} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(E + G - \sqrt{4F^2 + (E - G)^2} \right)$$

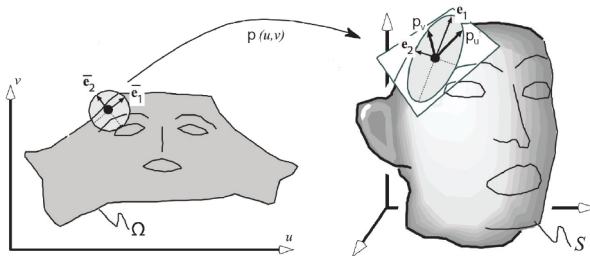
- ▶ Jeżeli σ_1 oraz σ_2 oznaczają odpowiednio pierwszą i drugą wartość szczególną macierzy J , to zachodzi zależność

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$$

- ▶ W ogólności zachodzą następujące związki:
 - p jest *izometrią* (zachowuje odległości) $\Leftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$
 - p jest *konforemne* (zachowuje kąty) $\Leftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
 - p jest *wiernopowierzchniowe* (zachowuje pola powierzchni) $\Leftrightarrow \sigma_1 \sigma_2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 1$
- ▶ Ponadto izometria jest również konforemna i wiernopowierzchniowa, a odwzorowanie jednocześnie konforemne i wiernopowierzchniowe jest izometrią.

Lokalna deformacja powierzchni - wartości własne

- ▶ Niech \bar{e}_1, \bar{e}_2 oznaczać wektory własne macierzy pierwszej formy podstawowej.
- ▶ Wektory te są przekształcane na wektory $e_1 = J\bar{e}_1, e_2 = J\bar{e}_2$



[źródło: Homann, Kai & Levy, Bruno & Sheffer, Alla. (2008). *Mesh Parameterization: Theory and Practice*. ACM SIGGRAPH 2007 Papers - International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques.]

► Proste przekształcenie liniowe

$$\text{parameterization: } f(u, v) = (u, 1 - u, v)$$

$$\text{Jacobian: } J_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{first fundamental form: } \mathbf{I}_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvalues: } \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$$

Nie jest ani konforemne, ani wiernopowierzchniowe

► Przekształcenie walcowe

$$\text{parameterization: } f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

$$\text{Jacobian: } J_f = \begin{pmatrix} \cos u & 0 \\ -\sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{first fundamental form: } \mathbf{I}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvalues: } \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1$$

Jest izometrią.

► Przekształcenie paraboliczne

$$\text{parameterization: } f(u, v) = (2u, 2v, u^2 + v^2)$$

$$\text{Jacobian: } J_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

$$\text{first fundamental form: } \mathbf{I}_f = \begin{pmatrix} 4+4u^2 & 4uv \\ 4uv & 4+4v^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvalues: } \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 4(1 + u^2 + v^2)$$

Nigdzie nie jest wiernopowierzchniowe, a konformne jest jedynie w punkcie $(u, v) = (0, 0)$

► Przekształcenie sferyczne ortograficzne

$$\text{parameterization: } f(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{d}\right) \quad \text{with } d = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

$$\text{Jacobian: } J_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -ud & -vd \end{pmatrix}$$

$$\text{first fundamental form: } \mathbf{I}_f = \begin{pmatrix} 1+u^2d^2 & uv d^2 \\ uv d^2 & 1+v^2d^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvalues: } \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = d^2$$

Jest izometrią jedynie w $(u, v) = (0, 0)$. Poza tym punktem nie jest ani konformne, ani wiernopowierzchniowe

► Przekształcenie sferyczne stereograficzne

parameterization: $f(u, v) = (2ud, 2vd, (1 - u^2 - v^2)d)$ with $d = \frac{1}{1+u^2+v^2}$

$$\text{Jacobian: } J_f = \begin{pmatrix} 2d-4u^2d^2 & -4uvd^2 \\ -4uvd^2 & 2d-4v^2d^2 \\ -4ud^2 & -4vd^2 \end{pmatrix}$$

first fundamental form: $\mathbf{I}_f = \begin{pmatrix} 4d^2 & 0 \\ 0 & 4d^2 \end{pmatrix}$

eigenvalues: $\lambda_1 = 4d^2, \quad \lambda_2 = 4d^2$

Jest konforemne na całej dziedzinie, ale wiernopowierzchniowe (więc izometryczne) jedynie na okręgu $u^2 = v^2 = 1$

Druga forma podstawowa powierzchni

- ▶ Wprowadzamy następujące oznaczenia

$$\rho_{uu} = \frac{\partial^2 p}{\partial u^2}, \quad \rho_{vv} = \frac{\partial^2 p}{\partial v^2}, \quad \rho_{uv} = \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v}$$

- ▶ Wtedy

$$\rho_{uu} = \begin{bmatrix} x_{uu} \\ y_{uu} \\ z_{uu} \end{bmatrix}, \quad \rho_{vv} = \begin{bmatrix} x_{vv} \\ y_{vv} \\ z_{vv} \end{bmatrix}, \quad \rho_{uv} = \begin{bmatrix} x_{uv} \\ y_{uv} \\ z_{uv} \end{bmatrix}$$

- ▶ Kolejność różniczkowania w pochodnych mieszanych nie ma znaczenia (Twierdzenie Schwarz'a), zatem $\rho_{uv} = \rho_{vu}$.
- ▶ *Drugą formą podstawową powierzchni* $\rho(u, v)$ nazywamy macierz

$$II := \begin{bmatrix} \rho_{uu}^T n & \rho_{uv}^T n \\ \rho_{uv}^T n & \rho_{vv}^T n \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

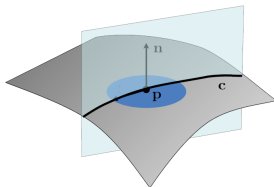
Krzywizna powierzchni

- ▶ Krzywiznę powierzchni w ustalonym punkcie wyprowadzamy z pojęcia krzywizny krzywej.
- ▶ Niech $q(t) = [u(t), v(t)]^T$ będzie krzywą w przestrzeni parametrów (u, v) . Jej obraz na powierzchni $p(u, v)$ jest określony przez $C(t) := p(q(t))$. Styczna do tej krzywej jest określona przez

$$C'(t) = p'(q(t))q'(t) = [p_u \ p_v]^T [u_t \ v_t]$$

- ▶ *Krzywizną normalną* powierzchni $p(u, v)$ w punkcie (u, v) definiujemy jako

$$\begin{aligned}\kappa(q'(t)) &= \frac{[u_t \ v_t] I [u_t \ v_t]^T}{[u_t \ v_t] I [u_t \ v_t]^T} = \frac{[u_t \ v_t] \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} [u_t \ v_t]^T}{[u_t \ v_t] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} [u_t \ v_t]^T} \\ &= \frac{[u_t e + v_t f \ u_t f + v_t g][u_t \ v_t]^T}{[u_t E + v_t F \ u_t F + v_t G][u_t \ v_t]^T} = \frac{eu_t^2 + 2fu_t v_t + gv_t^2}{Eu_t^2 + 2Fu_t v_t + Gv_t^2}\end{aligned}$$

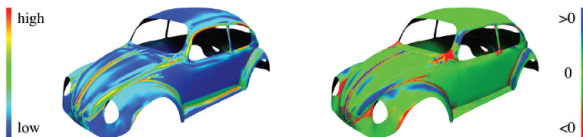


- ▶ Krzywizna $\kappa(q'(t))$ posiada dwa ekstrema:
 - minimum (ozn. κ_2) osiągame dla wektora $q(t_2)$ dla pewnego parametru t_2
 - minimum (ozn. κ_1) osiągame dla wektora $q(t_1)$ dla pewnego parametru t_1
- ▶ Wektory $q(t_1)$ oraz $q(t_2)$ nazywamy *kierunkami głównymi powierzchni* natomiast wartości κ_1 oraz κ_2 nazywamy *krzywiznami głównymi powierzchni*
- ▶ *Twierdzenie Eulera* Niech Ψ oznacza kąt pomiędzy kierunkami głównymi. Wówczas

$$\kappa(q'(t)) = \kappa_1 \cos^2(\Psi) + \kappa_2 \sin^2(\Psi)$$

- ▶ Wynika z tego, że krzywizna powierzchni jest całkowicie określona przez krzywizny główne
- ▶ Definiujemy jeszcze dwa inne wskaźniki krzywizny
 - *Krzywizna średnia*: $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$
 - *Krzywizna Gaussa*: $K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$

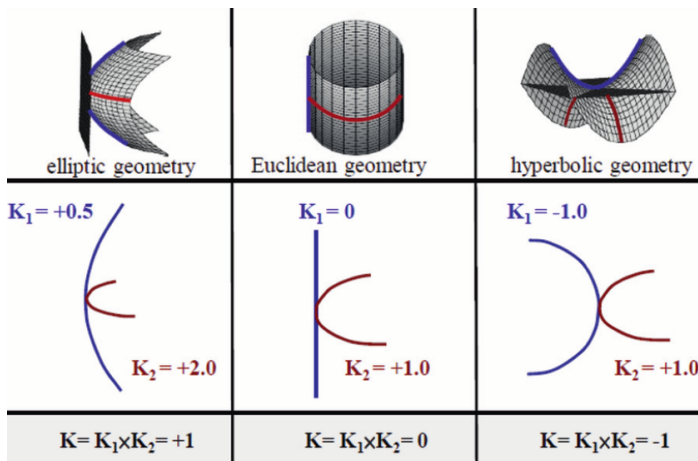
- ▶ Dla przykładów z poprzednich slajdów krzywizny są następujące
 - *proste przekształcenie liniowe*: $K = 0, H = 0$
 - *przekształcenie walcowe*: $K = 0, H = 1/2$
 - *przekształcenie paraboliczne*: $K = \frac{1}{4(1+z)^2}, H(p) = \frac{2+z}{4(1z)^{3/2}}$
 - *przekształcenie sferyczne*: $K = 1, H = -1$
- ▶ Na rysunku z lewej zobrazowano krzywiznę Gaussa, a na prawym krzywiznę średnią



[źródło: Hormann, Kai & Levy, Bruno & Sheffer, Alla. (2008). *Mesh Parameterization: Theory and Practice*. ACM SIGGRAPH 2007 Papers - International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques.]

Klasyfikacja punktów krzywizny

Krzywizna Gaussa dzieli punkty powierzchni na trzy klasy:



[Źródło: Adachi, Yoshitaka. (2014). A Change and Prospect of Quantitative Evaluation of Microstructure Morphology. Tetsu-to-Hagane.]