

Rozdział 1

Krzywe i powierzchnie B-spline

1.1 Krzywe NURBS

1.1.1 Problem dokładnej reprezentacji krzywych stożkowych

Uwaga: Osoby nie pamiętające klasyfikacji krzywych stożkowych mogą znaleźć ten materiał pod adresem : http://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section

W celu zarysowania zagadnienia rozważmy problem parametryzacji okręgu o promieniu $r > 0$ na płaszczyźnie środka w punkcie $(0, 0)$. Oczywiście istnieje dobrze znana parameryzacja kątowna: $x(\alpha) = r \cos(\alpha)$, $y(\alpha) = r \sin(\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Niemniej chcąc reprezentować okrąg za pomocą krzywych wielomianowych potrzebujemy parametryzacji wielomianowej. Okrąg jest krzywą 2-go stopnia, więc spróbujmy rozważyć jego parametryzację wielomianami drugiego stopnia, czyli

$$\begin{aligned}x &= au^2 + bu + c \\y &= pu^2 + qu + r\end{aligned}$$

gdzie $a, p \neq 0$. Dzieląc oba równania odpowiednio przez a oraz p otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} &= u^2 + \frac{b}{a}u + \frac{c}{a} \\ \frac{y}{p} &= u^2 + \frac{q}{p}u + \frac{r}{p}\end{aligned}$$

Odejmując je teraz stronami pozbywamy się składnika kwadratowego i dostajemy

$$u = \frac{p(x - c) - a(y - r)}{bp - aq}$$

Wprowadzając tak obliczone u do pierwszego równania otrzymujemy postać na składową x :

$$x = a \left[\frac{p(x - c) - a(y - r)}{bp - aq} \right]^2 + b \left[\frac{p(x - c) - a(y - r)}{bp - aq} \right] + c$$

Podstawiając

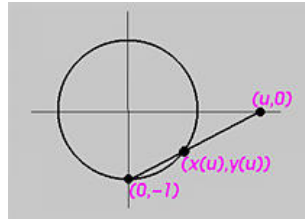
$$\begin{aligned}A &= ap^2 \\ B &= a^2p \\ C &= a^3\end{aligned}$$

otrzymujemy

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Wyróżnik tego równania $B^2 - AC = 0$, zatem stworzona parametryzacja opisuje parabolę, a nie okrąg. Widać zatem, że z czterech krzywych stożkowych jedynie parabola jest reprezentowana bezpośrednio przez krzywe BS (w istocie przez krzywe Beziera).

Rozważmy teraz ten sam okrąg o promieniu 1, wiążąc parametr u z osią x i przeprowadźmy prostą przechodzącą przez punkt $(0, -1)$ oraz punkt $(u, 0)$ dla ustalonego u . Łatwo sprawdzić, że jej równanie ma postać $x = uy + u$.



Rysunek i intuicja pokazują, że dla każdego skończonego $u > 0$ prosta ta przecina okrąg w drugim punkcie $x(u), y(u)$. Wyliczając te współrzędne otrzymujemy

$$\begin{aligned} x &= \frac{2u}{1+u^2} \\ y &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc parametryzację w postaci **ilorazu wielomianów**. Ogólnie można pokazać, że wszystkie krzywe stożkowe mają tego typu parametryzację. Nazywamy je parametryzacjami **wymiernymi**. Widać zatem, że krzywe B-spline są nieadekwatne dla dokładnej reprezentacji krzywych stożkowych i że potrzebujemy tutaj **krzywych wymiernych**. Uwzględniając wszystkie zalety, które posiadają krzywe B-spline zbudujemy **wymierne krzywe B-spline**.

1.1.2 Wymierne krzywe B-spline

Przypnijmy, że krzywą B-spline p -tego stopnia definiuje formuła

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i$$

w której bazujemy na zbiorze $n+1$ punktów kontrolnych $\mathbf{P}_i, i = 0, \dots, n$ oraz wektorze węzłów $\mathbb{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$. Rozważmy teraz punkty kontrolne w reprezentacji jednorodnej, dobrze znanej z kursu OpenGL:

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Każdy z wektorów \mathbf{P}_i przemnożmy teraz przez wagę w_i .

$$\mathbf{P}_i^w = \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

Zwykle rozważamy wagi ściśle dodatnie - wagi równe 0 oznaczają brak wpływu danego punktu na kształt krzywej, natomiast wagi ujemne usuwają niektóre pożądane cechy krzywej. Wówczas

$$\mathbf{C}^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^w = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) (w_i x_i) \\ \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) (w_i y_i) \\ \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) (w_i z_i) \\ \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \end{bmatrix}$$

Usuując zbędny indeks w z symbolu możemy to równoważnie zapisać jako

$$\mathbf{C}(u) = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)(w_i x_i)}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} \\ \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)(w_i y_i)}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} \\ \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)(w_i z_i)}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^n \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie wymierną krzywą B-spline (ang. rational B-spline, ozn. RBS¹) definiujemy jako

$$\mathbf{C}(u) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i \mathbf{P}_i$$

1.1.3 Podstawowe własności

1. Jeżeli wszystkie wagi są równe 1, to krzywa RBS staje się zwykłą krzywą B-spline.
2. Znana z kursu OpenGL interpretacja geometryczna współrzędnych jednorodnych implikuje, że krzywe RBS można interpretować jako rzuty 4-wymiarowych krzywych BS na przestrzeń 3D (analogicznie jako rzuty 3-wymiarowych krzywych BS na płaszczyznę 2D).
3. Z definicji krzywych RBS wynika, że funkcjami bazowymi są dla nich funkcje

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j}$$

tzn.

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) \mathbf{P}_i$$

4. Wszystkie istotne własności baz BS przenoszą się na bazy RBS
5. Wszystkie istotne własności krzywych BS przenoszą się na krzywe RBS
6. **Wyjątek:** Silna własność powłoki wypukłej jest prawdziwa gdy wszystkie wagi są nieujemne
7. **Dodatkowo:** Krzywe RBS są niezmiennicze względem rzutowania perspektywicznego

1.1.4 Wstawianie węzłów

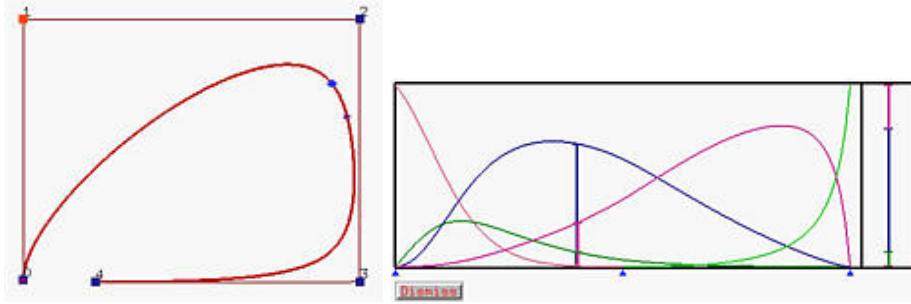
Z racji, że RBS można rozpatrywać jako rzuty zwykłych krzywych BS, algorytmy dla krzywych RBS można bezpośrednio przenieść z krzywych BS. W szczególności dotyczy to algorytmu wstawiania węzła, a więc również algorytmu obliczania wartości punktu należącego do krzywej. Ogólny schemat postępowania jest następujący:

1. Wyraż 3D-krzywą RBS jako 4D-krzywą BS
2. Zastosuj algorytm do 4D-krzywej BS
3. Zrzutuj otrzymane punkty kontrolne na przestrzeń 3D, otrzymując nową krzywą RBS, tzn. nowe punkty kontrolne i nowe wagi.

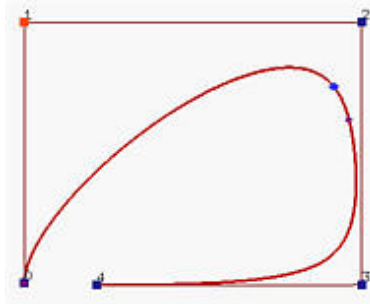
Ustalmy $n + 1$ punktów kontrolnych P_0, P_1, \dots, P_n wraz z wagami w_0, w_1, \dots, w_n , wektor węzłów \mathbb{U} oraz stopień krzywej p . Niech $P_i = (x_i, y_i, z_i)$. Wtedy $P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$, $0 \leq i \leq n$, a \mathbb{U} definiuje wektor węzłów dla 4D-krzywej stopnia p . Włożenie węzła do tej 4D-krzywej daje nowy zbiór punktów kontrolnych $Q_i^w = (X_i, Y_i, Z_i, W_i)$, $0 \leq i \leq n$.

Jako przykład rozważmy krzywą w płaszczyźnie XY , tzn. 2D-krzywą RBS. Niech $p = 3$, $n = 4$, $\{w_i\} = \{1, 0.5, 4, 5, 1\}$ $\{P_i\} = \{(-70, -76), (-70, 75), (74, 75), (74, -77), (-40, -76)\}$ oraz $\mathbb{U} = \{0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1\}$. Rysunek poniżej pokazuje krzywą i jej funkcje bazowe

¹Analogicznie krzywą B-spline oznaczamy przez BS. Rozróżniając przypadki kiedy wektor węzłów jest jednostajny (węzły równo rozłożone, ang. uniform) i niejednostajny (ang. non-uniform) możemy stosować dla krzywej B-spline oznaczenia UBS i analogicznie NUBS. Zatem w przypadku krzywej RBS mamy odpowiednio: URBS oraz NURBS. Biorąc pod uwagę szczególny przypadek krzywej BS, czyli krzywą Bezieira, którą oznaczamy przez B, możemy również rozważać oznaczenie RB, ale NIE MAJĄ SENSU oznaczenia URBS oraz NURBS.



Wstawiamy węzeł $u = 0.4$. Zgodnie z algorytmem wstawiania dla krzywych BS i faktem, iż $u \in [u_3, u_4)$ dostajemy, że do zbioru rozpatrywanego przy wymianie należą punkty P_3, P_2, P_1, P_0 . Zatem tylko je przekształcamy do postaci 3D, otrzymując $\{P_i^w\} = \{(-70, -76), (-35, 37.5), (296, 300), (370, -385)\}$ z wagami $\{w_i\} = \{1, 0.5, 4, 5\}$.



Teraz postępujemy standardowo, tzn. wyliczamy współczynniki a_i :

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{t - u_3}{u_6 - u_3} = \frac{0.4 - 0}{1 - 0} = 0.4 \\ a_2 &= \frac{t - u_2}{u_5 - u_2} = \frac{0.4 - 0}{1 - 0} = 0.4 \\ a_1 &= \frac{t - u_1}{u_4 - u_1} = \frac{0.4 - 0}{0.5 - 0} = 0.8 \end{aligned}$$

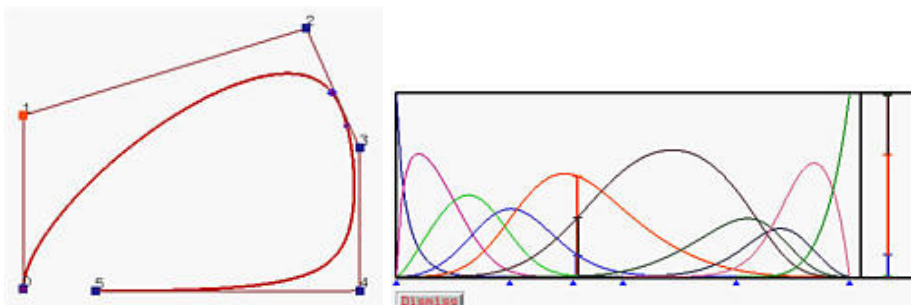
i obliczamy nowe punkty kontrolne 3D:

$$\begin{aligned} Q_3^w &= (1 - a_3)P_2^w + a_3P_3^w = (325.6, 26, 4.4) \\ Q_2^w &= (1 - a_2)P_1^w + a_2P_2^w = (97.4, 142.5, 1.9) \\ Q_1^w &= (1 - a_1)P_0^w + a_1P_1^w = (-42, 14.8, 0.6) \end{aligned}$$

Rzutuując je na 2D, tzn. dzieląc przez 3-cią współrzędną dostajemy właściwe wartości tych punktów w 2D, wraz z przypisanymi im nowymi wagami:

$$\begin{aligned} \mathbf{newP}_3 &= (74, 5.9) \quad \text{with weight } 4.4 \\ \mathbf{newP}_2 &= (51.3, 75) \quad \text{with weight } 1.9 \\ \mathbf{newP}_1 &= (-70, 24.6) \quad \text{with weight } 0.6 \end{aligned}$$

Rysunek poniżej pokazuje nową krzywą i jej funkcje bazowe



1.1.5 Krzywe stożkowe - rozwiązanie problemu

Pozostaje do rozwiązania zagadnienie parametryzacji wielomianowej okręgu, elipsy i hiperboli. Oczywiście chodzi nam o wielomiany co powyżej 2-go stopnia. Rozważmy trzy niewspółliniowe punkty $P_0 = (U_0, V_0)$, $P_1 = (U_1, V_1)$, $P_2 = (U_2, V_2)$. Załóżmy, że szukana krzywa wymierna przechodzi przez punkty P_0 , P_2 oraz jest styczna do odcinków P_0P_1 , P_1P_2 w punktach P_0 i P_2 . Ogólna jej reprezentacja stopnia 2 ma postać:

$$p(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Przeskalowując to równanie przez f (jeżeli jest niezerowe) możemy je równoważnie zapisać jako

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 1 = 0$$

Mamy zatem 5 niewiadomych. Wstawiając do tego równania punkt P_0 otrzymujemy

$$aU_0^2 + 2bU_0V_0 + cV_0^2 + 2dU_0 + 2eV_0 + 1 = 0$$

Gradient funkcji $p(x, y)$ ma postać

$$\nabla_{p(x,y)} = \langle 2ax + 2by + 2d, 2bx + 2cy + 2e \rangle$$

Gradient w punkcie P_0 ma nachylenie $(bU_0 + cV_0 + e)/(aU_0 + bV_0 + d)$, zatem styczna w tym punkcie, jako prostopadła do gradientu ma nachylenie $-(aU_0 + bV_0 + d)/(bU_0 + cV_0 + e)$. Z drugiej strony styczna w P_0 jest odcinkiem P_0, P_1 , zatem ma nachylenie $(V_1 - V_0)/(U_1 - U_0)$. Stąd mamy

$$\frac{V_1 - V_0}{U_1 - U_0} = -\frac{aU_0 + bV_0 + d}{bU_0 + cV_0 + e}$$

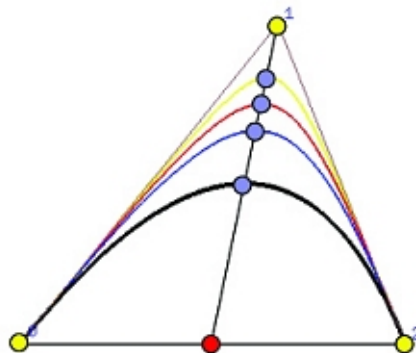
Postępując podobnie z punktem P_2 dostajemy

$$aU_2^2 + 2bU_2V_2 + cV_2^2 + 2dU_2 + 2eV_2 + 1 = 0$$

oraz

$$\frac{V_2 - V_1}{U_2 - U_1} = -\frac{aU_2 + bV_2 + d}{bU_2 + cV_2 + e}$$

Ze względu na 5 szukanych zmiennych potrzebujemy jeszcze jednego równania. Rozpatrzmy odcinek łączący punkt P_1 ze środkiem odcinka P_0P_2 . Szukana krzywa na pewno go przetnie, przy czym zależnie od jej kształtu będzie on leżał w różnych miejscach.



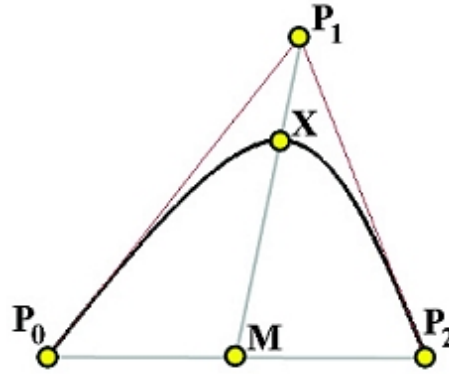
Opisując teraz szukaną krzywą w języku krzywej RBS 2-go stopnia i biorąc trzy bazy Bernsteina 2-go stopnia:

$$\begin{aligned} B_{2,0}(u) &= (1 - u)^2 \\ B_{2,1}(u) &= 2(1 - u)u \\ B_{2,2}(u) &= u^2 \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$C(u) = \frac{1}{(1-u)^2 + 2(1-u)uw + u^2} ((1-u)^2 P_0 + 2(1-u)uw P_1 + u^2 P_2)$$

Punkt przecięcia X jest oczywiście punktem $C(0.5)$, gdyż jego rzutem o środku P_1 na odcinek P_0P_2 jest punkt środkowy M .



Obliczając go z równania krzywej dostajemy

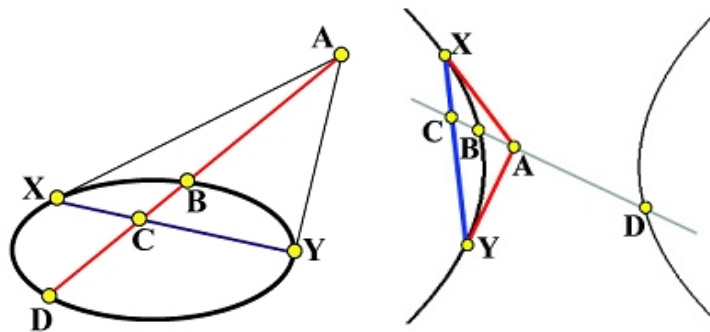
$$C(0.5) = \frac{w}{1+w} P_1$$

$$C(0.5) = \frac{w}{1+w} P_1$$

$$C(0.5) = \frac{w}{1+w} P_1$$

$$C(0.5) = \frac{w}{1+w} P_1$$

Bez zmiany ogólności możemy tę krzywą umieścić tak, że $M = (0, 0, 0)$ oraz $P_2 = -P_0$ i oba te punkty leżą na osi X . Wtedy długość wektora X jest równa $\frac{w}{1+w}$ razy długość wektora P_1 . Zatem $|MX|/|MP_1| = \frac{w}{1+w}$. Jeżeli $w = 1$ (zwykła krzywa Bezierra 2-go stopnia, czyli parabola - zob. sekcja 1.1.1), to $|MX|/|MP_1| = 1/2$. Mamy do rozważenia dwa przypadki: $\frac{w}{1+w} < 1/2$ oraz $\frac{w}{1+w} > 1/2$. Posłużymy się znanym faktem związanym z krzywymi stożkowymi. Wyprowadzając z jednego punktu A dwie styczne do łuku krzywej stożkowej oraz linię pośrednią między nimi, dostajemy, że linia ta przecina cięciwę rozpiętą pomiędzy punktami styczności X, Y oraz daną krzywą - w sumie mamy trzy punkty przecięcia: C, B, D .



Zachodzi wówczas zależność:

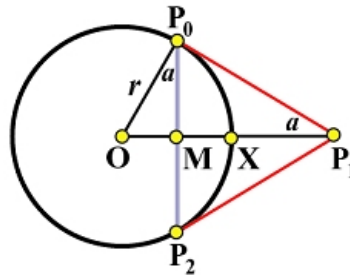
$$\frac{|DC|}{|CB|} = \frac{|DA|}{|AB|}$$

Ponadto

$$\frac{|CB|}{|CA|} = \frac{|CB|}{|CB| + |BA|} = \frac{1}{1 + \frac{|BA|}{|CB|}} = \frac{1}{1 + \frac{|DA|}{|DC|}}$$

Z rysunków powyżej widać, że jeżeli $|DA| > |DC|$, to mamy elipsę, natomiast gdy $|DA| < |DC|$, otrzymujemy hiperbolę. Stąd dla elipsy $|CB|/|CA| < 1/2$, natomiast dla hiperboli $|CB|/|CA| > 1/2$. Z rysunku pokazującego położenie punktu X , widać teraz od razu, że $w < 1/2$ oznacza elipsę, natomiast $w > 1/2$ definiuje hiperbolę.

Pozostał jeszcze do scharakteryzowania okrąg. Oczywiście jest on szczególnym przypadkiem elipsy. Z rysunku poniżej



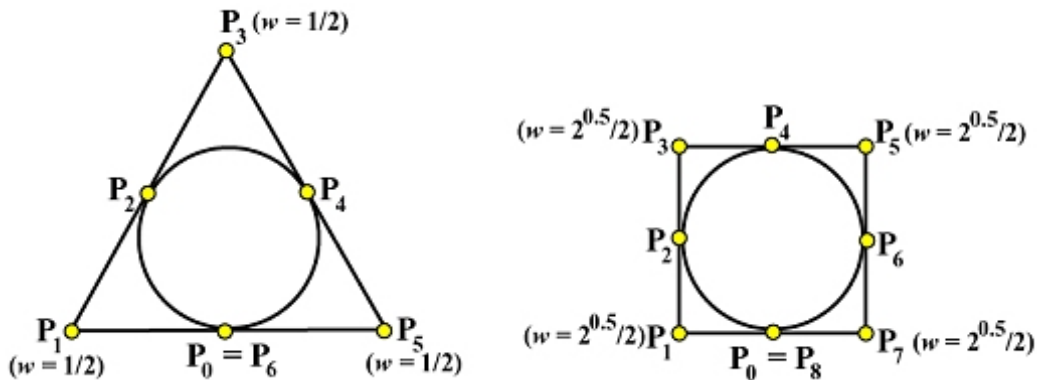
nietrudno widać że

$$\frac{w}{1+w} = \frac{|MX|}{|MP_1|} = \frac{\sin(a)}{1 + \sin(a)}$$

Stąd

$$w = \sin(a)$$

Zatem ćwiartka okręgu, definiowana przez warunek $\alpha = 45^\circ$, jest równoważnie definiowana przez wagę $w = \sqrt{2}/2$, natomiast 1/3-cia okręgu, definiowana przez warunek $\alpha = 30^\circ$, jest równoważnie definiowana przez wagę $1/2$.



1.2 Powierzchnie B-spline

Relacja pomiędzy krzywymi BS (RBS) i powierzchniami BS (RBS) jest analogiczna do relacji pomiędzy krzywymi Beziera i powierzchniami Beziera. Oznacza to, że podobnie jak w przypadku Beziera powierzchnie BS definiujemy na prostokącie parametrów $(u, v) \in [u_{min}, u_{max}] \times [v_{min}, v_{max}]$, posługując się funkcjami bazowymi $b_{ij}(u, v)$ będącymi iloczynami i -tej oraz j -tej bazy krzywych BS². Zatem

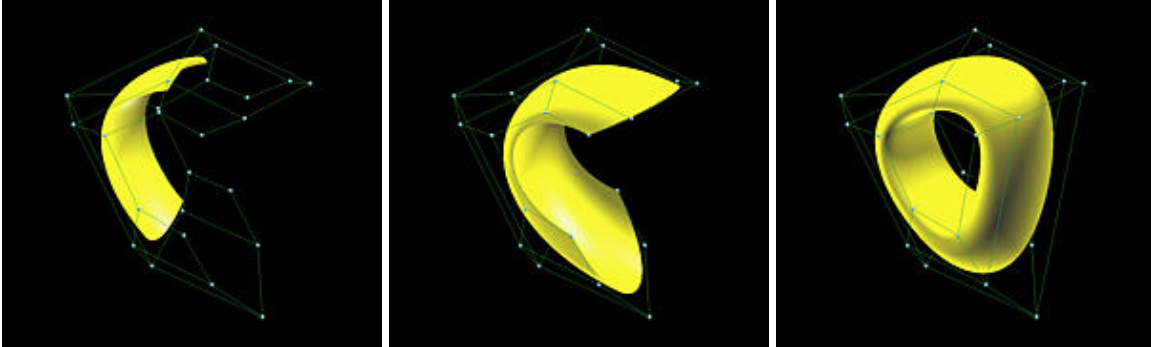
$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{p}_{i,j}$$

²Konstrukcja ta jest szczególnym przypadkiem ogólnej sytuacji: jeżeli przestrzeń X ma bazę $\{e_i\}_{i=1}^n$ oraz przestrzeń Y ma bazę $\{f_j\}_{j=1}^m$, to iloczyn tensorowy przestrzeni $X \otimes Y$ (w szczególności iloczyn kartezjański $X \times Y$) ma bazę $\{e_i \otimes f_j\}_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$

Oczywiście z każdym parametrem związany jest niezależnie wektor węzłów. Wszystkie własności baz jednowymiarowych oraz krzywych BS przenoszą się bezpośrednio na własności powierzchni. Przykładowo, rozkład jedynki oznacza, że

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) = 1$$

Podobnie jak dla krzywych BS rozważamy w ogólności otwarte, obcięte oraz zamknięte powierzchnie BS.



1.2.1 Algorytm de Boora

Zastosowanie algorytmu de Boora dla krzywych do powierzchni B-spline jest analogiczne do zastosowania algorytmu de Casteljau dla krzywych do powierzchni Beziera. Przypomnijmy zatem tę ideę. Ogólny wzór dla powierzchni Beziera ma postać

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{m,i}(u) B_{n,j}(v) \mathbf{p}_{ij}$$

którą równoważnie można zapisać jako:

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^m B_{m,i}(u) \left(\sum_{j=0}^n B_{n,j}(v) \mathbf{p}_{ij} \right)$$

Dla każdego $i = 1, \dots, m$ definiujemy punkt $\mathbf{q}_i(v)$ wzorem

$$\mathbf{q}_i(v) = \sum_{j=0}^n B_{n,j}(v) \mathbf{p}_{ij}$$

Poniższa postać pokazuje, że obliczenie punktu powierzchni $\mathbf{p}(u, v)$ sprowadza się do wyliczenia punktu na krzywej, której punktami kontrolnymi są punkty $\{\mathbf{q}_i(v)\}_{i=1}^m$.

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^m B_{m,i}(u) \mathbf{q}_i(v)$$

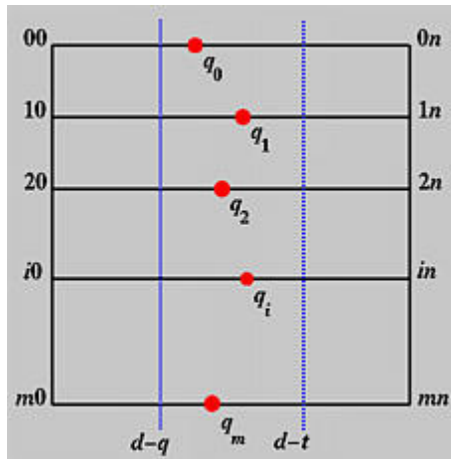
Aplikując tę ideę do powierzchni B-spline otrzymujemy kolejno:

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^m N_{i,p}(u) \left(\sum_{j=0}^n N_{j,q}(v) \mathbf{p}_{ij} \right)$$

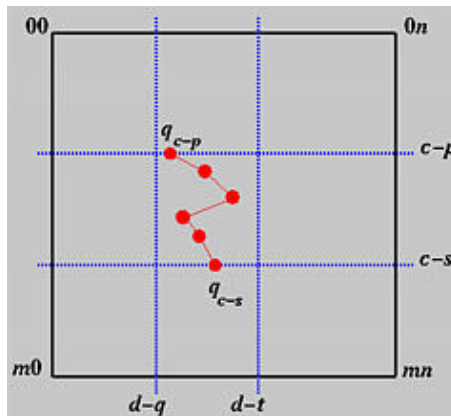
$$\mathbf{q}_i(v) = \sum_{j=0}^n N_{j,q}(v) \mathbf{p}_{ij}$$

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^m N_{i,p}(u) \mathbf{q}_i(v)$$

Jednak w tym przypadku możemy poczynić pewne optymalizacje. Z własności krzywych B-spline wiadomo, że jeżeli $v \in [v_d, v_{d+1})$, to na wartość $q_i(v)$ wpływają albo jedynie punkty $p_{i,d}, p_{i,d-1}, \dots, p_{i,d-q}$, gdy $v > v_d$ albo jedynie punkty $p_{i,d-t}, p_{i,d-t-1}, \dots, p_{i,d-q}$, gdy $v = v_d$ i węzeł v_d ma krotność t . Dla uogólnienia w jeden przypadek przyjmujemy, że jeżeli $v > v_d$, to $t = 0$. Rysunek poniżej ilustruje to symbolicznie.



Po obliczeniu w ten sposób wszystkich punktów $q_i(v)$ rozpatrujemy krzywą $p(u, v)$ jako krzywą parametru u , z punktami kontrolnymi $q_i(v)$. Zatem teraz jeżeli $u \in [v_c, v_{c+1})$, to na wartość $p(u, v)$ wpływają jedynie punkty $q_{c-s}, q_{c-s-1}, \dots, q_{c-p}$, gdzie s jest krotnością węzła u_c . Symbolicznie ilustruje to kolejny rysunek



Pseudokod algorytmu de Boora dla powierzchni B-spline wygląda następująco:

Data: Zbiór punktów kontrolnych $\{p_{i,j}^{j=1,\dots,m}\}_{i=1,\dots,n}$, wektory węzłów dla kierunków u, v

Result: $p(u,v)$

Niech $u \in [u_c, u_{c+1})$ oraz $v \in [v_d, v_{d+1})$;

Jeżeli $u \neq u_c$ to $s = 0$;

Jeżeli $v \neq v_d$ to $t = 0$;

for $i := c - p$ **to** $c - s$ **do**

 Zastosuj algorytm de Boora dla krzywych do punktów kontrolnych $p_{i,d-q}, p_{i,d-q+1}, \dots, p_{i,d-t}$;

 Niech $q_i(v)$ będzie wynikiem tego algorytmu;

end

Zastosuj algorytm de Boora dla krzywych do punktów kontrolnych $q_{c-p}(v), q_{c-p-1}(v), \dots, q_{c-s}(v)$;

Wynik tego algorytmu jest punktem $p(u, v)$;

Algorithm 1: Algorytm obliczania wartości punktu powierzchni B-Spline

Poniższy rysunek pokazuje przykładową powierzchnię z równymi w obu kierunkach wektorami węzłów: $[0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1]$ i tablicą punktów kontrolnych wymiaru 5×5 (zatem oba wymiary wynoszą 3).

