

1 Parametryczne krzywe trzeciego stopnia

1.1 Wstęp

Rozpatrzmy wielomian trzeciego stopnia reprezentujący skończony segment krzywej. Jego parametryczna forma ma postać

$$\begin{cases} x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad (1.1)$$

Macierzowo równanie (1.1) przybiera postać

$$Q(t) = C \cdot T, \quad (1.2)$$

gdzie

$$C = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zatem pochodna

$$\frac{d}{dt}Q(t) = C \cdot \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jeśli połączymy z sobą dwa segmenty $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ krzywej, to gdy:

- (a) $Q_1(1) = Q_2(0)$ to krzywa ma *ciągłość geometryczną* G^0
- (b) $\frac{d}{dt}Q_1^+(1) = a \frac{d}{dt}Q_2^-(0)$, $a \in R_+$, to krzywa ma *ciągłość geometryczną* G^1
- (c) $\frac{d^n}{dt^n}Q_1^+(1) = \frac{d^n}{dt^n}Q_2^-(0)$ to krzywa ma *ciągłość parametryczną* C^n

Ciągłość G^0 oznacza po prostu zwykłą ciągłość funkcji w punkcie. Pierwsza pochodna $Q'(t)$ wyraża prędkość punktu krzywej względem parametru t . Zatem ciągłość geometryczna G^1 oznacza jedynie, że prędkość przy przejściu przez punkt połączenia nie zmieni kierunku, natomiast może zmienić wartość. Wynika z tego, że używanie takiej krzywej jako ścieżki kamery w animacji spowoduje wyraźny skok szybkości przesuwania się kadrów, co oczywiście jest zwykle niepożądane. Podobnie negatywny efekt w animacji daje ciągłość parametryczna C^1 , gdyż w przypadku, gdy drugie pochodne segmentów w punkcie połączenia są różne to punkt na krzywej (kamera) zmienia skokowo przyspieszenie. Dopiero ciągłość parametryczna C^2 usuwa ten problem.

Możemy zatem powiedzieć, że krzywą $Q(t)$ charakteryzują:

- (1) punkty początkowe i końcowe kolejnych segmentów
- (2) rodzaj ciągłości w punkcie łączenia segmentów

Dla jednoznacznego określenia krzywej trzeciego stopnia potrzebujemy czterech współczynników dla każdej z trzech zmiennych w każdym segmencie. Dla jasnego zarysowania sytuacji macierz C , której wymiar wynosi 3×4 , rozbijemy na iloczyn dwóch macierzy $G \cdot M$. Pierwszą z nich określamy *macierzą geometrii*, drugą *macierzą bazową*, przy czym $G \in \mathcal{M}_{3 \times 4}$, $M \in \mathcal{M}_{4 \times 4}$. Daje to następujące rozwinięcie

$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{1x} & G_{2x} & G_{3x} & G_{4x} \\ G_{1y} & G_{2y} & G_{3y} & G_{4y} \\ G_{1z} & G_{2z} & G_{3z} & G_{4z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oznaczmy teraz przez $G_i = [G_{ix} \ G_{iy} \ G_{iz}]^T$, $i=1,2,3,4$, $G_x = [G_{1x} \ G_{2x} \ G_{3x} \ G_{4x}]$ (analogicznie określamy G_y i G_z). Wtedy jeśli przez B oznaczymy iloczyn $M \cdot T$, to otrzymujemy

$$Q(t) = \begin{cases} x(t) = G_x \cdot B \\ y(t) = G_y \cdot B \\ z(t) = G_z \cdot B \end{cases} \quad (1.3)$$

Macierz B jest macierzą bazową dla krzywej $Q(t)$, a bazami są wielomiany trzeciego stopnia. Różne postacie macierzy G i M generują różne klasy krzywych. Przedstawimy poniżej dwa podstawowe typy krzywych trzeciego stopnia: krzywe Hermite'a i krzywe Beziara.

1.2 Krzywe Hermite'a

Macierz geometrii G_H dla tej krzywej zawiera informacje o punktach początkowym i końcowym danego segmentu oraz o wektorach stycznych w tych punktach

$$G_H = [P_p \ P_k \ T_p \ T_k], \quad (1.4)$$

gdzie P_p, P_k oznaczają odpowiednio punkt początkowy i końcowy segmentu, a T_p, T_k oznaczają styczne w tych punktach. Wtedy

$$x(t) = G_H^x \cdot M_H \cdot T = [P_p^x \ P_k^x \ T_p^x \ T_k^x] \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stąd oczywiście

$$x(0) = P_p^x = G_H^x \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x(1) = P_k^x = G_H^x \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x'(0) = T_p^x = G_H^x \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x'(1) = T_k^x = G_H^x \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

W sumie daje to postać

$$G_H^x = G_H^x \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

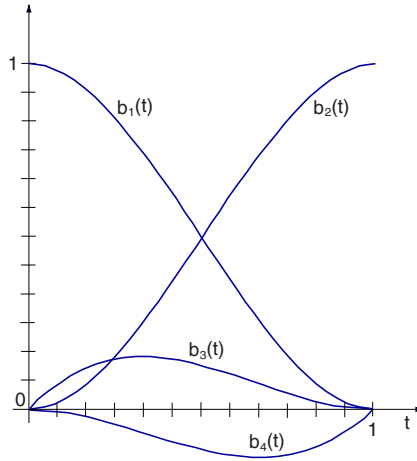
co musi implikować

$$M_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Otrzymaliśmy zatem cztery funkcje bazowe krzywej Hermite'a

$$\begin{cases} b_1(t) = [2 - 3 \ 0 \ 1] \cdot [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T \\ b_2(t) = [-2 \ 3 \ 0 \ 0] \cdot [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T \\ b_3(t) = [1 - 2 \ 1 \ 0] \cdot [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T \\ b_4(t) = [1 - 1 \ 1 \ 0] \cdot [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T \end{cases} \quad (1.7)$$

Wykresy tych funkcji są przedstawione na rys. 1.1 Wyraźnie widać, że w punkcie

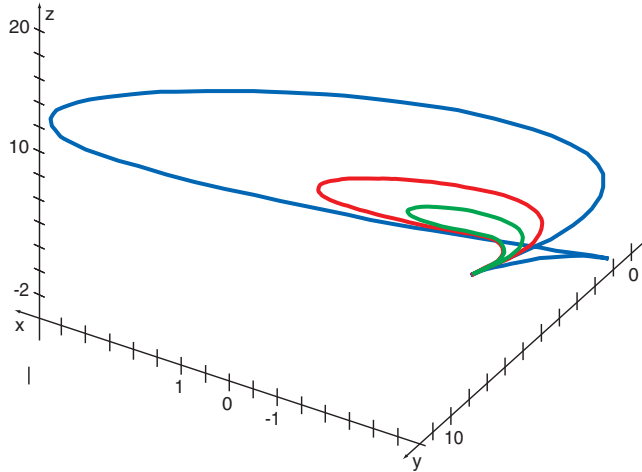


Rysunek 1.1: Funkcje bazowe Hermite'a stopnia trzeciego.

początkowym jedynie $b_1(t)$ jest niezerowa, a w punkcie końcowym tylko $b_2(t)$ posiada tą własność. Podobnie jest dla pochodnych funkcji bazowych. Dla $t = 0$ tylko $b_3'(t) \neq 0$, dla $t = 1$ tylko $b_4'(t) \neq 0$.

Każdy punkt krzywej $Q(t)$ jest wektorem w przestrzeni R^3 . Rozpatrzmy ten wektor nie jako punkt, ale jako kierunek wraz z przypisaną mu długością. Jeśli przez $u_x(t)$, $u_y(t)$, $u_z(t)$ oznaczymy odpowiednie kosinusy kierunkowe wektora $Q'(t)$, tzn. $u_x(t) = \frac{Q'_x(t)}{|Q'(t)|}$, $u_y(t) = \frac{Q'_y(t)}{|Q'(t)|}$, $u_z(t) = \frac{Q'_z(t)}{|Q'(t)|}$ to $Q'(t) = |Q'(t)|u(t)$, gdzie

$u(t) = [u_x(t) \ u_y(t) \ u_z(t)]$ (oczywiście $|u(t)| = 1$). Wtedy wektor geometrii G_H można zapisać jako $[Q(0) \ Q(1) \ |Q'(0)|u(0) \ |Q'(1)|u(1)]$. Wynika z tego, że dla ustalonego układu $\{Q(0), Q(1), u(0), u(1)\}$ istnieje nieprzeliczalnie wiele różnych kształtów krzywej Hermite'a, takich samych punktach końcowych i takich samych nachyleniach w tych punktach (rys. 1.2). Generalną zasadą dla krzywych Hermite'a jest,



Rysunek 1.2: Wszystkie krzywe mają jednakowe parametry z wyjątkiem długości wektorów stycznych.

że przy ustalonych punktach końcowych i ustalonych nachyleniach w tych punktach, jeśli długości wektorów stycznych są małe w stosunku do odległości punktów $Q(0), Q(1)$ to kształt krzywej jest łagodnym łukiem, jeśli jednak stosunek ten przekroczy pewną liczbę całkowitą to w krzywej zaczynają pojawiać się pętle. Nietrudno też pokazać [1], że przy tych samych warunkach każdy punkt pośredni segmentu, tzn. $Q(t_i)$, gdzie $t_i \in (0, 1)$ leży na płaszczyźnie równoległej do obu stycznych i przechodzącej przez punkt $t_i(Q(0) + Q(1))$. Rozważmy teraz sytuację kiedy macierz geometrii $G_H = [Q(0) \ Q(1) \ Q'(0) \ Q'(1)]$ zastąpimy macierzą $\bar{G}_H = [Q(1) \ Q(0) \ -Q'(1) \ -Q'(0)]$, tzn. segmenty posiadają te same nachylenia stycznych w tych punktach, z odwrotnym zwrotem. Oznacza to, że jeśli t i v określają parametryzację tych krzywych to $v = 1 - t$ oraz że kształty obu tych krzywych są identyczne. Jest to najprostszy przykład operacji *reparametryzacji krzywych*. Reparametryzacja ta posiada własność niezmienniczości kształtu, tzn. kształt krzywej jest jej niezmiennikiem. Zachowanie kształtu w tym przypadku wynika po prostu z faktu, iż $b_1(1 - t) = b_2(t)$ oraz $b_3(1 - t) = -b_4(t)$. W ogólnym przypadku reparametryzacja polega na zastąpieniu parametru $t \in [t_1, t_2]$, parametrem $v \in [v_1, v_2]$, tzn. przyporządkowaniu punktowi reprezentowanemu przez parametr $t = \alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2$, ($\alpha \in [0, 1]$) punktu określonego przez parametr $v = \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2$. Niech $v = f(t)$. Dla zachowania stopnia wielomianu krzywej i kierunków wektorów stycznych potrzeba, aby f była liniowa, tzn. $v = f(t) = at + b$. Wtedy $\frac{dv}{dt} = a$. Żądanie aby parametry t_1, t_2 i v_1, v_2 odpowiadały sobie wzajemnie implikuje, że $v_1 = at_1 + b$,

$v_2 = at_2 + b$. Stąd $\frac{v_1 - v_2}{t_1 - t_2}$. Przyjmujemy, że krzywa reprezentowana przez parametr t to $Q(t)$, a reprezentowana przez parametr v to $R(v)$. Wtedy $R'(v) = \frac{1}{a}Q'(t)$ oraz macierze geometrii spełniają następujące warunki

$$\begin{cases} R(v_1) = Q(t_1) \\ R(v_2) = Q(t_2) \\ R'(v_1) = \frac{1}{a}Q'(t_1) \\ R'(v_2) = \frac{1}{a}Q'(t_2) \end{cases}$$

Wynika z tego że długości tych stycznych zmieniają się proporcjonalnie do zmiany parametru.

Naturalnym zastosowaniem reparametryzacji jest sytuacja obcinania krzywej (np. w punktach przecięcia z inną krzywą przy modelowaniu). Bez zmiany ogólności możemy założyć, że obcinanie krzywej $Q(t)$ odbywa się wewnątrz segmentu określonego przez parametry $t = 0$ i $t = 1$. Niech t_1 i t_2 oznaczają parametry obcinania. Wtedy potrzebujemy znaleźć nową parametryzację dla pozostawionego kawałka segmentu, tzn. taką aby $v = 0$ odpowiadało wartości $t = t_1$, a $v = 1$ wartości $t = t_2$. Z przeprowadzonych powyżej wyprowadzeń dostajemy, że

$$\begin{cases} R(0) = Q(t_1) \\ R(1) = Q(t_2) \\ R'(0) = Q'(t_1)(t_2 - t_1) \\ R'(1) = Q'(t_2)(t_2 - t_1) \end{cases}$$

Liniowa zależność pomiędzy parametrami przyjmuje w tym przypadku postać $t = t_1 + v\Delta t$, gdzie $\Delta t = t_2 - t_1$. Wtedy n -ta potęga parametru t wyraża się wzorem

$$t^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t_1^k (v\Delta t)^{n-k} \quad (1.8)$$

Dla $n = 3$ odwzorowujemy na siebie wektory $T = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T$ oraz $V = [v^3 \ v^2 \ v \ 1]^T$. Macierz $S_{V \rightarrow T}$, która dokonuje tej transformacji spełnia warunek $T = S_{V \rightarrow T} \cdot V$ i ma wobec równania (1.8) postać

$$S_{V \rightarrow T} = \begin{bmatrix} \Delta t^3 & 0 & 0 & 0 \\ 3t_1\Delta t^2 & \Delta t^2 & 0 & 0 \\ 3t_1^2\Delta t & 2t_1\Delta t & \Delta t & 0 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stosowanie reparametryzacji w podziale krzywej na mniejsze kawałki wykonuje się identycznie, stosując powyższe procedury dla każdego kawałka. Jest to szczególnie efektywne przy podziale jednostajnym segmentu na 2^n kawałków o długości $\frac{1}{2^n}$ [1]. Zdefiniowanie krzywej Hermite'a nie musi odbywać się bezpośrednio przez wskazanie macierzy G_H . Można np. pokazać, że wystarczy znajomość dwóch punktów końcowych, nachyleń w tych punktach (tylko kierunków) oraz pewnego punktu, o którym wiemy, że leży wewnątrz krzywej (ale nie znamy jego parametru). Wyprowadzenie macierzy G_H w tym przypadku pozostawia się czytelnikowi. Inna możliwa realizacja krzywej Hermite'a zakłada znajomość czterech punktów do niej należących wraz

z odpowiadającymi im parametrami. Oznaczmy je przez P_1, P_2, P_3, P_4 . Niech P oznacza macierz 3×4 zawierającą ich współrzędne, tzn.

$$P = \begin{bmatrix} P_{1x} & P_{2x} & P_{3x} & P_{4x} \\ P_{1y} & P_{2y} & P_{3y} & P_{4y} \\ P_{1z} & P_{2z} & P_{3z} & P_{4z} \end{bmatrix}$$

Wiadomo, że dla $i=1,2,3,4$, $P_i = G_H \cdot M_H \cdot T_i$, gdzie $T_i = [t_i^3 \ t_i^2 \ t_i \ 1]^T$. Niech $T_C = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4]$. Wtedy $P = G_H \cdot M_H \cdot T_C$, co daje $G_H = P \cdot T_C^{-1} \cdot M_H^{-1}$. Ustalając zbiór parametrów otrzymujemy rodzinę wszystkich krzywych Hermite'a generowaną przez punkty odpowiadające tym parametrom i stałą macierz $T_C^{-1} \cdot M_H^{-1}$.

Łączenie segmentów krzywych Hermite'a można zrealizować na trzy sposoby, zależnie od pożądaných właściwości w punktach łączenia.

Niech $G_1 = [Q_1(0) \ Q_1(1) \ Q_1'(0) \ Q_1'(1)]$, $G_3 = [Q_3(0) \ Q_3(1) \ Q_3'(0) \ Q_3'(1)]$ oznaczają dwa segmenty krzywych Q_1 i Q_3 , przy czym $Q_1(1) \neq Q_3(0)$. Jeśli chcemy je połączyć innym segmentem krzywej Hermite'a Q_2 to szukamy macierzy geometrii $G_2 = [Q_2(0) \ Q_2(1) \ Q_2'(0) \ Q_2'(1)]$ takiej, że

- (a) $Q_1(1) = Q_2(0)$, $Q_2(1) = Q_3(0)$ co daje ciągłość geometryczną G^0
- (b) $Q_1(1) = Q_2(0)$, $Q_2(1) = Q_3(0)$, $Q_1'(1) = k_1 Q_2'(0)$, $Q_2'(1) = k_2 Q_3'(0)$, gdzie $k_1, k_2 \neq 1$ co daje ciągłość geometryczną G^1 .
- (c) $Q_1(1) = Q_2(0)$, $Q_2(1) = Q_3(0)$, $Q_1'(1) = Q_2'(0)$, $Q_2'(1) = Q_3'(0)$ co daje ciągłość parametryczną C^1 .

Rozwiązaniami dla kolejnych przypadków są macierze G_2 postaci

- (a) $G_2 = [Q_1(1) \ Q_3(0) \ A \ B]$, gdzie $A, B \in R$
- (b) $G_2 = [Q_1(1) \ Q_3(0) \ k_1 Q_1'(1) \ k_2 Q_3'(0)]$, gdzie $k_1, k_2 \in R_+$
- (c) $G_2 = [Q_1(1) \ Q_3(0) \ Q_1'(1) \ Q_3'(0)]$

1.3 Krzywe Beziera

Krzywe te są efektem kilkuletnich prac P. Beziera, inżyniera w firmie Renault, które miały dać w efekcie krzywe, umożliwiające prostszą i bardziej intuicyjną kontrolę nad nimi, niż to miało miejsce w przypadku krzywych Hermite'a. Ostateczny kształt krzywe Beziera przyjęły w roku 1970. Jako punkty kontrolne Bezier przyjął wierzchołki P_i ustalonego wielokąta o $n + 1$ wierzchołkach, tzw. *wielokąta charakterystycznego*. Wtedy każdy punkt budowanej krzywej wyraża się jako kombinacja liniowa punktów kontrolnych i funkcji bazowych $f_i(t)$ tzn.

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i f_i(t) \quad t \in [0, 1]$$

Baza $(f_i)_0^n$ została określona przez zbiór żądanych własności krzywych, tzn. [1]

- (1) krzywa $Q(t)$ interpoluje pierwszy i ostatni punkt P_i , tzn. $Q(0) = P_0, Q(1) = P_n$
- (2) k -ta pochodna w punktach końcowych segmentu jest generowana przez k pierwszych punktów kontrolnych, licząc od każdego z końców; w szczególności pierwsza pochodna (tzn. styczna w punktach P_0 i P_n) jest dana odpowiednio przez kierunki wektorów $P_1 - P_0$ oraz $P_n - P_{n-1}$
- (3) funkcje $f_i(t)$ są symetryczne względem parametrów t i $1 - t$

Własności te spełniają układy pierwszych $n + 1$ wielomianów Bernsteina

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad i = 0 \dots n \quad (1.9)$$

Dla trzech punktów tzn. $n = 3$ mamy krzywe Bezierra trzeciego stopnia, których funkcje bazowe przybierają postać

$$\begin{cases} B_{0,3}(t) = (1-t)^3 \\ B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2 \\ B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t) \\ B_{3,3}(t) = t^3 \end{cases} \quad (1.10)$$

Wtedy

$$\begin{aligned} Q(t) &= [P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3] \cdot [B_{0,3}(t) \ B_{1,3}(t) \ B_{2,3}(t) \ B_{3,3}(t)]^T = \\ &= [P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Stąd od razu otrzymujemy obie szukane macierze, geometrii i bazową:

$$G_B = [P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3] \in \mathcal{M}_{3 \times 4}$$

$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Odpowiadająca punktom P_0, P_1, P_2, P_3 macierz geometrii krzywej Hermite'a ma postać

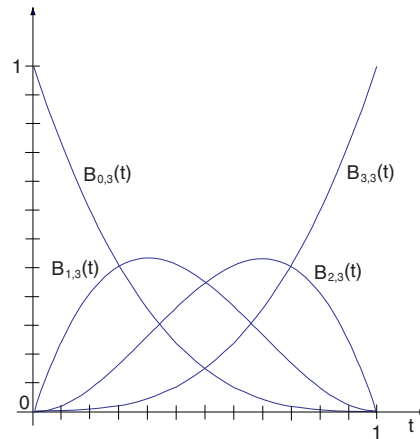
$$G_H = [P_0 \ P_3 \ k_1(P_1 - P_0) \ k_2(P_3 - P_2)]$$

dla pewnych $k_1, k_2 \in R_+$. Jakie powinny być te wartości, aby obie macierze geometrii generowały identyczne krzywe? Dla krzywej Bezierra $Q(t)$ mamy $Q'(t) = (-3t^2 + 6t - 3)P_0 + (9t^2 - 12t + 3)P_1 + (-9t^2 + 6t)P_2 + 3t^2P_3$, co daje $Q'(0) = 3(P_1 - P_0)$ oraz $Q'(1) = 3(P_3 - P_2)$, więc $k_1 = k_2 = 3$. Macierz konwersji $M_{B \rightarrow H}$ pomiędzy tymi krzywymi spełnia zależność

$$G_H = M_{B \rightarrow H} \cdot G_B = M_H^{-1} \cdot M_B \cdot G_B$$

Z faktu, iż $\sum_{i=0}^n B_{i,n} = 1$ wynika, że krzywa Bezierra znajduje się wewnątrz powłoki wypukłej swoich punktów kontrolnych. Inną ważną jej własnością jest niezmienniczość względem przekształceń afinicznych. Co więcej, każda reparametryzacja afiniczna krzywej Bezierra daje również krzywą niezmiennego kształtu. Wykazanie tego pozostawia się czytelnikowi jako ćwiczenie.

Poniższy rysunek przedstawia funkcje bazowe krzywej Bezierra trzeciego stopnia. Widać z niego, że w punktach końcowych jedynie $B_{0,3}$ oraz odpowiednio $B_{3,3}$ ma-



Rysunek 1.3: Funkcje bazowe Bezierra stopnia trzeciego.

ją jakiś wpływ na kształt krzywej. $B_{1,3}$ najsilniej wpływa w punkcie dla parametru $t = \frac{1}{3}$, natomiast $B_{2,3}$ dla parametru $t = \frac{2}{3}$. Z własności (3) funkcji bazowych wynika, że zmiana kierunku parametru nie wpływa na kształt krzywej. Oczywiście może się zdarzyć, że cztery punkty kontrolne to za mało dla potrzeb konkretnego przypadku. Wtedy musimy dodać kolejne punkty, co oznacza zwiększenie stopnia wielomianu $Q(t)$. Chodzi nam oczywiście o takie dodanie punktu, aby nie zmienił się kształt krzywej, co pociąga za sobą także przemieszczenie wszystkich już istniejących punktów kontrolnych. Załóżmy, że dana jest krzywa z $n + 1$ punktami kontrolnymi i że dodajemy do niej punkt $n + 2$ -gi, żądając zachowania kształtu. Oznacza to, że wejściowy zbiór punktów kontrolnych $(P_i)_0^n$ przejdzie w nowy zbiór $(\bar{P}_i)_0^{n+1}$ tak, że zajdzie równość

$$\sum_{i=0}^{n+1} \bar{P}_i B_{i,n+1}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)$$

Stąd

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \bar{P}_i B_{i,n+1}(t) &= \sum_{i=0}^{n+1} \bar{P}_i \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} = \\ &= \sum_{i=0}^n P_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n P_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} [t + (1-t)] = \\ &= \sum_{i=0}^n P_i \binom{n}{i} [t^i (1-t)^{n+1-i} + t^{i+1} (1-t)^{n-i}] \end{aligned}$$

Stąd

$$\bar{P}_i \binom{n+1}{i} = P_i \binom{n}{i} + P_{i-1} \binom{n}{i-1}$$

a po redukcji

$$\bar{P}_i = P_{i-1} \left(\frac{i}{n+1} \right) + P_i \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \quad i = 0, \dots, n+1$$

Otrzyaliśmy zatem jawne wzory na obliczenie nowego zbioru punktów kontrolnych. Wzór ten można uogólnić na przypadek dodania k punktów kontrolnych. Mamy wtedy

$$\bar{P}_i = \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} \frac{\binom{k}{i-j}}{\binom{n+k}{i}}$$

Przypadek, w którym musimy obcinać segment krzywej $Q(t)$ w punktach t_1 i t_2 rozpatrujemy analogicznie jak to było z krzywą Hermite'a, tzn. dokonujemy reparametryzacji krzywej $Q(t)$ dla $t \in (t_1, t_2)$ w krzywą $R(v)$, $v \in (0, 1)$ tak, że krzywa te pokrywają się. Oznacza to, że wyprowadzona w przypadku Hermite'a macierz $S_{V \rightarrow T}$ będzie taka sama tzn. $T = S_{V \rightarrow T} V$. Mamy wtedy dla $Q(t) = G_B \cdot M_B \cdot T$ oraz $R(v) = \bar{G}_B \cdot M_B \cdot V$ zależność

$$Q(v) = G_B \cdot M_B \cdot S_{V \rightarrow T} \cdot V = R(v) = \bar{G}_B \cdot M_B \cdot V$$

Stąd od razu otrzymujemy nowy wektor geometrii \bar{G}_B

$$\bar{G}_B = G_B \cdot M_B \cdot S_{V \rightarrow T} \cdot M_B^{-1}$$

Jako ćwiczenie proponuje się czytelnikowi wyprowadzenie wzorów na macierz geometrii w przypadku podziału segmentu na 2^n równych części względem parametru. Zadanie połączenia dwóch separowalnych kawałków krzywych Beziera, jest także analogiczne do przypadku krzywej Hermite'a. Warto podkreślić, że jeśli żądamy ciągłości G^1 w punktach łączenia to punkt łączenia i najbliższe mu punkty sąsiednie są współpłaszczyznowe, natomiast w przypadku ciągłości G^2 (co oznacza identyczne krzywizny) pięć punktów, z których środkowy jest punktem łączenia należy do jednej płaszczyzny, co czasami może wymagać zwiększenia punktów kontrolnych.

1.3.1 Reprezentacja De Casteljau dla krzywych Beziera

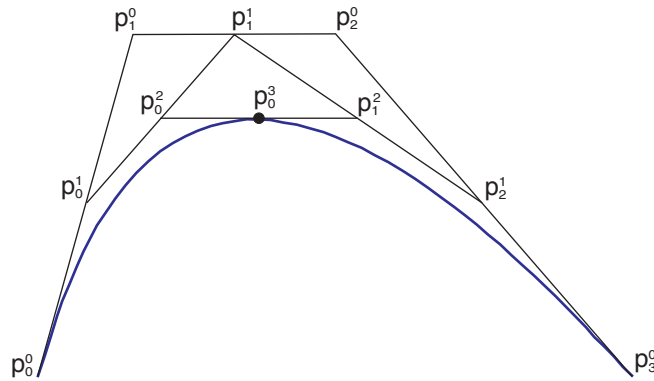
Niech p_0, \dots, p_n będą punktami kontrolnymi krzywej Beziera n -tego stopnia. Definiujemy rekurencyjny ciąg punktów następująco:

$$p_i^r(t) = t p_i^{r-1}(t) + (1-t) p_{i+1}^{r-1}(t), \quad p_i^0(t) = p_i$$

dla $r = 1, \dots, n$, $i = 0, \dots, n-r$. Wtedy dostajemy, że $Q(t) = p_0^n(t)$. W ten sposób jesteśmy w stanie obliczyć dowolny punkt segmentu krzywej. Pozbywając się rekurencji dostajemy postać z bazami Bernsteina. Dla $n = 3$ mamy następujące dane: Dla każdego $r = 1, 2, 3$ dostajemy $i = 0, \dots, n-r$ co generuje ciąg punktów

$$\begin{aligned}
p_0^0 &= p_0, p_1^0 = p_1, p_2^0 = p_0, p_3^0 = p_0, \\
p_0^1(t) &= tp_0^0(t) + (1-t)p_1^0(t), \\
p_1^1(t) &= tp_1^0(t) + (1-t)p_2^0(t), \\
p_2^1(t) &= tp_2^0(t) + (1-t)p_3^0(t) \\
p_0^2(t) &= tp_0^1(t) + (1-t)p_1^1(t), \\
p_1^2(t) &= tp_1^1(t) + (1-t)p_2^1(t), \\
p_2^3(t) &= tp_2^2(t) + (1-t)p_1^2(t).
\end{aligned}$$

Jeśli ustalimy $t = 0.5$ to otrzymamy sytuację podobną jak na rysunku 1.4 Ponadto



Rysunek 1.4: Rys.4.

punkty $p_0^0, p_1^0, p_2^0, p_3^0$ stanowią punkty kontrolne dla segmentu krzywej $[0, t]$, a punkty $p_0^3, p_1^2, p_2^1, p_3^0$ punkty kontrolne dla segmentu $[t, 1]$. Daje nam to naturalną metodę podziału krzywej Beziea na dwie krzywe Beziea (zob. [2]).

Literatura

- [1] Mortenson, M.E., *Geometric Modeling*, Wiley, 1997
- [2] Watt, A., Watt, M., *Advanced Animation and Rendering Techniques*, Addison-Wesley, 1992