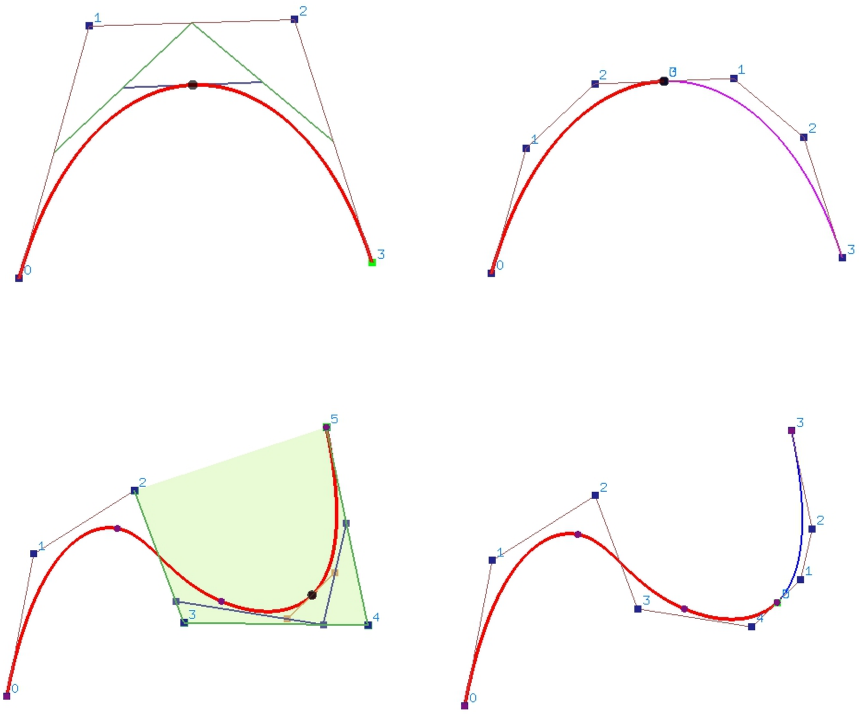
Rozdział 1

Krzywe i powierzchnie subdivision

1.1 Wstęp

Z teorii krzywych Beziera i krzywych B-spline wynika, że jednokrotne zastosowanie algorytmu Casteljau lub Boora skutkuje znalezieniem punktu o ustalonym parametrze, należącego do krzywej.



Górna para pokazuje zastosowanie algorytmu Casteljau i podział na dwie krzywe z ich punktami kontrolnymi, dolna analogicznie przypadek de Boora. Z własności powłoki wypukłej (lokalnej w przypadku B-spline - zielony obszar) wynika, że suma puntów kontrolnych krzywych z podziału, tworzy łamaną, która jest bliżej krzywej niż startowy zbiór punktów kontrolnych. Stosując ponownie te algorytmy do otrzymanych krzywych z podziału, dostajemy w obu przypadkach nowe zbiory punktów kontrolnych, tworzące łamane będące jeszcze bliżej krzywych. Oczywiste jest zatem, że ciągi takich łamanych zbiegają w granicy do krzywych (zbieżność jednostajna). Wynika tego, że chcąc narysować krzywą Beziera lub krzywą B-spline w rendererze wierzchołkowych (np. OpenGL) nie musimy posługiwać się jej dokładnym wzorem (funkcjami bazowymi), tylko możemy wystartować od zbioru punktów kontrolnych i następnie go zagęszczać otrzymując dowolnie dokładne przybliżenie krzywej przez łamaną. Niemniej ważne jest abyśmy wiedzieli do jakiego typu krzywej zbiega tak utworzony ciąg łamanych. Będzie to oczywiście zależało od sposobu wyliczenia kolejnych punktów.

Rozpatrzmy teraz konkretny przykład,a mianowicie krzywą B-spline 2-go stopnia, z jednostajnym wektorem węzłów (zatem krzywą otwartą) i zbiorem punktów kontrolnych $\{P_i\}_{i=0}^n$. Stosując do niej pojedynczo schemat de Boora wstawiania nowego węzła w środki wszystkich przedziałów wektora węzów (proszę to sprawdzić w DesignMentor!), otrzymujemy nowy zbiór punktów kontrolnych $\{P_i^1\}_{i=1}^n$ postaci

$$P_{2i-1}^1 = \frac{1}{4}P_{i-1} + \frac{3}{4}P_i, \quad P_{2i}^1 = \frac{3}{4}P_i + \frac{1}{4}P_{i+1} \quad P_0^1 = P_1, \quad P_{n+1}^1 = P_n$$

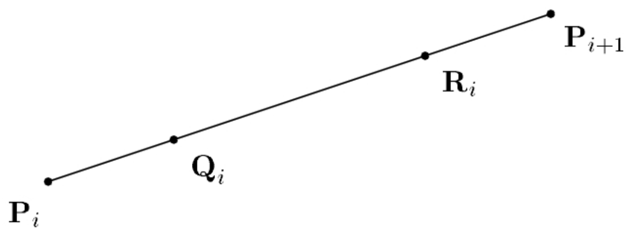
Na ten konkretny schemat można spojrzeć całkowicie ogólnie, abstrahując od faktu, że działamy na krzweej B-spline o znanych parametrach. Rozpatrzmy zatem początkowy zbiór punktów $n+1$ kontrolnych $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ i przeprowadźmy procedurę jego *poprawienia* (tzn. zagęszczenia), zdefiniowaną tak, że w wyniku otrzymujemy nowy zbiór punktów kontrolnych

$$\{Q_0, R_,Q_1, R_1, \ldots, Q_{n-1}, R_{n-1}\}$$

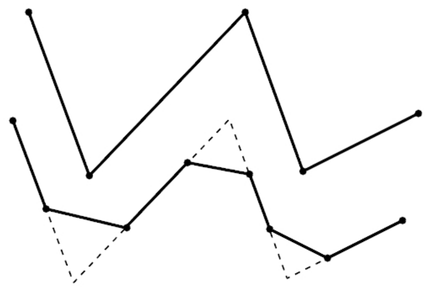
, taki, że

$$Q_i = \frac{3}{4}P_i + \frac{1}{4}P_{i+1}, \qquad R_i = \frac{1}{4}P_i + \frac{3}{4}P_{i+1}$$

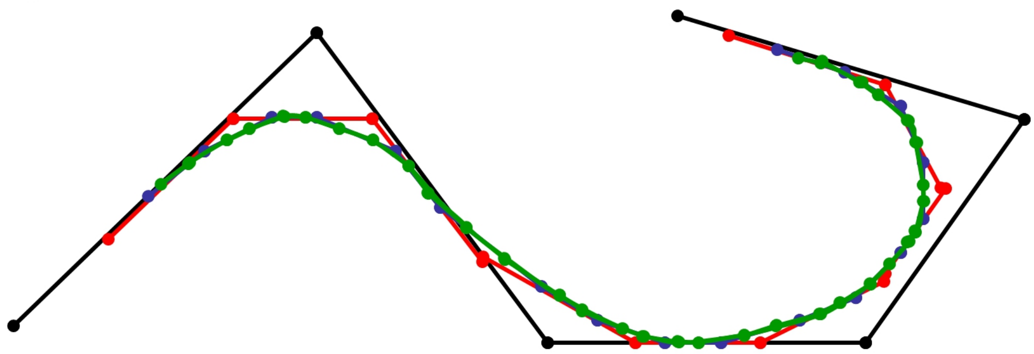
Ilustruje to poniższy rysunek.



W efekcie startując od ustalonej łamanej procedura ta obcina narożniki.



Kolejny rysunek pokazuje 3 kroki zagęszczania punktów kontrolnych, oparte na tej procedurze, której autorem jest Chaikin (1974, Utah University).



Wiemy tutaj skądinąd, że krzywą graniczną będzie krzywa B-spline 2-go stopnia, z jednostajnym wektorem węzłów (UBS)[1].

1.1.1 Praktyczny schemat

Chaikin wprowadził w swojej pracy ogólny schemat postępowania przy budowie nowego zbioru punktów kontrolnych łamanej (łamana jest indeksowana zawsze od indeksu 0). Każdy powtarzany krok tego procesu składa się z dwóch faz (zakładamy, że wykonaliśmy krok k-ty i checmy obliczyć krok $(k+1)$-szy):

1. **Faza podziału -** oblicz nowe wierzchołki w środku każdego odcinka łamanej

   Faza podziału dla odcinka $P_i^k\,P_{i+1}^k$ generuje jego środek

$$(P_i^k + P_{i+1}^k)/2.$$

[1] formalny dowód - Riesenfeld 1975

Po tej fazie mamy w łamanej dwa rodzaje punktów: *krawędziowe* (ozn. K) - środki odcinków oraz *wierzchołkowe* (ozn. V) - końce odcinków. Zatem para punktów odcinka $\{P_i^k, P_{i+1}^k\}$ zastępowana jest przez trójkę punktów S_{2i}^{k+1}, S_{2i+1}^{k+1}, $S_{2(i+1)}^{k+1}$, gdzie

$$S_{2i}^{k+1} = P_i^k, \quad S_{2i+1}^{k+1} = \frac{P_i^k + P_{i+1}^k}{2}$$

2. **Faza uśredniania** - uśrednij każdy wierzchołek łamanej z sąsiadami (jednym lub więcej)

   Faza uśredniania może być ogólnie wyrażona w postaci tzw. *maski uśredniania* postaci:

$$\mathbf{r} = \{\ldots, r_{-2}, r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \ldots\} = \{r_i\}_{i \in I},$$

   gdzie zbiór indeksów I jest *nośnikiem* maski $\mathbf{r}$, tzn. $r_i \neq 0$ dla każdego $i \in I$. Nowe punkty kontrolne P_i^{k+1} są obliczane jako

$$P_i^{k+1} = \sum_{i \in I} r_i S_i^{k+1}$$

   Widać, że do prawidłowego wykonania tej procedury potrzebujemy nie tylko maski $\mathbf{r}$, ale również jawnej postaci nośnika I, gdyż oczywiscie para $\mathbf{r} = \{1, 2, 3\}$ oraz $I = \{0, 1, 2\}$, oznacza coś innego niż para $\mathbf{r} = \{1, 2, 3\}$ oraz $I = \{-1, 1, 1\}$,

Przykładowo dla $\mathbf{r} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \right\}$, $I = \{0, 1\}$ i łamanej P_0^0, P_1^0, P_2^0 mamy:

1. **Faza podziału**

$$S_0^1 = \frac{P_0^0 + P_1^0}{2}, \quad S_1^1 = \frac{P_1^0 + P_2^0}{2}.$$

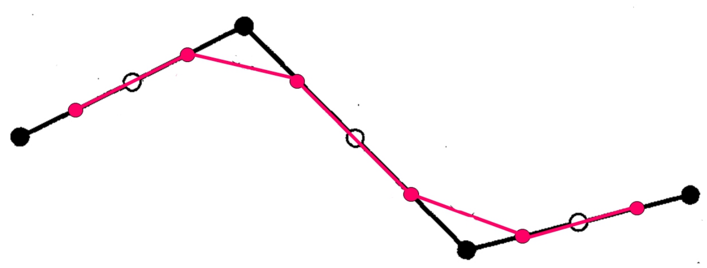
2. **Faza uśredniania**

$$P_0^1 = r_0 S_0^1 + r_1 S_0^1 = \frac{1}{2}\left(P_0^0 + \frac{1}{2}(P_0^0 + P_1^0)\right) = \frac{3}{4}P_0^0 + \frac{1}{4}P_1^0$$

   Podobnie

$$P_1^1 = \frac{3}{4}P_1^0 + \frac{1}{4}P_0^0, \quad P_2^1 = \frac{3}{4}P_1^0 + \frac{1}{4}P_2^0, \quad P_3^1 = \frac{3}{4}P_2^0 + \frac{1}{4}P_1^0,$$

Otrzymaliśmy zatem schemat Chaikina. Poniższy rysunek pokazuje ten schemat dla łamanej składającej się trzech odcinków - punkty startowe są czarne, punkty S_i^1 białe, natomaist punkty P_i^1 różowe.



Maska generująca krzywą UBS n-tego stopnia. Riesenfeld i Lane pokazali (1980), że posługując się maską

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2^n}\left\{\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right\}$$

otrzymujemy w granicy krzywą UBS n-tego stopnia.

1.1.2 Macierz subdivision

Rozpatrzmy teraz schemat generowany przez maskę $\frac{1}{4}\{1,\,2,\,1\}$ o nośniku $I = \{-1,\,0,\,1\}$. Z ostatniej uwagi wynika, że zbiega on do krzywej UBS 2-go stopnia. Rozwijając go jawnie, otrzymujemy

$$P_{i-1}^{k+1} = \frac{1}{2}\left(P_{i-1}^{k} + P_{i}^{k}\right), \quad P_{i-1}^{k+1} = \frac{1}{8}\left(P_{i-1}^{k} + 6P_{i}^{k} + P_{i+1}^{k}\right), \quad P_{i+1}^{k+1} = \frac{1}{2}\left(P_{i}^{k} + P_{i+1}^{k}\right)$$

Można to wyrazić macierzowo jako

$$\mathbf{P^{k+1}} := \begin{bmatrix} P_{i-1}^{k+1} \\ P_{i}^{k+1} \\ P_{i+1}^{k+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{i-1}^{k} \\ P_{i}^{k} \\ P_{i+1}^{k} \end{bmatrix} =: S\,\mathbf{P^{k}}.$$

Macierz

$$S = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

nazywana jest *lokalną macierzą subdivision*. Jej analiza pozwala m.in. dowieść, zbieżności i stabilności danego schematu, a więc podstawowych z numerycznego punktu widzenia cech.

Dla zilustrowania tego zauważmy, że

$$\mathbf{P^{k+1}} = S\,\mathbf{P^{k}} = S^2\,\mathbf{P^{k-1}} = \cdots = S^j\,\mathbf{P^0}$$

Zatem w granicy

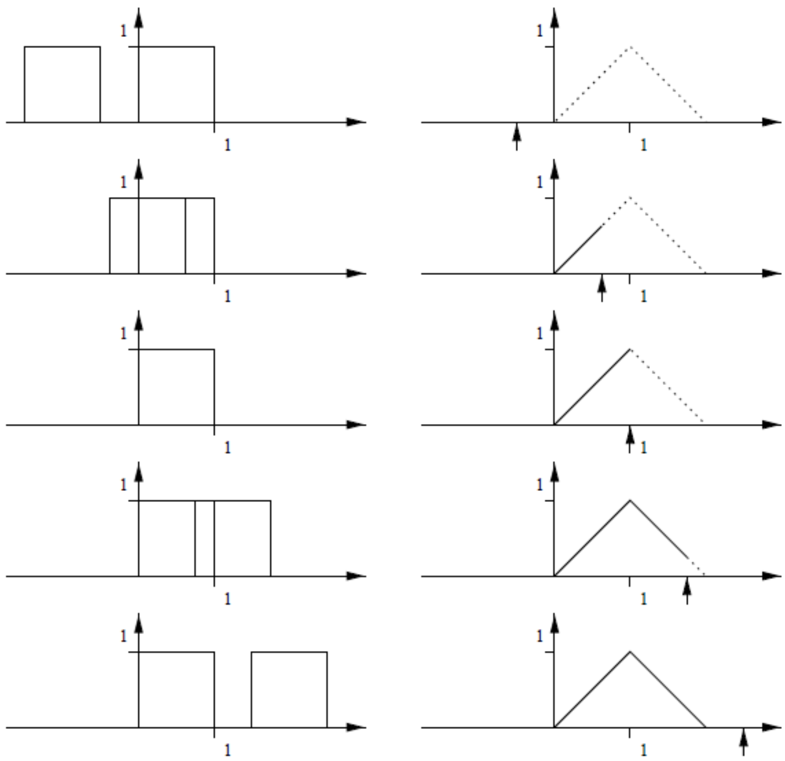
$$\mathbf{P}^{\infty} := \lim_{j\to\infty} S^j\mathbf{P^0}$$

1.2 Funkcje bazowe B-spline w języku splotu

Zdefiniowane w sekcji 1.1.2 trzeciego wykładu funkcje bazowe $N_{i,p}(u)$ mogą być zdefiniowane w inny rekurencyjny sposób, a mianowicie używajac operacji splotu[2] Wychodząc od definicji bazy $N_{i,0}(u)$ możemy bazy pierwszego stopnia $N_{i,1}(u)$ zdefiniować jako (ozn. $N_k := N_{0,k},\ N_{i,k} = N_k(u-i)$)

$$N_1(u) = N_0(u) \otimes N_0(u) = \int_R N_0(s)N_0(u-s)\,ds$$

Ilustruje to poniższy rysunek.



[2]Osoby które nie spotkały się wcześniej z tym pojęciem, mogą zajrzeć na stronę `http://pl.wikipedia.org/wiki/Splot_(analiza_matematyczna)`, gdzie znajduje się definicja wraz z sugestywną wizualizacja.

Analogicznie

$$N_2(u) = N_1(u) \otimes N_0(u) = N_0(u) \otimes N_0(u) \otimes N_0(u) = \int_R N_1(s) N_0(u-s)\, ds$$

i ogólnie

$$N_k(u) = N_{k-1}(u) \otimes N_0(u) = \bigotimes_{i=0}^{k} N_0(u) = \int_R N_{k-1}(s) N_0(u-s)\, ds. \tag{1.1}$$

Operacja splotu posiada m.in. trzy ważne własnośc, użyteczne przy definicji procesu subdivision:

- **(liniowość)** $f(u) \otimes (g(u) + h(u)) = f(u) \otimes g(u) + f(u) \otimes h(u)) =$
- **(przesuwalność)** Jeżeli $m(u) = f(u) \otimes g(u)$, to $f(u-i) \otimes g(u-j) = m(u-i-j)$
- **(skalowalność)** Jeżeli $m(u) = f(u) \otimes g(u)$, to $f(2u) \otimes g(2u) = \frac{1}{2} m(2u)$

1.3 Ogólne sformułowanie procesu subdivision dla baz UBS

1.3.1 Przypadek wielomianów stopnia zero

Sprecyzowanie zagadnienia

Rozpatrzmy reprezentację pewnej funkcji $f(u)$ w bazie $N_0(u-i)$, czyli bazie funkcji stałych o nośnikach $[i, i+1]$:

$$f(u) = \sum_i p_i^0 N_0(u-i)$$

Zauważmy, że

$$N_0(u) = N_0(2u) + N_0(2u-1) \tag{1.2}$$

Pierwsza z funkcji po prawej stronie ma nośnik [0, 1/2], natomiast druga [1/2, 1]. Widzimy tu reprezentację funkcji N_0 w postaci jej kopii - zmniejszenie dziedziny o połowę oraz przesunięcie. Można zatem na to spojrzeć jako na przykład *procesu subdivision* dla funkcji.

Rozpatrzmy teraz reprezentację pewnej funkcji $f(u)$ w bazie $N_0(u-i)$, czyli bazie funkcji stałych o nośnikach $[i, i+1]$:

$$f(u) = \sum_i p_i^0 N_0(u-i) \tag{1.3}$$

Po j-krotnym zagęszczeniu dziedziny otrzymujemy reprezentację w bazie $N_0(2^j - i)$, czyli bazie funkcji stałych o nośnikach odpowiednio $[i,\, i + \frac{1}{2^j}]$, $[i + \frac{1}{2^j},\, i + 2\frac{1}{2^j}]$, $[i + 2\frac{1}{2^j},\, i + 3\frac{1}{2^j}]$, $\ldots$, $[i + (2^j - 1)\frac{1}{2^j},\, i + 1]$

$$f(u) = \sum_i p_i^j N_0(2^j u - i) \tag{1.4}$$

Ponadto wówczas równanie (1.2) przyjmuje postać:

$$N_0(u) = \sum_{i=0}^{2^j - 1} N_0(2^j u - i) \tag{1.5}$$

Na ciąg (p_i^j) można spojrzeć przez pryzmat ciągu (p_i^{j-1}). Widać wówczas, że elementowi p_i^{j-1} odpowiadają dwa elementy w ciągu (p_i^j). Mianowicie p_{2i}^j oraz p_{2i+1}^j.

Dwa główne problemy

1. Znając początkowe wartości $(p_i) \equiv (p_i^0)$ znaleźć wartości (p_i^j) po j-tym zagęszczeniu.
2. Oczacować do jakiej funkcji zbiega taki proces.

Problemem drugim zajmiemy się na kolejnym wykładzie, teraz robiąc tylko kilka uwag na ten temat.

Naturalne jest, że jeżeli funkcja $f(u)$ jest znana to reprezentując ją w coraz bardziej precyzyjnych bazach, chcielibyślmy, aby proces ten zbiegał do $f(u)$. Widząc wykres moglibyśmy ręcznie wybrać wartości p_i^j, otrzymując w granicy zbieżność do $f(u)$.

Jednak gdy nie znamy $f(u)$ to w istocie mamy tylko prawe strony równań (1.3) oraz (1.4). Wtedy, zakładając *automatyczną procedurę* zagęszczania dziedziny i generowania kolejnych ciągów (p_i^j), musimy dowieść do czego ten proces zbiega

Pożądany efekt: Jeżeli ciąg początkowy (p_i^0) w przyjętym układzie bazowym dobrze aproksymuje funkcję $f(u)$, to ciąg (p_i^j) w zagęszczonym układzie bazowym 'zbiega' do funkcji $f(u)$, gdy $j \to \infty$.

Wróćmy teraz do problemu pierwszego.

Uwaga 1 *Na początkowy ciąg (p_i^0) można spoglądać równoważnie jak na zbiór początkowych punktów kontrolnych $\{P_i^0\}$, generujących kształt wykresu funkcji $f(u)$. Działając z bazami stopnia zero, naturalne jest przyjęcie, że dwa pierwsze punkty stanowią końce pierwszego odcinka, kolejne dwa końce drugiego itd. Zatem można by przyjąć:*

Oznaczmy teraz na chwilę $R_i^j(u) = N_0(2^j - i)$. Wtedy równania (1.5) oraz (1.4) mają odpowiednio postaci:

$$N_0(u) = \sum_{i=0}^{2^j-1} R_i^j(u) \tag{1.6}$$

$$f(u) = \sum_i p_i^j R_i^j(u) \tag{1.7}$$

Oznaczmy teraz przez $R^j(u)$ wektor poziomy, taki, że jego i-ta współrzędna $(R^j(u))_i = R_i^j(u)$. Analogicznie definiujemy wektor p^j. Wówczas

$$f(u) = R^j(u) \cdot p^j \tag{1.8}$$

Zagęszczanie pomiędzy poziomem j oraz $j+1$ daje formułę uogólniającą formułę (1.2)

$$R_i^j(u) = R_{2i}^{j+1}(u) + R_{2i+1}^{j+1}(u) \tag{1.9}$$

W języku funkcji N_0 ma ona postać

$$N_0(2^j u - i) = N_0(2^{j+1}u - 2i) + N_0(2^{j+1}u - 2i - 1) \tag{1.10}$$

Niech $S[i, j]$ będzie macierzą taką, że $S[2i, i] = S[2i+1, i] = 1$, natomiast wszystkie pozostałe jej elementy są równe zero. Poniżej pokazano jej fragment dla $(i, j) \in I = \{-4, -3, \ldots, 2, 3\} \times \{-4, -3, \ldots, 2, 3\}$:

$$S|_{\{i,j\}\in I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wtedy

$$R^j(u) = R^{j+1}(u) \cdot S$$

Pozwala to konstruktywnie zapisać proces subdivision, gdyż wstawiając ostatnie równanie do (1.8) otrzymujemy

$$p^{j+1} = S \cdot p^j \tag{1.11}$$

Zatem wystarczy znać wektor początkowy p^0, czyli rozkład funkcji $f(u)$ wg bazy $\{N_0(u - i)\}$, aby uzyskać przy pomocy macierzy S jej coraz dokładniejsze postaci! Potrzebna jest nam do tego jedynie wiedza na temat procesu subdivision dla funkcji N_0, czyli postać równania (1.2). Niemniej wszystkie te reprezentacje posługują się wielomianami stopnia 0.

Przykład 1 *Niech Początkowy układ współczynników p_i^0 ma postać $\{p_0^0, p_1^0, p_2^0\}$. Z równania (1.11) wynika, że i-ta składowa wektora $\{p_i^1\}$ jest obliczana przez mnożenie i-tego wiersza macierzy S i wektora $\{p_i^0\}$. Punktów w wektorze $\{p_i^j\}$ jest dwa razy więcej niż w wektorze $\{p_i^0\}$. Z definicji macierzy S wynika, że w $2i$-tym wierszu jedynie i-ta kolumna jest niezerowa, zatem $p_{2i}^1 = p_i^0$. Podobnie $p_{2i+1}^1 = p_i^0$. Widać zatem, że każda z trzech początkowych liczb została podwojona. W konkluzji, procedura ta powoduje jedynie zagęszczanie dziedziny - nie generuje nowych wartości p_i^j.*

1.3.2 Przypadek wielomianów wyższych stopni

Oznaczmy na chwilę $B(u) = N_m(u)$ oraz $B_i^j(u) = B(2^j u - i)$. Rozpatrzmy reprezentację funkcji $f(u)$ w bazie $B_i^0(u)$, czyli bazie B-spline m-tego stopnia:

$$f(u) = \sum_i p_i^0 B_i^0(u) = \sum_i p_i^0 B(u-i). \tag{1.12}$$

Z równań (1.12) i (1.2) dostajemy

$$B(u) = \bigotimes_{l=0}^{m} R(u) = \bigotimes_{l=0}^{m} (R(2u) + R(2u-1)) \tag{1.13}$$

Aby opisać proces subdivision dla $B(u)$ potrzebny jest nam analogon formuły (1.2).

Z własności splotu (sekcja 1.2) wynika, że równanie (1.13) da się w takiej formule zapisać jako

$$B(u) = \sum_k s_k B(2u-k) = \sum_k s_k B_k^1(u)$$

gdzie s_k są pewnymi stalymi. Jeżeli je znajdziemy, to cel zostanie osiągnięty, gdyż wtedy postępujemy analogicznie jak dla baz stopnia zerowego.

Analogonem równania (1.9) jest formuła

$$B_i^j(u) = \sum_k s_k B_{2i+k}^{j+1}(u) \tag{1.14}$$

W języku wektorów

$$B^j(u) = B^{j+1}(u)\, S,$$

gdzie macierz S jest taka, że $S[2i+k, i] = s_k$, a pozostałe jej elementy są równe zero.

Uwaga 2 *Wybierając i-tą kolumnę ustawiamy się w $2i$-tym wierszu i to jest pierwszy element niezerowy w tej kolumnie ($k = 0$). Poniżej są pozostałe. Wybierając $(i+1)$-szą kolumnę ustawiamy się w $2(i+1) = (2i+2)$-gim wierszu i tutaj znajduje się pierwszy niezerowy element w tej kolumnie. Zatem kolumna $(i+1)$-sza jest identyczna jak $i - ta$, tylko przesunięta o 2 wiersze w dół. Ponadto jeżeli w pozycji $(n, i+1)$ znajduje się element s_k, to w pozycji (n, i) znajduje się element s_{k+2}.*

Zatem podobnie jak w przypadku baz stopnia zerowego mamy

$$p^{j+1} = S \cdot p^j$$

Trzeba jeszcze tylko znaleźć współczynniki s_k (ile ich jest i jakie są ich wartości). Odpowiedź płynie z pojęcia splotu dyskretnego.

Splot dyskretny Niech (a_i), (b_j) będą pewnymi ciągami liczbowymi. Wtedy ciąg (c_m) nazywamy ich *dyskretnym splotem*, gdy

$$c_m = \sum_{i+j=m} a_i b_j$$

Przykładowo jeżeli

$$(a_i):\ a_1 = 1,\, a_2 = 2,\, a_i = 0 \text{ dla } i \notin \{1,2\}$$

$$(b_j):\ b_2 = 3,\, b_3 = 4,\, b_j = 0 \text{ dla } j \notin \{2,3\}$$

to zbiór indeksów $I = \{(i,j):\ a_i b_j \neq 0\} = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$. Zatem $J = \{m:\ c_m \neq 0\} = \{(3 = 1+2), (4 = (1+3) = (2+2)), (5 = 2+3)\}$ oraz

$$c_3 = 3,\, c_4 = 10,\, c_5 = 8.$$

Z dowolnym ciągiem (a_k) wiążemy tzw. *funkcję generującą* postaci

$$A(z) = \sum_k a_k z^k.$$

Wówczas możemy sformułować potrzbne twierdzenie:

Twierdzenie 1 *Załóżmy, że znamy formuły procesów subdivision dla funkcji $f(u)$ oraz $g(u)$, tzn. znane są ciągi (a_k) oraz (b_k) takie , że*

$$f(u) = \sum_k a_k f(2u-k), \quad g(u) = \sum_k b_k g(2u-k)$$

Jeżeli $h(u) = f(u) \otimes g(u)$, to proces subdivision dla funkcji $h(u)$ opisuje ciąg (c_k) taki, że

$$C(z) = \frac{1}{2}A(z)B(z).$$

Zatem wówczas

$$h(u) = \sum_k c_k h(2u-k).$$

Zauważmy teraz, że dla wprowadzonej funkcji $R(u) = N_0(u)$ zachodzi równanie (1.2) opisujące jego proces subdivision, tzn.

$$R(u) = R(2u) + R(2u-1) = \sum_{k=0}^{1} a_k R(2u-k),$$

gdzie $a_0 = a_1 = 1$. Zatem funkcja generująca dla ciągu a_k ma postać

$$A(z) = 1\,z^0 + 1\,z^1 = 1 + z.$$

Załóżmy teraz, że proces subdivison dla wprowadzonej funkcji $B(u) = N_m(u)$ opisuje ciąg (s_k), tzn.

$$B(u) = \sum_k s_k B(2u-k).$$

Z równania (1.13) i powyższego twierdzenia wynika natychmiast, że funkcja generująca proces dla ciągu (s_k) jest postaci

$$S(z) = \frac{1}{2^m}(1+z)^{m+1} \tag{1.15}$$

Rozwijając ten wielomian otrzymujemy

$$S(z) = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}z^k$$

co implikuje, że

$$s_k = \frac{1}{2^m}\binom{m+1}{k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m+1. \tag{1.16}$$

Zatem analogonem równania (1.2) dla bazy $N_m(u)$ jest formuła

$$N_m(u) = \frac{1}{2^m}\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}N_m(2u-i) \tag{1.17}$$

Dla $m = 2$, czyli baz B-spline 2-go stopnia dostajemy

$$s_0 = \frac{1}{4}, \quad s_1 = \frac{3}{4}, \quad s_2 = \frac{3}{4}, \quad s_3 = \frac{1}{4}$$

Otrzymalismy zatem proces Chaikina. Ustalając początkowy zbiór wartości (p_i^0) otrzymujemy (w konstrukcji nowego n-tego punktu biorz udział n-ty wiersz macierzy S. Z konstrukcji macierzy S wynika, że w i-tej kolumnie jedynie wiersze o numerach $2i+k$ są niezerowe, równe s_k. W tym przypadu $k = 0, 1, 2, 3$. Ponieważ kolumny są w stosunku do siebie przesunięte o 2 w pionie, zatem w $2i+k$-tym wierszu niezerowa jest kolumna i-ta, z wartością s_k, oraz kolumna $i+1$-sza z wartością s_{k-2}. Oczywiście $s_{k-2} = 0$ dla $k < 2$.

Uwaga 3 *Wprowadzona konstrukcja daje się lekko przemodyfikować (macierz S i wektor (p_i)) tak, że funkcja generująca dla ciągu s_k ilustruje praktyczny schemat 'podziel-uśrednij' wprowadzony w sekcji 1.1.1. Zajmiemy się tym na ćwiczeniach za tydzień.*