Rozdział 1

Krzywe i powierzchnie subdivision

1.1 Analiza zbieżności schematów

Uwaga: Poniższe uwagi pełnią rolę uzupełnień do fragmentów podręcznika: *SIGGRAPH 2000 Course Notes, Subdivision for Modeling and Animation.* Materiał dotyczący tego wykładu znajduje się w następujących sekcjach:

1. 2.3.2 Convergence of Subdivision
2. 2.4 Analysis of Subdivision

1. **Założenie** (jego uzasadnienie znajduje się w sekcji 2.4.4): Suma elementów każdego wiersza macierzy subdivision $\mathbf{S}$ wynosi 1. Wynika stąd:
   (i) $\mathbf{S}\mathbb{1} = \mathbb{1}$, gdzie $\mathbb{1}$ oznacza wektor kolumnowy złożony z samych jedynek (banalne do sprawdzenia)
   (ii) Biorąc pod uwagę, że kolumny są względem siebie przesunięte o 2, dostajemy, że kolejne wiersze zawierają współczynniki parzyste i odpowiednio nieparzyste danego schematu, więc sumy elementów parzystych i odpowiednio nieparzystch w schemacie wynoszą 1.
   (iii) Ostatnia konkluzja implikuje, że warunek (i) w języku funkcji generującej schemat ma postać $S(-1) = 0$ (oczywiste z definicji tej funkcji jako funkcji potęgowej)
   (iv) Warunek (i) w szczególności oznacza, że jedną z wartości własnych dla macierzy $\mathbf{S}$ jest wartość $\lambda = 1$, a odpowiadającym jej wektorem własnym jest wektor $\mathbb{1}$.
2. $\Delta\mathbf{p}^{j+1}$ oznacza ciąg taki,że $\Delta(p^{j+1})_i = p^{j+1}_{i+1} - p^{j+1}_i$. Wtedy $\Delta\mathbf{p}^{j+1} = \mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{p}^{j+1} = \mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}^j$.
3. Jeżeli $S(-1) = 0$, to $\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{S}\mathbb{1} = \mathbb{0}$. Wtedy istnieje macierz $\mathbf{D}$ taka, że $\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{\Delta}$. Zatem $\Delta\mathbf{p}^{j+1} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{p}^j = \mathbf{D} \cdot \mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}^{j-1} = \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{p}^{j-1}$. Stąd $\Delta\mathbf{p}^{j+1} = \mathbf{D}^j \cdot \mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{p^0}$. Zatem $\|\Delta\mathbf{p}^{j+1}\| \leqslant \|\mathbf{D}\|^j \, \|\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{p^0}\| = \|\mathbf{D}\|^j \, \|\Delta\mathbf{p^0}\|$.
4. **Punkty subdivision jako wykres funkcji łamanej**: $P^j(u) = \sum_i B_1(2^j u - i) p_i^j$ (w języku wykładu piątego: $\sum_i R_i^1(2^j u) p_i^j$)
5. Druga linia wyprowadzenia w dowodzie na str. 33: Subdivision dla wektora $\mathbf{B_1(u)}$ ma postać: $\mathbf{B_1(u)} = \mathbf{B_1(2u)} \cdot \mathbf{S_1}$, skąd $\mathbf{B_1(2^{j+1}u)} = \mathbf{B_1(2^j u)} \cdot \mathbf{S_1}$
6. Piąta linia wyprowadzenia w dowodzie na str 33 : $(\mathbf{B_1(2^j t)})_i = B_1^i(2^j t) = B_1(2^j t - i)$. Ponadto $sup_i |B_1(2^j t - i)| \leqslant 1$ (wykres B_1 na stronie 25.)
7. str. 33. końcówka dowodu - Z wyprowadzenia dla każdego t i dla każdego $k > j_0$: $\|P^{k+1}(t) - P^k(t)\| = M\alpha^k$. Wtedy $\| \sum_{n=k}^m \left(P^{n+1}(t) - P^n(t)\right) \| \leqslant \sum_{n=k}^m \|P^{n+1}(t) - P^n(t)\| \leqslant \sum_{n=k}^m M\alpha^k = M\alpha^k \frac{1-\alpha^{m-k}}{1-\alpha}$. Zatem dla każdego t: $\|P^\infty(t) - P^k\| \leqslant \frac{M\alpha^k}{1-\alpha}$. Prawa strona tej nierówności jest niezależna od t oraz zbiega do zera, gdy $k \to \infty$. Kończy to dowód.
8. Z twierdzenia na str. 33 oraz punkt 3. powyżej wynika, że jeżeli $K := \|\Delta\mathbf{p^0}\| < \infty$ oraz $\alpha := \|\mathbf{D}^n\| < 1$ dla pewnego $n > 0$, to $\|\Delta\mathbf{p}^{j+1}\| \leqslant K \left(\|\mathbf{D}^n\|^{\frac{1}{n}}\right)^j$, czyli twierdzenie zachodzi. Zatem badając zbieżność danego schematu wystarczy pokazać warunek: $\|\mathbf{D}^n\| < 1$ dla pewnego $n > 0$.
9. Funkcją generującą dla macierzy $\mathbf{D}$ jest funkcja $D(z)$ taka, że $S(z) = (1 + z)D(z)$. Zatem w przypadku baz UBS stopnia m otrzymujemy $D(z) = \frac{1}{2^m}(1 + z)^m$. Stąd $\|D\| = \frac{1}{2}$, co implikuje zbieżność wszystkich schematów opartych na bazach UBS.