1. Maska dla granicznych krzywych BS 3-go stopnia ma postać: $\mathbf{r} = \{r_{-1},\ r_0,\ r_1\} = \frac{1}{4}\{1,\ 2, 1\}$. Zbiór punktów kontrolnych na j-tej iteracji procesu subdivision oznaczamy przez $\mathbf{c^j} = (c_i^j)$. Wówczas

   (a) **faza podziału**:

   $$\overline{c}_{2_i}^j = c_i^{j-1}, \quad \overline{c}_{2_i+1}^j = \frac{c_i^{j-1} + c_{i+1}^{j-1}}{2}$$

   (b) **faza uśredniania**:

   $$c_i^j = \sum_{k=-1}^{1} r_k \overline{c}_{k+i}^j = \frac{1}{4}\overline{c}_{i-1}^j + \frac{1}{2}\overline{c}_i^j + \frac{1}{4}\overline{c}_{i+1}^j$$

   Rozwijając fazę uśredniania otrzymujemy:

   $$c_{2i+1}^j = \frac{1}{4}\overline{c}_{2i}^j + \frac{1}{2}\overline{c}_{2i+1}^j + \frac{1}{4}\overline{c}_{2i+2}^j = \frac{1}{4}c_i^{j-1} + \frac{1}{4}c_{i+1}^{j-1} + \frac{1}{4}c_i^{j-1} + \frac{1}{4}c_{i+1}^{j-1} = \frac{1}{2}\left(c_i^{j-1} + c_{i+1}^{j-1}\right)$$

   $$c_{2i}^j = \frac{1}{4}\overline{c}_{2i-1}^j + \frac{1}{2}\overline{c}_{2i}^j + \frac{1}{4}\overline{c}_{2i+1}^j = \frac{1}{8}c_{i-1}^{j-1} + \frac{1}{8}c_i^{j-1} + \frac{1}{2}c_i^{j-1} + \frac{1}{8}c_i^{j-1} + \frac{1}{8}c_{i+1}^{j-1} = \frac{1}{8}\left(c_{i-1}^{j-1} + 6c_i^{j-1} + c_{i+1}^{j-1}\right)$$

2. Finalne wzory z punktu 1. pozwalają zapisać proces subdivision pomiędzy fazą $j-1$-szą oraz j-tą w języku istotnego fragmentu macierzy subdivision S:

   $$\begin{bmatrix} c_{2i-1}^j \\ c_{2i}^j \\ c_{2i+1}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i-1}^{j-1} \\ c_i^{j-1} \\ c_{i+1}^{j-1} \end{bmatrix}$$

   Zapisując ten schemat w nieco rozszerzonej postaci otrzymujemy

   $$\begin{bmatrix} c_{2i-3}^j \\ c_{2i-2}^j \\ c_{2i-1}^j \\ c_{2i}^j \\ c_{2i+1}^j \\ c_{2i+2}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i-2}^{j-1} \\ c_{i-1}^{j-1} \\ c_i^{j-1} \\ c_{i+1}^{j-1} \\ c_{i+2}^{j-1} \\ c_{i+3}^{j-1} \end{bmatrix}$$

   Trzecia kolumna stanowi *pełną kolumnę* zawierającą zarówno współczynniki dla wyrazów parzystych jak i nieparzystych nowego wektora punktów kontrolnych (czytane naprzemiennie). Nazywamy ją *jądrem subdivision*.

3. Z dwufazowej konstrukcji procesu subdivision intuicyjnie wynika, iż wybierając konkretny punkt kontrolny ze zbioru startowego $\mathbf{c_0}$ możemy śledzić jego ścieżkę i próbować odpowiedzieć na pytanie do czego ta ścieżka jest zbieżna (chodzi nam tutaj o zbieżność punktową (!) a nie jednostajną całego zbioru $\mathbf{c_0}$). Dla uproszczenia oznaczeń pomińmy indeks dolny wybranego punktu i oznaczmy go przez c^0. Podobnie, przez c_-^0 oraz c_+^0 oznaczmy odpowiednio, punkt poprzedzający c^0 oraz występujący bezpośrednio po nim. Analogicznie przez c^∞, c_-^∞, c_+^∞ oznaczmy granice ścieżek tych punktów. W istocie nie wiemy w ogólności, czy te granice istnieją i to trzeba zbadać w każdym schemacie subdivision niezależnie. Jeżeli macierz subdivision jest stała w czasie całego procesu, to

   $$c := \begin{bmatrix} c_-^\infty \\ c^\infty \\ c_+^\infty \end{bmatrix} = \lim_{j\to\infty} (S)^j \begin{bmatrix} c_-^0 \\ c^0 \\ c_+^0 \end{bmatrix} =: \lim_{j\to\infty} (S)^j\, b$$

Wykonując analizę wartości własnych macierzy S otrzymujemy trzy wartości własne (uporządkowane malejąco): $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 < 1$, $\lambda_3 < 1$, oraz trzy wektory własne $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$, liniowo niezależne i stanowiące bazę w R^3. Zatem rozpatrując każdą kolumnę macierzy $c = \left[c_-^\infty \; c^\infty \; c_+^\infty\right]^T$ oraz macierzy $b = \left[c_-^0 \; c^0 \; c_+^0\right]^T$ odzielnie możemy te kolumny (oznaczmy je odpowiednio przez $c_x, \; c_y, \; c_z$ oraz $b_x, \; b_y, \; b_z$) wyrazić jako kombinacje liniowe wektorów $\mathbf{v_i}$. Zróbmy tak jedynie dla kolumn macierzy b:

$$b_x = a_1^x \mathbf{v_1} + a_2^x \mathbf{v_2} + a_3^x \mathbf{v_3}$$

i analogicznie

$$b_y = a_1^y \mathbf{v_1} + a_2^y \mathbf{v_2} + a_3^y \mathbf{v_3}, \quad b_z = a_1^z \mathbf{v_1} + a_2^z \mathbf{v_2} + a_3^z \mathbf{v_3}$$

Ponieważ $(S)^j \mathbf{v_i} = (\lambda_i)^j \mathbf{v_i}$, więc

$$c_x = a_1^x \lim_{j \to \infty} (\lambda_1)^j \, \mathbf{v_1} + a_2^x \lim_{j \to \infty} (\lambda_2)^j \, \mathbf{v_2} + a_3^x \lim_{j \to \infty} (\lambda_3)^j \, \mathbf{v_3}$$

i analogicznie dla c_y oraz c_z. Uwzględniając teraz, że $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 < 1$, $\lambda_3 < 1$ dostajemy:

$$c_x = a_1^x \mathbf{v_1}, \quad c_y = a_1^y \mathbf{v_1}, \quad c_z = a_1^z \mathbf{v_1}$$

a następnie korzystając z faktu, iż $\mathbf{v_1} = [1 \; 1 \; 1]^T$ dostajemy:

$$c_-^\infty = c_+^\infty = c^\infty = \mathbf{a_1} := (a_1^x, \; a_1^y, a_1^z).$$

Wyliczając współrzędne wektora $\mathbf{a_1}$ dostajemy $\mathbf{a_1} = \frac{1}{6}[1 \; 4 \; 1]$. Zatem ostatecznie

$$c^\infty = \frac{c_-^0 + 4c^0 + c_+^0}{6}.$$