

Modelowanie geometryczne

Krzywe parametryczne

Wojciech Kowalewski

fraktal@amu.edu.pl



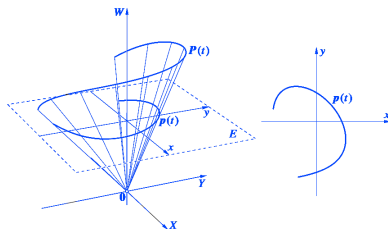
Wydział Matematyki i Informatyki UAM
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Semestr zimowy 2021/22

Krzywe parametryczne

- ▶ Klasyczne krzywe Beziera posiadają istotnie dobrą własność powłoki wypukłej swoich punktów kontrolnych
- ▶ Podstawowe wady tych krzywych to:
 - brak dokładnej reprezentacji *krzywych stożkowych* (poza parabolą) - ogólna konstrukcja krzywej stożkowej i jej przybliżona reprezentacja w postaci krzywej Hermit'a opisana jest w dodatkowym pliku (*krzywe stożkowe*)
 - niedobre własności *lokalności modelowania* - przesunięcie pojedynczego punktu kontrolnego powoduje zmianę kształtu niemal całej krzywej
 - potrzeba zmiany reprezentacji przy rzutowaniu perspektywicznym, które samo w sobie jest *funkcją wymierną*
- ▶ Krzywe wymierne Beziera rozwiązują w 100% pierwszy i trzeci z tych problemów oraz w pewnym stopniu również drugi.

- ▶ Zakładamy, że $P(t) = [X(t), Y(t), W(t)]$ (zastąpienie nazwy trzeciej współrzędnej literą W oraz użycie dużych liter jest celowe) oznacza krzywą w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Ponadto niech E oznacza płaszczyznę w przestrzeni \mathbb{R}^3 , której punkty mają $W = 1$.
- ▶ Niech $p(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ oznacza krzywą która jest obrazem krzywej $P(t)$ w rzucie środkowym (perspektywicznym) o środku w punkcie 0 na płaszczyznę E (Rys. 1).



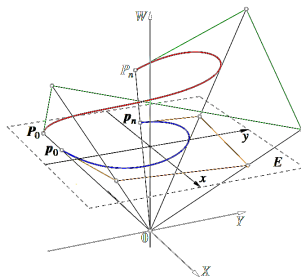
Rys. 1. Krzywa jednorodna i reprezentowana przez nią krzywa wymierna (źródło: [7], Rys. 2.1)

- ▶ W układzie współrzędnych, określonym w płaszczyźnie E przez przesunięcie osi X i Y o wektor $[0, 0, 1]^T$, współrzędne krzywej $p(t)$ są opisane przez funkcje $x(t) = X(t)/W(t)$ i $y(t) = Y(t)/W(t)$.

- ▶ Jeżeli funkcje $X(t)$, $Y(t)$ i $W(t)$ są wielomianami, to współrzędne krzywej $p(t)$ są funkcjami wymiernymi.
- ▶ Punkt $p = [x, y]^T$ dwuwymiarowej przestrzeni \mathbb{E}^2 , którą utożsamimy z płaszczyzną E , możemy opisać za pomocą dowolnego wektora $P = [X, Y, W]^T \in \mathbb{R}^3$, takiego że $x = X/W$, $y = Y/W$.
- ▶ Opis ten nie jest jednoznaczny - pomnożenie wszystkich liczb X , Y , W przez tę samą stałą różną od zera daje inną reprezentację tego samego punktu. Taka własność nazywa się *jednorodnością* i dlatego liczby X , Y , W nazywamy *współrzędnymi jednorodnymi* punktu p .
- ▶ Wektor $V = [X, Y, 0]^T$ nie reprezentuje żadnego punktu przestrzeni \mathbb{E}^2 . Taki wektor jest jednak równoległy do płaszczyzny E i dlatego możemy uznać, że reprezentuje kierunek w przestrzeni \mathbb{E}^2 , przy czym przez kierunek rozumiemy zbiór wektorów $\{av : a \in \mathbb{R}^1, a \neq 0\}$, dla ustalonego wektora $v \neq 0$ (z przestrzeni wektorów swobodnych przestrzeni \mathbb{E}^2).
- ▶ Taka reprezentacja kierunku jest również jednorodna, w związku z czym kierunki i punkty możemy traktować jednolicie.
- ▶ Krzywą P nazywamy *krzywą jednorodną*.
- ▶ Każda krzywa wymierna ma nieskończenie wiele reprezentujących ją krzywych jednorodnych postaci $a(t)P(t)$ ($a(t) \neq 0$).

- ▶ Przestrzeń \mathbb{R}^3 , w której rozpatrujemy krzywe jednorodne nazywamy *przestrzenią współrzędnych jednorodnych* uzupełnionej o kierunki przestrzeni \mathbb{E}^2 .
- ▶ Dowolna prosta w przestrzeni współrzędnych jednorodnych przechodząca przez punkt 0 jest jednoznacznie określona przez podanie dowolnego innego punktu, a zatem stanowi jeszcze jedną reprezentację punktu lub kierunku w \mathbb{E}^2 .
- ▶ Prostą w \mathbb{E}^2 możemy reprezentować za pomocą płaszczyzny w \mathbb{R}^3 zawierającej punkt 0 (uwaga: płaszczyzna $W = 0$ reprezentuje prostą niewłaściwą, której wszystkie punkty to kierunki).
- ▶ Analogiczna reprezentacja krzywej wymiernej jest powierzchnią stożkową w przestrzeni współrzędnych jednorodnych.
- ▶ Podobną konstrukcję możemy wykonać w przestrzeni o wymiarze wyższym niż 2, tzn. np. rozpatrywać krzywe jednorodne w \mathbb{R}^3 , reprezentowane przez współrzędne jednorodne w przestrzeni \mathbb{R}^4

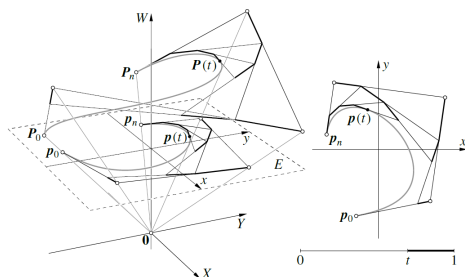
- Rozpatrzmy klasyczną krzywą Béziera $P(t)$ w przestrzeni \mathbb{R}^3 , generowaną przez punkty $(P_i)_0^n$ i zinterpretujmy ją jako jednorodną reprezentację krzywej $p(t)$ na płaszczyźnie E . Zakładając wszędzie dodatniość trzeciej współrzędnej krzywej $P(t)$ obrazem łamanej kontrolnej tej krzywej w rzucie środkowym jest łamana o wierzchołkach $(p_i)_1^n$ postaci $p_i = P_i/W_i$ (Rys. 2)



Rys. 2. Wymierna krzywa Béziera i jej jednorodna reprezentacja (źródło: [7], Rys. 2.2)

Jednorodne i wymierne krzywe Béziera

- ▶ Algorytm de Casteljau umożliwia wyznaczenie dla danego t punktu $P(t)$. Rzut tego punktu na płaszczyznę E jest odpowiednim punktem krzywej wymiernej $p(t)$.
- ▶ Dokonując rzutowania wszystkich kroków algorytmu de Casteljau, obserwujemy obcinanie narożników łamanej o wierzchołkach p_i , prowadzące do wyznaczenia punktu $p(t)$ (Rys. 3).



Rys. 3. Algorytm de Casteljau dla krzywej jednorodnej i algorytm wymierny (źródło: [7], Rys. 2.3)

- ▶ Punkty p_i nazwiemy *punktami kontrolnymi krzywej wymiernej*, a współczynniki $w_i = W_i$ — wagami.

- ▶ Obrazy punktów otrzymanych w kolejnych krokach algorytmu de Casteljau dla krzywej jednorodnej możemy wyznaczyć, wykonując algorytm

```
{  $p_i^{(0)} = p_i, w_i^{(0)} = w_i$  dla  $i = 0, \dots, n.$  }  
for  $j := 1$  to  $n$  do  
  for  $i := 0$  to  $n - j$  do begin  
     $w_i^{(j)} := (1 - t)w_i^{(j-1)} + tw_{i+1}^{(j-1)}$ ;  
     $s_i^{(j)} := tw_{i+1}^{(j-1)}/w_i^{(j)}$ ;  
     $p_i^{(j)} := (1 - s_i^{(j)})p_i^{(j-1)} + s_i^{(j)}p_{i+1}^{(j-1)}$   
  end;  
{  $p(t) = p_0^{(n)}$ . }
```

- ▶ Podana procedura realizuje wymierny algorytm de Casteljau. Jeśli w ciągu wag występuje zero lub liczby o przeciwnych znakach, to wymierny algorytm de Casteljau może się załamać z powodu dzielenia przez zero.
- ▶ Bezpieczniejszy pod tym względem i szybszy sposób wyznaczenia punktu krzywej wymiernej, jeśli mamy dane punkty kontrolne i wagi, polega na wyznaczeniu punktów kontrolnych krzywej jednorodnej, obliczeniu punktu na tej krzywej i znalezieniu odpowiadającego mu punktu w przestrzeni wyjściowej.
- ▶ Punkt $p(t)$ krzywej, znaleziony za pomocą wymiernego algorytmu de Casteljau, wyraża się wzorem

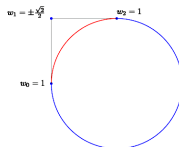
$$p(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i p_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}$$

Własności wymiernych krzywych Bezierra

- ▶ Jeżeli wszystkie wagi są równe 1, to krzywa staje się zwykłą krzywą Bezierra.
- ▶ Pomnożenie wszystkich wag przez tę samą stałą (różną od zera) nie zmienia kształtu krzywej.
- ▶ Jeżeli wszystkie wagi mają taki sam znak, to krzywa sparametryzowana na $[0,1]$ zawiera się w powłoce wypukłej swoich punktów kontrolnych.
- ▶ Krzywa interpoluje punkty skrajne (o ile ich wagi są niezerowe).
- ▶ Jeżeli T jest przekształceniem afinicznym, to punkty będące obrazem punktów kontrolnych wymiernej krzywej Bezierra w tym przekształceniu są punktami kontrolnymi obrazu tej krzywej w tym przekształceniu
- ▶ Rzut perspektywiczny krzywej wymiernej jest zawsze krzywą wymierną
- ▶ Podobnie jak w przypadku wielomianowych krzywych Bézierra, pochodna rzędu k w punktach skrajnych zależy tylko od punktów k najbliższych punktów kontrolnych i (w tym przypadku) ich wag, tzn. dla $t = 0$ od punktów p_0, \dots, p_k i wag w_0, \dots, w_k .
- ▶ Wszystkie krzywe stożkowe dają się wyreprezentować w postaci wymiernej krzywej Bezierra

Reprezentacja krzywych stożkowych

- ▶ Rozpatrujemy trzy niewspółliniowe punkty kontrolne krzywej: p_0, p_1, p_2 oraz ustalamy wagi punktów skrajnych: $w_0 = w_2 = 1$.
- ▶ Wtedy wartość wagi w_1 określa rodzaj krzywej:
 - jeżeli $w_1 > 1$, to krzywa reprezentuje łuk hiperboli
 - jeżeli $w_1 = 1$, to krzywa reprezentuje łuk paraboli
 - jeżeli $0 < w_1 < 1$, to krzywa reprezentuje krótszy łuk elipsy (dla $w_1 = \sqrt{2}/2$ jest to krótszy łuk okręgu)
 - jeżeli $w_1 = 0$, to krzywa reprezentuje sparametryzowany odcinek pomiędzy p_0 i p_2
 - jeżeli $-1 < w_1 < 0$, to krzywa reprezentuje dłuższy łuk elipsy (dla $w_1 = -\sqrt{2}/2$ jest to dłuższy łuk okręgu)
 - jeżeli $w_1 = -1$, to krzywa reprezentuje dwa łuki paraboli
 - jeżeli $w_1 < -1$, to krzywa reprezentuje trzy łuki hiperboli
- ▶ Rysunek pokazuje konstrukcję krótszego i dłuższego łuku okręgu

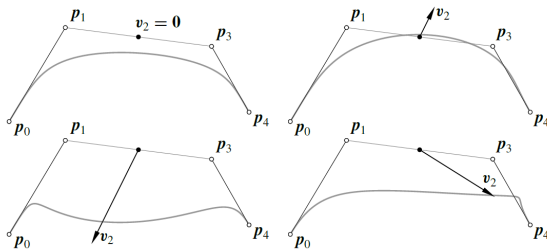


Pewne rozszerzenie wymiernych krzywych Béziera

- ▶ Jeżeli waga jakiegoś punktu kontrolnego p_i jest równa zero, to punkt taki nie ma wpływu na kształt krzywej. W takiej sytuacji można punkt rozpatrywać jako punkt niewłaściwy, czyli kierunek reprezentowany przez wektor (ozn. poniżej przez literę v_i). Daje to ogólną postać wymiernej krzywej Beziera w postaci formuły

$$p(t) = \frac{\sum_{i; w_i \neq 0} w_i p_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} + \frac{\sum_{i; w_i = 0} v_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}$$

- ▶ Umożliwia to dodatkową modyfikację krzywej



- ▶ W przypadku zwykłych krzywych wielomianowych reparametryzacja, która ma zachować stopień krzywej musi być oczywiście realizowana przez wielomian pierwszego stopnia. Jednak dla krzywej wymiernej możemy wykonać reparametryzację funkcją homograficzną:

$$t = \frac{\rho u}{(1-u) + \rho u},$$

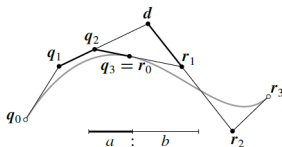
co daje krzywą postaci

$$\rho(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \rho^i w_i p_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n \rho^i w_i B_i^n(u)}$$

- ▶ Oznacza to, że dla danego ciągu punktów kontrolnych ciągu wag w_0, w_1, \dots, w_n i $\rho^0 w_0, \rho^1 w_1, \dots, \rho^n w_n$ odpowiadają dwóm różnym parametryzaczom tej samej krzywej.
- ▶ Jeżeli $w_0 w_n > 0$, to dzieląc wszystkie wagi przez w_0 , a następnie wagi poza pierwszą przez $(\sqrt[n]{w_n})^i$, otrzymujemy krzywą w tzw. *postaci standardowej*, tzn. z $w_0 = w_n = 1$.

Łączenie (zwykłych) krzywych Beziea

- ▶ Rozpatrzmy przypadek konstrukcji krzywej sklejanej, zbudowanej z kawałków będących krzywymi Beziea 3-go stopnia. Załóżmy, że rzywe $q(t)$ (punkty kontrolne $(q_i)_0^3$) oraz $r(t)$ (punkty kontrolne $(r_i)_0^3$) są określone na przedziałach parametrów $[u_{i-1}, u_i]$ oraz $[u_i, u_{i+1}]$, których długości wynoszą, odpowiednio, a i b (wartości parametrów nazywamy *węzłami* krzywej). Pokazuje to poniższy rysunek.



Rys. 4. Dwie kubiczne krzywe Béziera połączone z ciągłością C^2 (źródło: [7], Rys. 5.2)

- ▶ Załóżmy, że krzywe są połączone z warunkiem C^2 . Taki sposób połączenia pozwala spojrzeć na punkt łączenia jak na punkt krzywej obliczony algorytmem de Casteljau na przedziale $[u_{i-1}, u_{i+1}]$, w odległości a od parametru u_{i-1} . Zatem wtedy zachodzą warunki: $q_3 = r_0$, $b(q_3 - q_2) = a(r_1 - r_0)$, $q_2 + \frac{b}{a}(q_2 - q_1) = r_1 + \frac{a}{b}(r_2 - r_1) = d$.
- ▶ Parę gładko połączonych krzywych Béziera trzeciego stopnia możemy zatem skonstruować wychodząc od łamanej o wierzchołkach q_0, q_1, d, r_2, r_3 .

Łączenie (zwykłych) krzywych Bezieira

► Ogólny algorytm łączenia

- Wybierz układ węzłów (rosnący ciąg liczb) u_3, \dots, u_{m+3} . Wyznaczają one odcinki, na których krzywa będzie opisana łukami wielomianowymi. Oblicz długości tych odcinków, $h_i = u_{i+1} - u_i$ dla $i = 3, \dots, m+2$.
- Wybierz ciąg punktów kontrolnych d_0, \dots, d_{m+2} , które będą wierzchołkami łamanej kontrolnej krzywej B-sklejanej.
- Wyznacz punkty

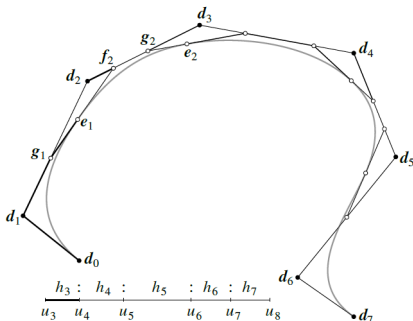
$$\begin{aligned}f_1 &= d_1, \\g_1 &= \frac{h_4}{h_3+h_4}d_1 + \frac{h_3}{h_3+h_4}d_2, \\ \left\{ \begin{aligned}f_i &= \frac{h_{i+2}+h_{i+3}}{h_{i+1}+h_{i+2}+h_{i+3}}d_i + \frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_{i+2}+h_{i+3}}d_{i+1}, \\g_i &= \frac{h_{i+3}}{h_{i+1}+h_{i+2}+h_{i+3}}d_i + \frac{h_{i+1}+h_{i+2}}{h_{i+1}+h_{i+2}+h_{i+3}}d_{i+1}\end{aligned} \right. & \text{dla } i = 2, \dots, m-1, \\f_m &= \frac{h_{m+2}}{h_{m+1}+h_{m+2}}d_m + \frac{h_{m+1}}{h_{m+1}+h_{m+2}}d_{m+1}, \\g_m &= d_{m+1}.\end{aligned}$$

- Wyznacz punkty

$$\begin{aligned}e_0 &= d_0, \\e_i &= \frac{h_{i+3}}{h_{i+2}+h_{i+3}}g_i + \frac{h_{i+2}}{h_{i+2}+h_{i+3}}f_{i+1} \quad \text{dla } i = 1, \dots, m-1, \\e_m &= d_{m+2}.\end{aligned}$$

Łączenie (zwykłych) krzywych Béziera

- Dla $i = 0, \dots, m-1$ punkty $e_i, f_{i+1}, g_{i+1}, e_{i+1}$ są punktami kontrolnymi krzywych Béziera trzeciego stopnia, połączonych z ciągłością C^2 . Pokazuje to poniższy rysunek.

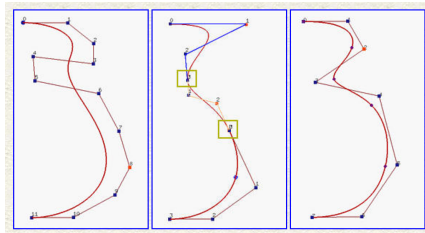


Rys. 5. Wyznaczanie krzywych Béziera opisujących fragmenty kubicznej krzywej B-sklejanej (źródło: [7], Rys. 5.3)

- ▶ Dotychczas wprowadzone krzywe posiadają nadal kilka istotnych niedogodności [7]:
 - Nie można wprowadzać lokalnych zmian. Zmiana położenia punktu kontrolnego powoduje zmianę kształtu całej krzywej.
 - Obiekty o skomplikowanym kształcie trzeba modelować przez krzywe wysokiego stopnia lub przez sklejanie ich z wielu krzywych niższego stopnia. Powoduje to, że manipulowanie punktami kontrolnymi staje się wtedy niewygodne, między innymi dlatego, że dla modyfikacji krzywej należy przesuwać punkty kontrolne na duże odległości (maksyma wielomianów Bernsteina w przedziale $[0, 1]$ maleją ze wzrostem stopnia).
 - Ponadto obliczenia dla krzywych Béziera wysokiego stopnia są drogie i kłopotliwe w realizacji komputerowej (np. współczynniki dwumianowe Newtona odpowiednio dla $n > 17$ i $n > 33$ przekraczają zakresy liczb całkowitych 16- i 32-bitowych).
 - Zadanie interpolacji Lagrange'a łatwo jest rozwiązać, ale trudno dobrać punkty i węzły tak, aby uniknąć powstania *zafalowań* wielomianowej krzywej interpolacyjnej wysokiego stopnia między danymi punktami. W praktyce wyklucza to używanie takich krzywych w projektowaniu, gdy zachodzi konieczność interpolacji (np. punktów otrzymanych w wyniku pomiarów).
- ▶ Pokazany na poprzednich slajdach przykład łączenia krzywych Beziera jawnie wykorzystuje ciąg wartości węzłów i stanowi dobrą intuicję do ogólnej konstrukcji *krzywych B-spline*, wykorzystujących węzły do kontroli nad *lokalnością* modelowania

Krzywe B-spline

- ▶ Rozważmy projekt profilu wazy (rys. poniżej). Lewy obrazek pokazuje krzywą, której stopień wynosi 11, a pomimo tego mamy duże trudności w odpowiednim wygięciu profilu szyjki wazy. Można oczywiście podwyższyć stopień krzywej, ale to prowadzi do wzrostu obliczeń i struktury danych. Można też wyprofilować szyjkę rozcinając krzywą Beziera na dwie i tworząc kolejny węzeł interpolacyjny, w którym krzywe łączą się z zadanim warunkiem gładkości (środkowy obrazek). To jednak ponownie powoduje rozbudowanie struktury danych.
- ▶ Krzywe B-spline pozwalają na skonstruowanie pojedynczej struktury łączącej w sobie wiele kawałków połączonych z zadaną dokładnością (prawy obrazek). Jest to możliwe poprzez podział przestrzeni parametrów na segmenty odpowiadające poszczególnym segmentom krzywej. Oczywiście moglibyśmy podzielić samą krzywą Beziera, ale jest to znacznie droższe obliczeniowo.
- ▶ Widać zatem, że podział przestrzeni parametrów rozwiązuje zarówno problem wysokiego stopnia krzywej dla skomplikowanych kształtów, jak i problem lokalności modelowania. Jest to zatem istotne narzędzie.



Rys. 6. (źródło: [<https://pages.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/spline/B-spline>])

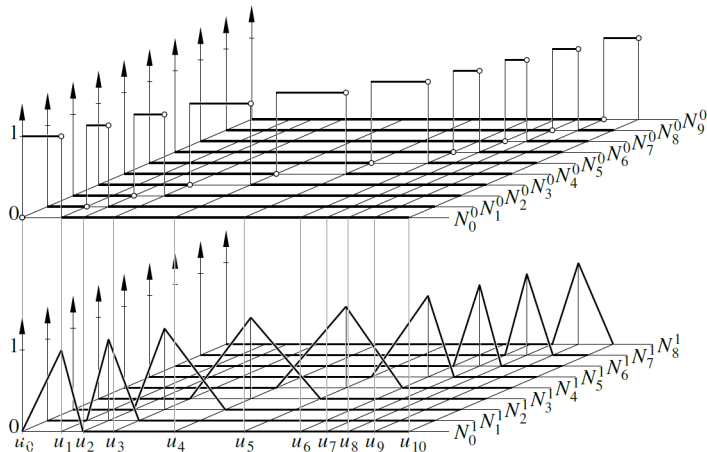
- ▶ Zamiast kanonicznego zakresu $[0, 1]$ parametrów, używamy tutaj tzw. *wektora węzłów* opisującego przebieg zmienności parametru dla krzywej B-spline: $U = [u_0, u_1, \dots, u_m]$, gdzie $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq u_m \leq 1$. (jak widać dopuszczamy równość niektórych węzłów!).
- ▶ Podobnie jak w przypadku krzywych Beziera, również w przypadku krzywych B-spline wagami dla punktów kontrolnych są funkcje bazowe. Bazy B-Spline posiadają dwie ważne własności, których nie posiadały wielomiany Bernsteina.
 - ich dziedzina jest podzielona przez wektor węzłów
 - są one niezerowe tylko na pewnych obszarach dziedziny. W tym znaczeniu są *lokalne*.
- ▶ Jednostronnie domknięty przedział $[u_i, u_{i+1})$ będziemy nazywali *powłoką i-tego węzła*.
- ▶ Jeżeli i -ty węzeł występuje k razy, tzn. $u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+k-1}$, to nazywamy go *węzłem wielokrotnym z krotnością k* (ozn. $u_i(k)$). Węzły z krotnością 1 nazywamy *węzłami prostymi*.
- ▶ Jeżeli węzły w wektorze węzłów są *równoodległe*, tzn. $u_{i+1} - u_i = \text{const}$ dla każdego $i = 0, \dots, m-1$, to wektor węzłów nazywamy *jednostajnym (uniform)*, a w przeciwnym przypadku *niejednostajnym (non-uniform)*.
- ▶ Dziedziną wszystkich funkcji bazowych B-spline jest przedział $[u_0, u_m]$.

- ▶ Podobnie jak w przypadku baz Bernsteina, funkcje bazowe B-spline zależą od ich stopnia:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

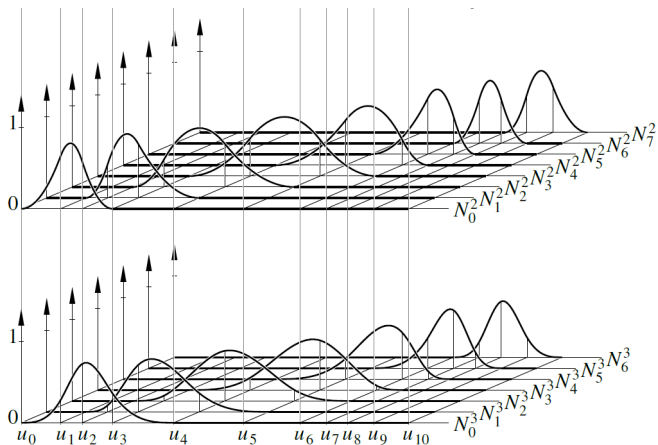
- ▶ Powyższą formułę nazywamy *formułą rekursywną Coxa-de Boora*. Jeżeli stopień $p = 0$, wszystkie bazy są funkcjami prostymi takimi, że $N_{i,0}(u) \geq 0$ na powłoce i -tego węzła, tzn. na przedziale $[u_i, u_{i+1})$. Na kolejnych rysunkach są przedstawione wykresy funkcji bazowych różnych stopni dla przykładowych ciągów, odpowiednio z wszystkimi węzłami pojedynczymi i z węzłami o większej krotności.

Funkcje bazowe krzywych B-spline



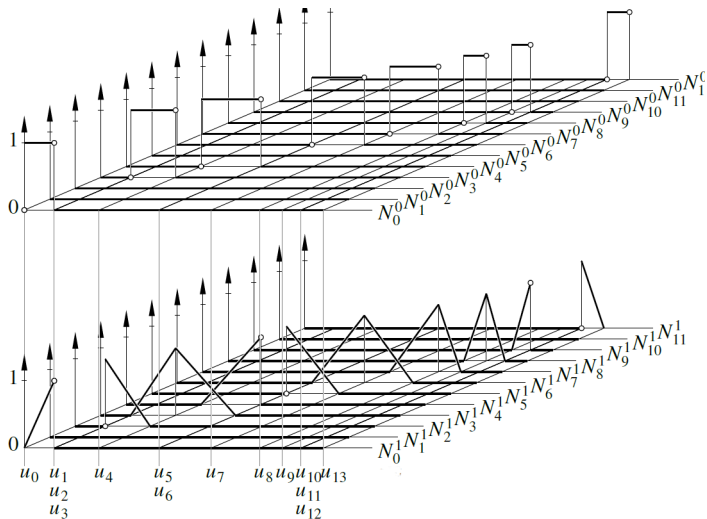
Rys. 7. Funkcje bazowe B-spline stopnia 0,1 dla ciągu węzłów pojedynczych (źródło: [7], rys. 5.7)

Funkcje bazowe krzywych B-spline



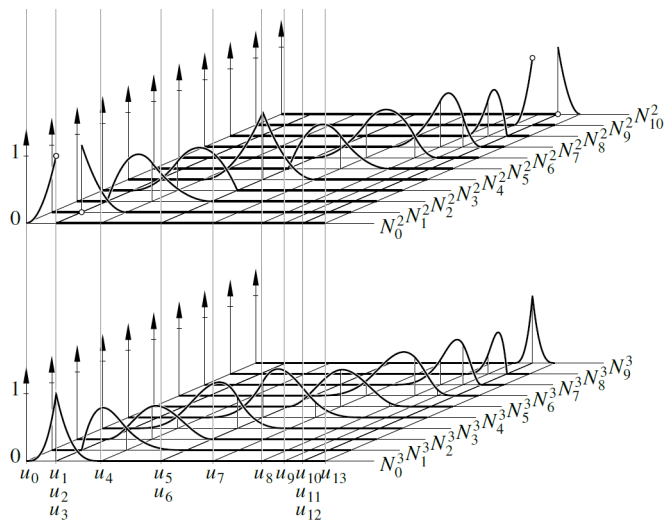
Rys. 8. Funkcje bazowe B-spline stopnia 2,3 dla ciągu węzłów pojedynczych (źródło: [7], rys. 5.7)

Funkcje bazowe krzywych B-spline



Rys. 9. Funkcje bazowe B-spline stopnia 0,1 z węzłami o krotnościach większych niż 1 (źródło: [7], rys. 5.8)

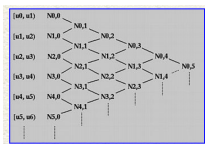
Funkcje bazowe krzywych B-spline



Rys. 10. Funkcje bazowe B-spline stopnia 2,3 z węzłami o krotnościach większych niż 1 (źródło: [7], rys. 5.8)

Funkcje bazowe krzywych B-spline

- ▶ Wygodny diagram pozwalający zobaczyć schemat tworzenia baz wyższego stopnia wygląda następująco (źródła obrazów: [https://pages.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/spline/B-spline])

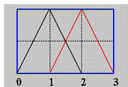


- ▶ Policzmy bazy pierwszego stopnia dla $m = 3$. Zgodnie z definicją otrzymujemy

$$N_{0,1}(u) = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} N_{0,0}(u) + \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} N_{1,0}(u)$$

$$N_{0,1}(u) = u N_{0,0}(u) + (2 - u) N_{1,0}(u)$$

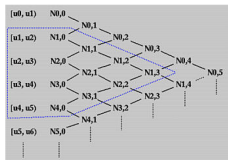
Podobnie $N_{1,1}(u) = u - 1$ dla $u \in [1, 2)$ oraz $N_{1,1}(u) = 3 - u$ dla $u \in [2, 3)$. Wykresy (czarny i czerwony) tych funkcji pokazują poniższy rysunek:



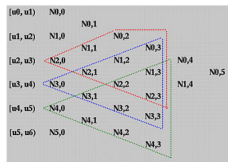
- ▶ W szczególności wpływ baz stopnia zero na bazy stopnia 1 zależy do podprzedziału wektora węzłów. Przykładowo na $N_{0,1}$ wpływa $N_{0,0}$ na przedziale $[0, 1]$ oraz $N_{1,0}$ na przedziale $[1, 2]$, co powoduje, iż $N_{0,1}$ jest niezerowa na $[0, 2]$.

Funkcje bazowe krzywych B-spline

- ▶ W ogólności dla znalezienia obszaru niezerowości bazy $N_{i,p}$ możemy się cofnąć po odpowiednim trójkącie diagramu baz do pierwszej kolumny. (źródła obrazów: [https://pages.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/spline/B-spline])



- ▶ Wynika z niego, że $N_{i,p}(u)$ jest niezerowa na przedziale $[u_i, u_{i+p+1})$. Równoważnie $N_{i,p}(u)$ niezerowa na $p+1$ powłokach $[u_i, u_{i+1})$, $[u_{i+1}, u_{i+2})$, \dots , $[u_{i+p}, u_{i+p+1})$.
- ▶ Z definicji rekurencyjnej funkcji bazowych i powyższych rozważań wynika natychmiast, że funkcja bazowa wyższego stopnia jest kombinacją liniową funkcji bazowych niższego stopnia, a współczynniki tej kombinacji są liczbami dodatnimi, mniejszymi od 1.
- ▶ Można postawić odwrotne pytanie: które funkcje bazowe używają w swojej dziedzinie danej powłoki? Ponownie z pomocą przychodzi diagram funkcji bazowych, tym razem tworząc trójkąty z wierzchołkiem w danej powłoce i krawędziami w kierunkach NE oraz SE.

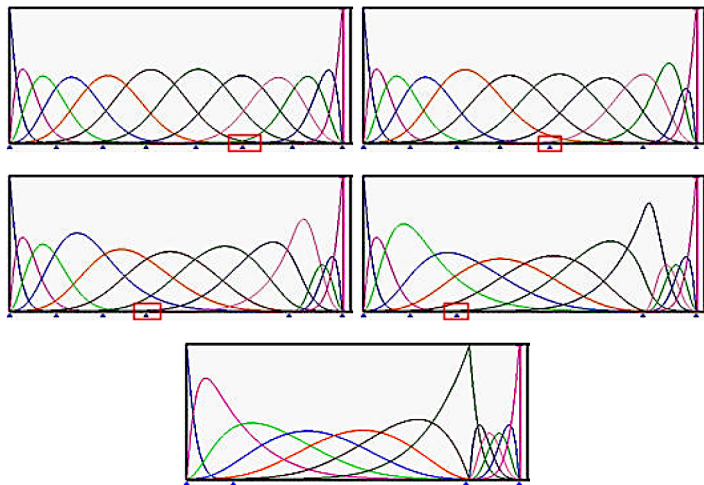


- ▶ $N_{i,p}(u)$ jest wielomianem zmiennej u , stopnia p .
- ▶ Nieujemność - dla wszystkich i, p oraz u , baza $N_{i,p}(u)$ jest nieujemna
- ▶ Lokalny nośnik - $N_{i,p}(u)$ jest niezerowym wielomianem na $[u_i, u_{i+p+1})$
- ▶ Na przedziale $[u_i, u_{i+1})$, co najwyżej $p + 1$ baz stopnia p jest niezerowych: $N_{i-p,p}(u), N_{i-p+1,p}(u), N_{i-p+2,p}(u), \dots, N_{i,p}(u)$
- ▶ Podział jedyńki - suma wszystkich niezerowych funkcji bazowych na przedziale $[u_i, u_{i+1})$ równa się 1: poprzednia własność stanowi, że $N_{i-p,p}(u), N_{i-p+1,p}(u), N_{i-p+2,p}(u), \dots, N_{i,p}(u)$ są niezerowe na $[u_i, u_{i+1})$. Daje to wniosek, że suma tych wszystkich $p + 1$ funkcji bazowych wynosi 1.
- ▶ Jeżeli liczba węzłów wynosi $m + 1$, stopień funkcji bazowej wynosi p oraz liczba funkcji bazowych p -tego stopnia wynosi $n + 1$, to $m = n + p + 1$: niech $N_{n,p}(u)$ będzie ostatnią funkcją bazową stopnia p . Jest ona niezerowa na przedziale $[u_n, u_{n+p+1})$. Ponieważ jest to ostatnia funkcja bazowa u_{n+p+1} musi być ostatnim węzłem u_m . Zatem mamy $u_{n+p+1} = u_m$. Zatem ustalając m oraz p , dostajemy $n = m - p - 1$.
- ▶ Baza $N_{i,p}(u)$ jest krzywą złożoną z wielomianów stopnia p , połączonych w węzłach wewnętrznych przedziału $[u_i, u_{i+p+1})$
- ▶ W węźle krotności k , baza $N_{i,p}(u)$ ma ciągłość rzędu C^{p-k} . Zatem wzrost krotności powoduje zmniejszenie rzędu ciągłości, a wzrost stopnia powoduje zwiększenie poziomu ciągłości.

Wpływ węzłów wielokrotnych na funkcje bazowe

- ▶ Węzeł krotności k zmniejsza dziedzinę niezerowości co najwyżej $k - 1$ funkcji bazowych
- ▶ Na pierwszym rysunku (kolejny slajd) pokazano funkcje bazowe stopnia 5, które w węzłach skrajnych u_0 oraz u_7 mają krotność 6, natomiast w pozostałych węzłach krotność 1.
- ▶ Na drugim rysunku połączono węzły u_5 oraz u_6 zwiększając krotność węzła u_5 do 2. Jak widać spowodowało to zmniejszenie dziedziny niezerowości granatowej funkcji bazowej, która poprzednio wynosiła $[u_5, u_7]$, teraz wynosi $[u_6, u_7]$.
- ▶ Jednocześnie zielona funkcja bazowa 'wyostrzyła' się nieco w okolicy u_6 .
- ▶ Kolejne rysunki pokazują łączenie z u_6 kolejno węzłów u_4, u_3, u_2 pogłębiając opisaną tendencję - węzeł u_6 ma na ostatnim rysunku krotność 5.
- ▶ Kolejne funkcje mają dziedzinę niezerowości ograniczoną do $[u_6, u_7]$, a kolejna funkcja poprzedzająca tą, która utraciła część nośnika jest coraz 'ostrzejsza' w okolicy u_6 .
- ▶ Na ostatnim rysunku ostatnia funkcja, która nie zmniejszyła swojego nośnika ma w węzle u_6 ciągłość C^0 , tzn. przestaje być nawet gładka

Wpływ węzłów wielokrotnych na funkcje bazowe



Rys. 11. (źródło: [<https://pages.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/spline/B-spline/>])