

Rozdział 1

Podstawy teoretyczne dotyczące fraktali

1.1 Definicja fraktala i wymiaru fraktalnego

1.1.1 Pewna intuicja

Rozpatrzmy pewien D -wymiarowy obiekt geometryczny. Niech r oznacza skalę podziału obiektu na N równych części.

- Dla $D = 1$ jako przykład weźmy odcinek o długości 1. Wówczas $r = \frac{1}{N} \Rightarrow 1 = r^1 N$.
- Dla $D = 2$ jako przykład weźmy kwadrat o boku długości 1. Wówczas $r^2 = \frac{1}{N} \Rightarrow 1 = r^2 N$.
- Dla $D = 3$ jako przykład weźmy sześcian o boku długości 1. Wówczas $r^3 = \frac{1}{N} \Rightarrow 1 = r^3 N$.

W ogólnym przypadku dla wymiaru równego D prawdziwa jest zależność: $r^D = \frac{1}{N} \Rightarrow 1 = r^D N$. Stąd $D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}}$.

1.1.2 Wymiar fraktalny

Rozpatrzmy przestrzeń metryczną zupełną (X, d) . Niech $H(X)$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zwartych tej przestrzeni oraz niech $A \in H(X)$. Dla każdego punktu $x \in A$ utwórzmy kulę domkniętą o promieniu $\varepsilon > 0$ oraz środkiem w punkcie x , ozn. $B(x, \varepsilon)$.

Ponieważ zbiór A jest zbiorem zwartym, więc otrzymane pokrycie zbioru A posiada podpokrycie skończone. Niech N oznacza ilość elementów tego podpokrycia. Ze skończoności podpokrycia wynika istnienie wielkości:

$$N(A, \varepsilon) = \min_{n \in \mathbb{N}} \{n : A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon), x_i \in X\}$$

Definicja 1 ([2]). *Jeżeli dla zbioru $A \in H(X)$ istnieje granica*

$$D_F(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

to nazywamy ją wymiarem fraktalnym zbioru A .

Przykłady obliczania wymiaru fraktalnego Weźmy przestrzeń (\mathbb{R}^2, d_E) , gdzie d_E jest metryką euklidesową.

1. Punkt

Niech zbiór $A = \{a\}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Wówczas $\bigwedge_{\varepsilon > 0} N(A, \varepsilon) = 1$. Zatem $D_F(A) = 0$.

2. Przedział

Niech zbiór $A = [0, 1]$.

Wtedy $\bigwedge_{\varepsilon > 0} N(A, \varepsilon) = -[-\frac{1}{\varepsilon}]$, przy czym $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a . Ponieważ A jest odcinkiem na przedziale $[0, 1]$, więc przy pokryciu go kulami o promieniu ε otrzymujemy nierówność:

$$1 \leq N(A, \varepsilon)\varepsilon \Rightarrow N(A, \varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Możemy oszacować wymiar fraktalny korzystając z zależności:

$$1 = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\ln -[-\frac{1}{\varepsilon}]}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon} + 1}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 1 + \frac{1}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow 1.$$

Zatem $D_F(A) = 1$.

Twierdzenie 1. Niech $A \in H(X)$, $\varepsilon_n = cr^n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < r < 1$, $c > 0$. Wtedy zachodzą następujące implikacje:

1. Jeżeli $D_F(A)$ istnieje, to

$$D_F(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}}.$$

2. Jeżeli istnieje

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}},$$

to $D_F(A)$ istnieje oraz $D_F(A) = D$.

Przykłady obliczania wymiaru fraktalnego dla zbiorów niespójnych

1. Zbiór Cantora

Niech C oznacza trójkowy zbiór Cantora. Przyjmując oznaczenia z Twierdzenia 1 dla zbioru Cantora $c = 1$, $r = \frac{1}{3}$.

Dla kolejnych $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy ciąg (ε_n) oraz ciąg wartości $N(C, \varepsilon_n)$:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}, N(C, \varepsilon_1) = 2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{3^2}, N(C, \varepsilon_2) = 2^2$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{3^3}, N(C, \varepsilon_3) = 2^3$$

⋮

$$\varepsilon_n = \frac{1}{3^n}, N(C, \varepsilon_n) = 2^n.$$

Zatem z Definicji 1 wymiaru fraktalnego otrzymujemy:

$$D_F(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Ponieważ zbiór Cantora jest absolutnie niespójny, więc jego wymiar topologiczny jest równy 0. Zatem wymiar fraktalny zbioru Cantora jest większy od wymiaru topologicznego tego zbioru.

2. Dywan Sierpińskiego

Niech zbiór A oznacza trójkątny dywan Sierpińskiego. Ponieważ każdy podział trójkąta zmniejsza ε o połowę, zatem otrzymujemy ciąg $\varepsilon_n = (\frac{1}{2})^n \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz ciąg $N(A, \varepsilon_n) = 3^n$.

Korzystając dalej z Definicji 1 otrzymujemy:

$$D_F(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^n}{\ln \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 3}{(n+1) \ln \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3}}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585.$$

Wymiar topologiczny Dywanu Sierpińskiego wynosi 1, bo zawiera on odcinki, ale nie zawiera żadnego pola. Stąd ponownie wymiar fraktalny jest większy od wymiaru topologicznego zbioru.

1.2 Miara i wymiar Hausdorffa

Do zdefiniowania miary oraz wymiaru Hausdorffa konieczne jest wprowadzenie kilku pojęć z teorii miary i ich własności.

Definicja 2. Funkcję zbioru μ^* określoną na wszystkich podzbiorach zbioru Ω , która spełnia warunki:

1. $\forall A \subset \Omega \mu^*(A) \in [0, \infty]$
2. $\mu^*(\emptyset) = 0$
3. jest monotoniczna, czyli spełnia warunek:

$$A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

4. ma własność przeliczalnej subaddytywności, tzn.:

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$$

nazywamy miarą zewnętrzną.

Definicja 3. Mówimy, że zbiór A jest μ^* -mierzalny względem miary μ^* , gdy:

$$\bigwedge_E \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A' \cap E) = \mu^*(E)$$

Twierdzenie 2. Jeśli μ^* jest miarą zewnętrzną, to klasa $M(\mu^*)$ zbiorów μ^* -mierzalnych jest σ -ciałem, a μ^* obcięte do $M(\mu^*)$ jest miarą.

Definicja 4. Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną w klasie wszystkich podzbiorów \mathbb{R}^K . Mówimy, że μ^* spełnia warunek Caratheodory'ego, jeżeli

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

dla wszystkich rozłącznych podzbiorów $A, B \subset \Omega$, tzn. spełniających warunek: $d(A, B) > 0$, gdzie $d(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}$.

Twierdzenie 3. Niech μ jest miarą zewnętrzną na przestrzeni \mathbb{R}^k . Jeżeli μ^* spełnia warunek Caratheodory'ego, to σ -ciało \mathbb{R}^k podzbiorów borelowskich w \mathbb{R}^k zawiera się w $M(\mu^*)$. Stąd każdy zbiór borelowski jest μ^* -mierzalny.

Definicja 5. Niech $A \in \mathbb{R}^k, m, \varepsilon > 0$. Definiujemy funkcję

$$h_{m,\varepsilon}(A) = \inf c_m \Sigma_n (\text{diam}(B_n))^m, \quad c_m > 0,$$

przy czym infimum rozciąga się na przeliczalne pokrycia zbioru A zbiorami B_n takie, że $\text{diam}(B_n) < \varepsilon$.

Lemat 1. $h_{m,\varepsilon}(A)$ jest nierosnącą funkcją zmiennej ε .

Dowód. Niech $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, oraz niech $(B_n^1), (B_n^2)$ będą pokryciami odpowiadającymi $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Wówczas prawdziwe są nierówności: $\bigwedge_n \text{diam}(B_n^1) < \varepsilon_1$ oraz $\text{diam}(B_n^2) < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

Ponieważ pokrycia (B_n^2) są brane pod uwagę także w pierwszym przypadku, więc infimum rozciąga się na szerszą klasę zbiorów, stąd wartość infimum może być mniejsza. Zatem $h_{m,\varepsilon_1}(A) \leq h_{m,\varepsilon_2}(A)$. \square

Definicja 6. Weźmy $A \in \mathbb{R}^k, m > 0$.

Funkcję

$$h_m(A) = \sup_{\varepsilon > 0} h_{m,\varepsilon}(A)$$

nazywamy m -wymiarową miarą zewnętrzną Hausdorffa zbioru A . Z Lematu 1 wynika, że

$$h_m(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{m,\varepsilon}(A).$$

Lemat 2. Funkcja $h_{m,\varepsilon}$ jest miarą zewnętrzną na \mathbb{R}^k , spełniającą warunek Caratheodory'ego, więc obcięta do \mathbb{R}^k jest miarą.

Definicja 7. Miarę h_m nazywamy m -wymiarową miarą Hausdorffa.

Lemat 3. Dla każdego h_m -mierzalnego zbioru A $h_m(A)$ jest nierosnącą funkcją zmiennej $m \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

Twierdzenie 4. Dla każdego h_m -mierzalnego zbioru A takiego, że $h_m(A) < \infty$, prawdziwe są następujące implikacje:

1. jeżeli $m' > m$, to $h_{m'}(A) = 0$.
2. jeżeli $m' < m$, to $h_{m'}(A) = \infty$.

Definicja 8. Wymiarem Hausdorffa zbioru A nazywamy nieujemną liczbę $\dim_H(A)$ spełniającą warunki:

1. jeżeli $m > \dim_H(A)$, to $h_m(A) = 0$
2. jeżeli $m < \dim_H(A)$, to $h_m(A) = \infty$

Lemat 4. Niech $m \in \mathbb{N}, A \subset \mathbb{R}^m$. Wtedy prawdziwa jest nierówność:

$$0 \leq \dim_H(A) \leq D_H(A) \leq m$$

Rozdział 3

Iteracyjne systemy funkcyjne

Opiszę matematyczne narzędzie do generowania fraktali w prosty sposób. W zbiorach wygenerowanych za pomocą iteracyjnych systemów funkcyjnych ich podzbiory są identyczną kopią całości. W podejściu matematycznym są to nieskończone łańcuchy Markowa. W praktyce przy generowaniu graficznego obrazu powstałych zbiorów łańcuch zostaje zakończony gdy osiągnie dokładność pikselu ekranu.

3.1 Podstawy teoretyczne

Podstawowe definicje i własności

Definicja 10. *Iteracyjnym systemem funkcyjnym (ang. IFS - Iterated Function System) nazywamy przestrzeń metryczną zupełną (X, d) wraz ze skończonym zbiorem odwzorowań $\{w_1, \dots, w_N\}$, gdzie $w_i : X \rightarrow X$ jest kontrakcją ze stałą s_i , $i = 1, \dots, N$, tzn.*

$$\forall_{i=1, \dots, N} \forall_{x, y \in X} d(w_i(x), w_i(y)) \leq s_i \cdot d(x, y).$$

Liczbę $s = \max \{s_i : 1 \leq i \leq N\}$ nazywamy czynnikiem kontrakcyjnym dla IFS.

Definicja 11. *Niech $A, B \in H(X)$. Wówczas funkcję:*

$$h(A, B) := \max(\sup \{d(x, B) : x \in A\}, \sup \{d(x, A) : x \in B\}),$$

nazywamy metryką Hausdorffa.

Twierdzenie 5. *Oznaczmy IFS w przestrzeni X z przekształceniami w_i i czynnikiem kontrakcyjnym s jako $\{X; w_i, i = 1, \dots, N\}$. Zdefiniujmy odwzorowanie $W : H(X) \rightarrow H(X)$ jako*

$$W(B) := \sum_{i=1}^N w_i(B), \quad B \in H(X).$$

Wówczas $W(B)$ jest kontrakcją ze stałą kontrakcyjną s , na zupełnej przestrzeni metrycznej $(H(X), h)$.

Twierdzenie jest prawdziwe również dla przestrzeni zbiorów domkniętych i ograniczonych.

Definicja 12. *Zbiór $A \in H(X)$ taki, że $W(A) = A$ nazywamy atraktorem danego IFS.*

Istnienie atraktora dla każdego IFS zapewnia Twierdzenie 5 oraz Twierdzenie Banacha o kontrakcji.

Atraktor IFS można otrzymać badając iteracje odwzorowania W .

Twierdzenie 6. Niech $w_{i_1 \dots i_p} = w_{i_1} \circ \dots \circ w_{i_p}$, $A_{i_1 \dots i_p} = w_{i_1 \dots i_p}(A)$. Wtedy

1.

$$A_{i_1 \dots i_p} = \bigcup_{i_{p+1}=1}^N A_{i_1 \dots i_p i_{p+1}}.$$

2.

$$A \supset A_{i_1} \supset A_{i_1 i_2} \supset \dots \supset A_{i_1 \dots i_p} \supset \dots \text{ oraz } \bigcap_{p=1}^{\infty} A_{i_1 \dots i_p i_{p+1}} \neq \emptyset.$$

3. Atraktor A jest zbiorem zwartym.

Przykłady wyznaczania atraktorów IFS

1. Weźmy IFS określony przez zbiór $\{\mathbb{R}, w_1, w_2\}$, gdzie $w_1 = \frac{1}{3}x$, $w_2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Wówczas

$$\forall x, y \in X |w_1(x) - w_1(y)| = \left| \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \right| \leq \frac{1}{3}|x - y|$$

$$\forall x, y \in X |w_2(x) - w_2(y)| = \left| \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3} \right| \leq \frac{1}{3}|x - y|,$$

stąd $s_1 = s_2 = s = \frac{1}{3}$.

Przyjmijmy zbiór początkowy $A_0 = [0, 1]$. Wówczas

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad A_2 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$A_{11} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \quad A_{12} = \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \quad A_{21} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \quad A_{22} = \left[\frac{20}{27}, 1\right]$$

...

Dalej składając przekształcenia w_1, w_2 w granicy otrzymujemy zbiór Cantora. Zatem atraktorem badanego IFS jest zbiór Cantora.

2. Weźmy IFS określony przez zbiór $\{\mathbb{R}, w_1, w_2\}$, gdzie $w_1 = 0$, $w_2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Wówczas

$$\forall x, y \in X |w_1(x) - w_1(y)| \leq 0 \cdot |x - y| = 0$$

$$\forall x, y \in X |w_2(x) - w_2(y)| = \left| \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{2}{3}|x - y|,$$

stąd $s_1 = 0$, $s_2 = \frac{2}{3}$, $s = \max(0, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$.

Przyjmijmy zbiór początkowy $A_0 = [0, 1]$. Otrzymujemy zbiory

$$A_1 = \{0\} \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right], \quad A_2 = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{3} \right\} \cup \left[\frac{5}{9}, 1\right], \dots, \quad A_n = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \dots, 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right\} \cup \left[1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n, 1\right].$$

Stąd w granicy dostajemy atraktor badanego IFS, którym są wyrazy ciągu geometrycznego $a_1 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$.

W ogólnym przypadku wyznaczenie atraktora IFS nie jest trywialne, jednak istnieje Twierdzenie 7 dające możliwość przybliżenia atraktora z pewną dokładnością.

Twierdzenie 7. Niech $L \in H(X)$ oraz $\varepsilon > 0$. Niech $\{X; w_1, \dots, w_N\}$ będzie IFS z czynnikiem kontrakcyjnym s takim, że

$$\bigcup_{i=1}^N w_i(L) \leq \varepsilon.$$

Wtedy, jeżeli A jest atraktorem dla tego IFS, to

$$h(A, L) \leq \frac{\varepsilon}{1-s}.$$

Weźmy IFS postaci $\{\mathbb{R}, w_1, w_2\}$, gdzie $w_1 = 0.51x - 0.01$, $w_2 = 0.47x + 0.53$ z atraktorem A . Niech $L = [0, 1]$. Wówczas $s = \max(0.51, 0.47) = 0.51$. Możemy wyznaczyć:

$$h([0, 1], W([0, 1])) = h\left([0, 1], \bigcup_{i=1}^2 w_i([0, 1])\right) = h([0, 1], [-0.01, 0.5] \cup [0.53, 1]) = 0.01.$$

Z Twierdzenia 7 otrzymujemy, że

$$h([0, 1], A) \leq \frac{0.01}{1-0.51} = \frac{0.01}{0.49} < 0,02041.$$

Adresowanie punktów atraktora

Definicja 13. Niech dany będzie IFS postaci $\{X; w_1, \dots, w_N\}$ oraz niech (Σ, d_c) oznacza przestrzeń metryczną, której elementami są wszystkie ciągi o wartościach ze zbioru $\{1, \dots, N\}$, gdzie

$$d_c(\omega, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\omega_n - \sigma_n|}{(N+1)^n}, \quad \omega, \sigma \in \Sigma.$$

(Σ, d_c) nazywamy przestrzenią kodową na N symbolach stowarzyszoną z IFS.

Dla każdej trójki $(\sigma, n, x) \in \Sigma \times N \times X$ definiujemy odwzorowanie

$$\phi(\sigma, n, x) = w_{\sigma_1 \dots \sigma_n}(x).$$

Twierdzenie 8. Dla każdych $x \in X$, $\sigma \in \Sigma$ granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, x)$$

istnieje i jest niezależna od $x \in X$. Oznaczamy ją przez $\phi(\sigma)$, przy czym odwzorowanie $\phi: \Sigma \rightarrow A$ jest ciągle i "na".

Definicja 14. Adresem punktu $a \in A$ jest każdy element zbioru

$$\phi^{-1}(a) = \{\omega \in \Sigma : \phi(\omega) = a\}.$$

Definicja 15.

1. IFS nazywamy absolutnie niespójnym, jeżeli każdy jego punkt posiada jednoznaczny adres, tzn. równoważnie gdy

$$w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset, \text{ dla } i, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j.$$

2. IFS nazywamy ściśle przylegającym, gdy nie jest absolutnie niespójny, ale jego atraktor zawiera niepusty zbiór θ , otwarty w przestrzeni metrycznej A , taki, że

- (a) $w_i(\theta) \cap w_j(\theta) = \emptyset$, dla $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$,
 (b) $\bigcup_{i=1}^{\infty} w_i(\theta) \subset \theta$.

Warunki te nazywamy warunkami zbioru otwartego.

3. W pozostałych przypadkach IFS nazywamy nachodzącym.

Definicja 16. Punkt $a \in A$ nazywamy okresowym, gdy istnieje skończony ciąg liczb $(\sigma_n)_{n=1}^p \subset \{1, \dots, N\}^p$ taki, że $a = w_{\sigma_1 \dots \sigma_p}(a)$. Najmniejsze takie p nazywamy okresem punktu a .

Adres punktu okresowego nazywamy adresem okresowym. Jeżeli adres jest okresowy oprócz skończonej ilości wyrazów początkowych to nazywamy go adresem ostatecznie okresowym.

Twierdzenie 9. Atraktor IFS jest domknięciem swoich punktów okresowych.

Samopodobieństwo i wymiar Hausdorffa dla IFS

Za pomocą IFS można w prosty sposób tworzyć fraktale gdyż konstrukcja atraktorów pozwala na tworzenie zbiorów w których podzbiór jest podobny do całego zbioru. Poniższe definicje określają ściśle samopodobieństwo atraktorów IFS.

Definicja 17. Atraktor A nazywamy samopodobnym, gdy

1. $h_m(A) > 0$ dla pewnego $m > 0$
2. $h_m(w_i(A) \cap w_j(A)) = 0$ dla każdego $i \neq j$.

Twierdzenie 10. Jeżeli atraktor A spełnia warunki zbioru otwartego oraz wszystkie w_i są podobieństwami, to A jest samopodobny.

Twierdzenie 11. Jeżeli w_i są podobieństwami ze stałymi s_i oraz $0 < h_m(A) < \infty$, to A jest samopodobny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{i=1}^N s_i^m = 1.$$

Zatem $\dim_H(A) = m$. Tak określoną wartość m nazywamy wymiarem podobieństwa atraktora A .

Twierdzenie 12. Jeżeli $X = \mathbb{R}^n$,

$$w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset, \quad \text{dla } i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad i \neq j, \quad (3.1)$$

oraz istnieją liczby $0 < s_i \leq \bar{s}_i < 1$ takie, że

$$s_i |x - y| \leq |w_i(x) - w_i(y)| \leq \bar{s}_i |x - y|, \quad i \in \{1, \dots, N\},$$

to

$$\min\{n, k\} \leq \dim_H(A) \leq l,$$

gdzie

$$\sum_{i=1}^N s_i^k = 1, \quad \sum_{i=1}^N \bar{s}_i^l = 1.$$

Górne oszacowanie pozostaje prawdziwe nawet gdy nie zachodzi warunek 3.1.

Łańcuchy Markowa

Przy generowaniu atraktorów iteracyjnych systemów funkcyjnych wychodzi się od stanu początkowego A_0 a następnie przekształca się go przekształceniem $w_{i_1, i_2, \dots} = w_{i_1} \circ w_{i_2} \circ \dots$, gdzie i_1, i_2, \dots są losowo wybierane spośród określonych przekształceń IFS. Wszystkie stany pośrednie wygenerowane w ten sposób dają atraktor IFS.

Losowanie przekształceń IFS jest przykładem zastosowania łańcuchów Markowa [5].

Definicja 18. Ciąg prób o możliwych wynikach E_1, E_2, \dots, E_N nazywamy łańcuchem Markowa, jeżeli prawdopodobieństwa ciągów prób są zdefiniowane wzorem:

$$P\{(E_{j_0}, E_{j_1}, \dots, E_{j_N})\} = a_{j_0} p_{j_0 j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{N-1} j_N},$$

gdzie początkowy rozkład prawdopodobieństwa dla zdarzeń E_k w momencie 0 jest określony przez $\{a_k\}$ oraz p_{jk} oznaczają stałe prawdopodobieństwa warunkowe zajścia zdarzenia E_k , przy założeniu, że w poprzedniej próbie wystąpiło zdarzenie E_j .

Cechą charakterystyczną łańcuchów Markowa jest to, że wynik dowolnej próby zależy wyłącznie od wyniku próby poprzedniej. W Definicji 18 a_k oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu początkowego do stanu E_k .

Ponieważ zawsze następuje przejście ze stanu j do stanu k , więc prawdziwa jest równość:

$$p_{j1} + p_{j2} + p_{j3} + \dots = 1, \text{ gdzie } p_{jk} \geq 0.$$

Przejście ze stanu E_j do stanu E_k w ciągu dokładnie n kroków może zrealizować się różnymi drogami

$$E_j \rightarrow E_{j_1} \rightarrow \dots \rightarrow E_{j_{n-1}} \rightarrow E_k.$$

Prawdopodobieństwo kolejnego zajścia tych zdarzeń jest równe $p_j p_{j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} j_k}$. Oznaczmy sumę takich prawdopodobieństw dla wszystkich możliwych dróg jako $p_{jk}^{(n)}$.

Twierdzenie 13. Dla łańcuchów Markowa prawdziwe są następujące równości:

•

$$p_{jk}^{(2)} = \sum_v p_{jv} p_{vk},$$

• co drogą indukcji daje wzór

$$p_{jk}^{(n+1)} = \sum_v p_{jv} p_{vk}^{(n)},$$

• dalej indukcyjnie względem m otrzymujemy

$$p_{jk}^{(n+m)} = \sum_v p_{jv}^{(m)} p_{vk}^{(n)}.$$

Z powyższej własności możemy zapisać, że prawdopodobieństwo powrotu do stanu początkowego po n krokach wynosi:

$$a_k^{(n)} = \sum_j a_j p_{jk}^{(n)}.$$

Z powyższego można wywnioskować, że atraktory IFS są zastosowaniem wprost łańcuchów Markowa. A_0 jest stanem początkowym z prawdopodobieństwem przejścia z tego stanu do stanu k równym a_k . Kolejne stany otrzymywane są poprzez składanie przekształceń IFS w_i $\{1, \dots, N\}$. Przy generowaniu atraktorów można zatem korzystać z teorii dotyczącej łańcuchów Markowa.

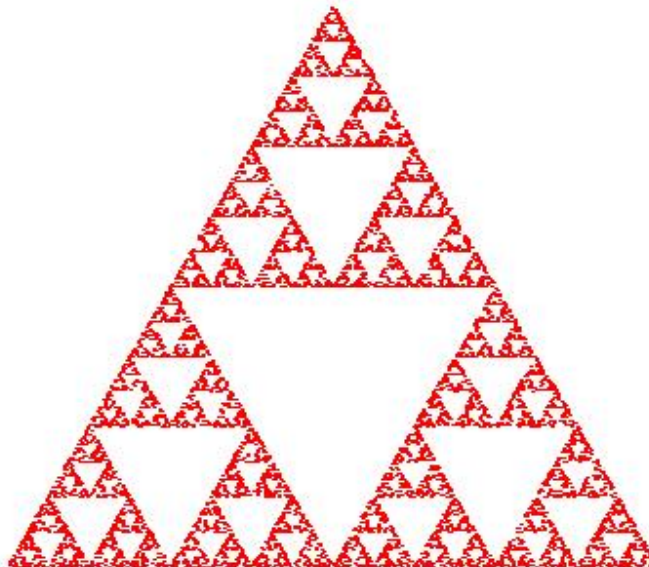
3.2 Graficzne przedstawienie atraktorów IFS będących fraktalami

1. Trójkąt Sierpińskiego

Weźmy IFS postaci $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$, gdzie

$$\begin{aligned} w_1 : x_{n+1} &= 0.5x_n, \quad y_{n+1} = 0.5y_n + 0.5, \\ w_2 : x_{n+1} &= 0.5x_n - \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad y_{n+1} = 0.5y_n + 0.25, \\ w_3 : x_{n+1} &= 0.5x_n + \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad y_{n+1} = 0.5y_n + 0.25. \end{aligned}$$

Atraktor tego IFS został zobrazowany na Rysunku 3.1.



Rysunek 3.1: Atraktor IFS 1 zobrazowany na płaszczyźnie daje w wyniku Trójkąt Sierpińskiego.

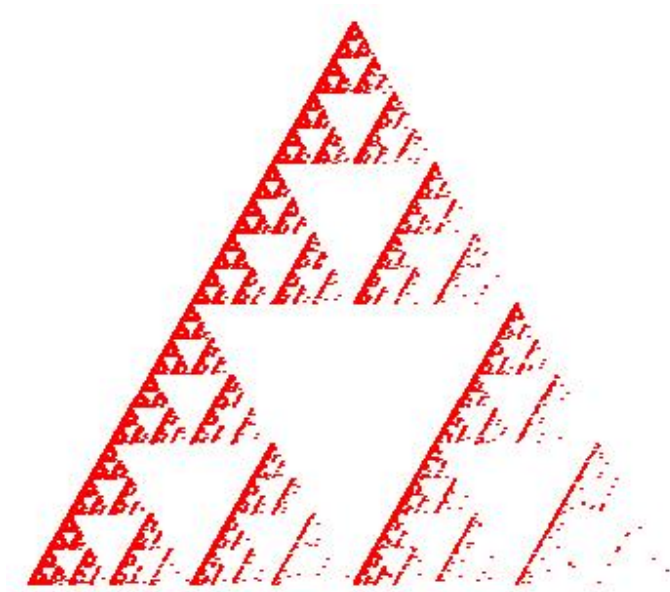
Atraktor powstał przez losowanie indeksów i_n przekształceń w złożeniu przekształceń $w_{i_1} \circ \dots \circ w_{i_p}$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, $n = \{1, \dots, p\}$ oraz $i_n = \{1, 2, 3\}$. Indeksy zostały wylosowane z jednakowym prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Istnieje możliwość ustawienia różnego prawdopodobieństwa dla każdego z przekształceń w_{i_n} . Oznaczmy prawdopodobieństwo wylosowania przekształcenia w_j jako k_j , dla każdego $j = \{1, 2, 3\}$.

Po zróżnicowaniu prawdopodobieństw przydzielonych przekształceniom Trójkąt Sierpińskiego powstaje w sposób nierównomierny, co można zaobserwować na Rysunku 3.2.

2. Dywan Sierpińskiego

Weźmy IFS postaci $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$, gdzie

$$w_1 : x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - \frac{1}{3}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{3},$$



Rysunek 3.2: Trójkąt Sierpińskiego z nierównomiernie określonymi prawdopodobieństwami dla odwzorowań: $k_1 = k_2 = 0.475$, $k_3 = 0.05$.

$$\begin{aligned}
 w_2 : x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n - \frac{1}{3}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n, \\
 w_3 : x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n - \frac{1}{3}, \quad y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{3}, \\
 w_4 : x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n, \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{3}, \\
 w_5 : x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n, \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{3}, \\
 w_6 : x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{3}, \\
 w_7 : x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n, \\
 w_8 : x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}, \quad y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Atraktor tego IFS został zobrazowany na Rysunku 3.3. Jest to odpowiednik zbioru Cantora w przestrzeni dwuwymiarowej.

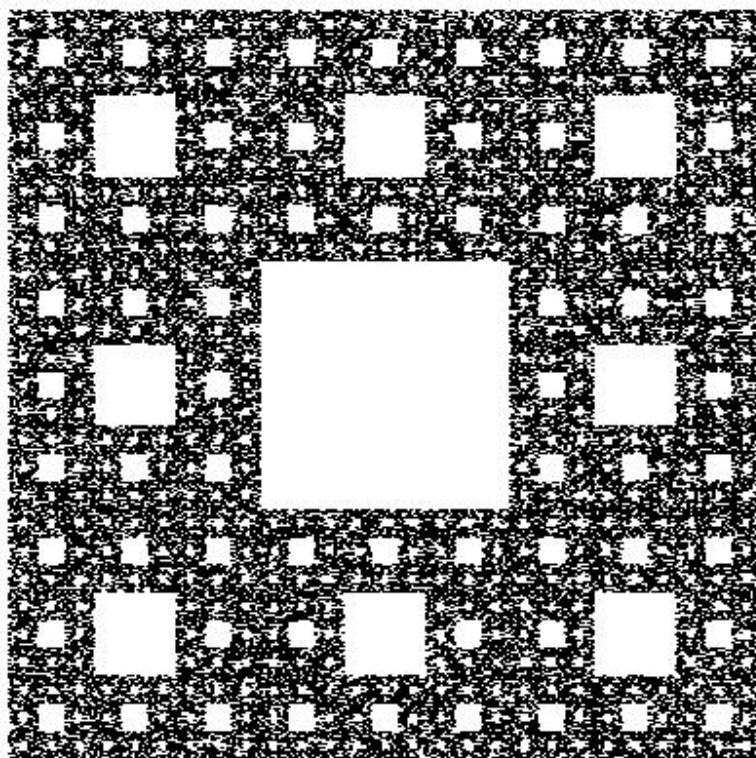
Po zróżnicowaniu prawdopodobieństw przydzielonych przekształceniom Dywan Sierpińskiego powstaje w sposób nierównomierny, co można zaobserwować na Rysunku 3.4.

3. Paproć Barnsleya

Weźmy IFS postaci $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4\}$, gdzie

$$w_1 : x_{n+1} = 0.85x_n + 0.04y_n, \quad y_{n+1} = -0.04x_n + 0.85y_n + 1.6,$$

$$w_2 : x_{n+1} = -0.15x_n + 0.28y_n, \quad y_{n+1} = 0.26x_n + 0.24y_n + 0.44,$$

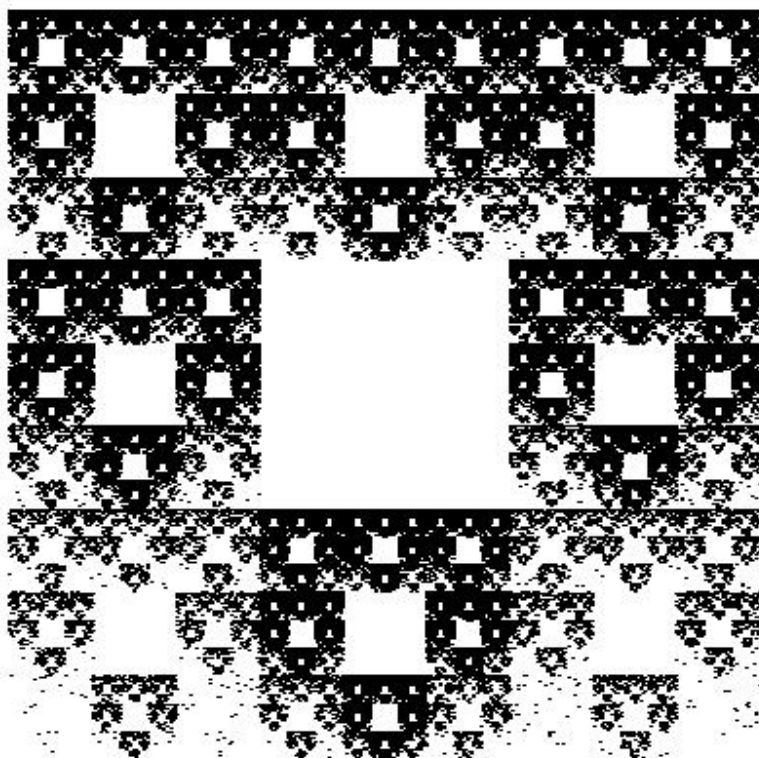


Rysunek 3.3: Atraktor IFS 2 zobrazony na płaszczyźnie daje w wyniku Dywan Sierpińskiego. Na rysunku atraktor z jednostajnym rozkładem prawdopodobieństwa.

$$w_3 : x_{n+1} = 0.20x_n - 0.26y_n, \quad y_{n+1} = 0.23x_n + 0.22y_n + 1.6,$$

$$w_4 : x_{n+1} = 0, \quad y_{n+1} = 0.16y_n.$$

Atraktor tego IFS z równymi oraz zróżnicowanymi prawdopodobieństwami losowania przekształceń w_{i_n} został zobrazony na Rysunku 3.5.



Rysunek 3.4: Dywan Sierpińskiego z nierównomiernie określonymi prawdopodobieństwami dla odwzorowań: $k_3 = k_8 = 0.005$, $k_1 = k_2 = k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = 0.165$.



Rysunek 3.5: Atraktor IFS 3 zobrazowany na płaszczyźnie daje w wyniku Paproć Barnsleya z równomiernym rozkładem prawdopodobieństwa oraz z prawdopodobieństwami $k_1 = 0.85$, $k_2 = k_3 = 0.07$, $k_4 = 0.01$.

Rozdział 6

Zbiory Julia i Mandelbrota

Zbiory Julia i Mandelbrota są fraktalami określanymi przez funkcje analityczne. Ich graficzna reprezentacja na płaszczyźnie jest tworzona przy użyciu liczb zespolonych i ich zobrazowaniu na płaszczyźnie Gaussa. Możliwe jest rozszerzenie zbiorów na większą ilość wymiarów i przedstawienie ich w przestrzeni trójwymiarowej poprzez zastosowanie kwaternionów.

6.1 Zbiory Julia i Mandelbrota na płaszczyźnie

6.1.1 Intuicja

Określmy funkcję $f(z) = z^2 + k$, gdzie z, k są liczbami zespolonymi. Niech $f^n(z)$ oznacza n -krotne złożenie funkcji f , oraz $f_k(z) = z^2 + k$. Oba zbiory powstają przez iterację ciągu f_k^n względem zmiennej n - stopień złożenia funkcji f .

Zbiór Mandelbrota określa się jako zbiór tych liczb k przy których ciąg $f_k^n(0)$ pozostaje ograniczony przy $n \rightarrow \infty$:

$$\left\{ k : \lim_{n \rightarrow \infty} f_k^n(0) < \infty \right\}.$$

Zbiór Julia określa się jako zbiór tych punktów z przy których ciąg $f^n(z)$ pozostaje ograniczony przy $n \rightarrow \infty$:

$$\left\{ z : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) < \infty \right\}.$$

6.1.2 Definicje i pojęcia

Określmy funkcję $f(z) = z^2 + c$, gdzie $z, c \in \mathbb{C}$ oraz c jest stałą. Określmy ciąg (z_n) jako:

$$z_n = f(z_{n-1}),$$

przy czym z_0 jest określoną wartością początkową.

Definicja 19. Orbitą punktu $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy zbiór:

$$O^+(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : z = f^m(z_0), m \in \mathbb{N}\}.$$

Jeżeli istnieje takie n , dla którego:

1. $z_0 = z_n$
2. z_1, \dots, z_{n-1} są różne

wówczas orbitę $O^+(z_0)$ nazywamy okresową, a punkt z_0 nazywamy okresowym o okresie n .

Definicja 20. Punkt $z \in \mathbb{C}$ nazywamy ostatecznie okresowym gdy istnieje $n \in \mathbb{N}$ dla którego z jest punktem o okresie n .

Punkt ostatecznie okresowy, który nie jest okresowy nazywa się preokresowym.

Definicja 21. Niech z_0 będzie punktem o okresie n . Wartością własną dla okresowej orbity $O^+(z_0)$ nazywamy liczbę:

$$\lambda = \lambda_{z_0} = (f^n)'(z_0).$$

Wartość własna jest ustalona dla każdego punktu w cyklu. Określa się podział orbit ze względu na wartość λ :

1. $0 < |\lambda| < 1$ - orbita przyciągająca,
2. $\lambda = 0$ - orbita superprzyciągająca,
3. $|\lambda| > 1$ - orbita odpychająca,
4. $|\lambda| = 1$ - orbita neutralna.

Definicja 22. Basenem przyciągania $A_c(z)$ nazywa się zbiór punktów które dążą do okresowej orbity O^+ wyznaczonej przez funkcję $f(z) = z^2 + c$:

$$A_c(z) = \{z_0 \in \mathbb{C} : f^k(z_0) = z, k > 0\}.$$

Dla wielomianów określa się basen przyciągania:

$$A_c(\infty) = \left\{ z_0 \in \mathbb{C} : \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(z_0) = \infty \right\}.$$

Dla dowolnej funkcji $f(z) = z^2 + c$ istnieją zawsze punkty z_0 , które generują ograniczone orbity; np. dla każdej funkcji f istnieją przynajmniej dwa punkty stałe będące rozwiązaniem równania $z^2 + c = z$.

Definicja 23. Brzeg zbioru $A_c(\infty)$ oznacza się jako $J_c = \partial A_c(\infty)$ i nazywa się zbiorem Julia funkcji f_c .

Zbiór ograniczonych orbit dla $c \in \mathbb{C}$

$$K_c = C \setminus A_c(\infty) = \{z_0 \in \mathbb{C} : f_c^k(z_0) < \infty, k > 0\}$$

nazywamy pełnym zbiorem Julia.

Zbiór J_c jest granicą pomiędzy orbitami dążącymi do nieskończoności oraz orbitami ograniczonymi przy $k \rightarrow \infty$. Można zatem określić zależność:

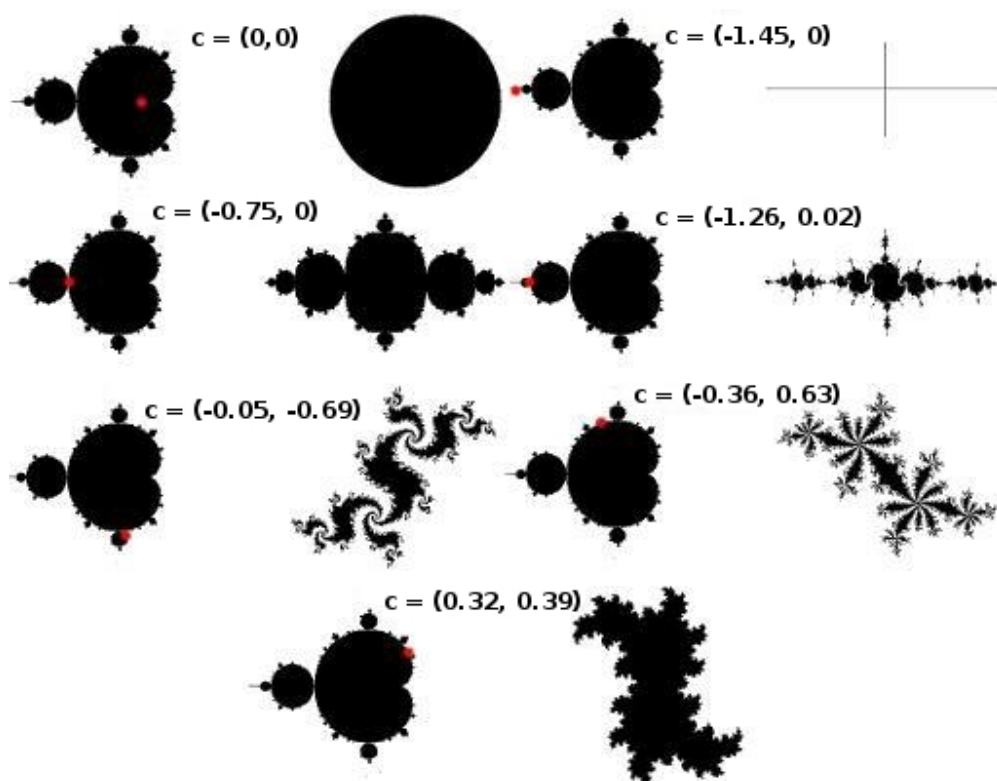
$$\partial K_c = J_c = \partial A_c(\infty).$$

Definicja 24. Dla dowolnego $c \in \mathbb{C}$ określimy funkcję $f_c(z) = z^2 + c$ oraz ustalmy $z_0 = 0$. Zbiór tych punktów c dla których $f_c^n(0)$ pozostaje ograniczony dla $n \rightarrow \infty$ nazywamy zbiorem Mandelbrota:

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) < \infty \right\}.$$

Pomiędzy zbiorami Julia i Mandelbrota istnieje silna zależność. Punkt $c \in M$ wtedy i tylko wtedy gdy K_c jest zbiorem spójnym.

Dla większości wartości stałej c zbiory Julia są fraktalami. Na Rysunku 6.1 przedstawiono wybrane zbiory Julia wraz ze zobrazowaną stałą c na zbiorze Mandelbrota.



Rysunek 6.1: Wybrane zbiory Julia wraz ze zobrazoną stałą $c \in \mathbb{C}$ na zbiorze Mandelbrota.