

# Modelowanie geometryczne

## Krzywe parametryczne

Wojciech Kowalewski

fraktal@amu.edu.pl



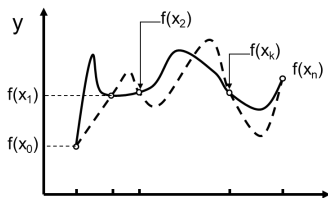
Wydział Matematyki i Informatyki UAM  
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

*Semestr zimowy 2021/22*

# Krzywe parametryczne

# Funkcje sklepane trzeciego stopnia

- ▶ W przedziale  $[a, b]$  dane są węzły  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  takie że  $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$
  - ▶ Należy znaleźć funkcję interpolującą  $S$  która w węzłach przyjmuje takie same wartości jak  $f$ .
1.  $S$  jest klasy  $C^2$  w  $[a, b]$
  2.  $S$  jest wielomianem trzeciego stopnia w każdym podprzedziale  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$
  3.  $S$  interpoluje  $f$ , tj.  $S(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$
  4. Dla  $x < a$  i  $x > b$   $S$  jest reprezentowana przez styczną do  $S$  w punktach odpowiednio  $x = a$  i  $x = b$  (czyli druga pochodna poza przedziałem interpolacji znika); są to tzw. *naturalne funkcje sklepane*



Rys. 1. Zagadnienie interpolacyjne

- ▶ Ogólna postać funkcji sklejjanych stopnia trzeciego

$$S(x) \equiv S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$
$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

- ▶ Warunki wynikające z 1.-3.

$$S_i(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$S_i'(x_i) = S_{i-1}'(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$S_i''(x_i) = S_{i-1}''(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- ▶ Algorytm znajdowania funkcji sklepanych stopnia trzeciego

$$a_i = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$c_0 = c_n = 0$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2c_i(h_{i-1} + h_i) + h_ic_{i+1} =$$

$$\frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i) \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$d_i = \frac{1}{3h_i}(c_{i+1} - c_i) \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

- Algorytm znajdowania funkcji sklepanych stopnia trzeciego

$$Ac = g$$

$$A = \begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & & \\ & & \dots & \dots & & & \\ & \dots & & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & & \\ & & & & h_{n-2} & h_{n-2} & \\ & & & & & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \dots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_n) \end{pmatrix}$$

# Funkcje sklepane trzeciego stopnia

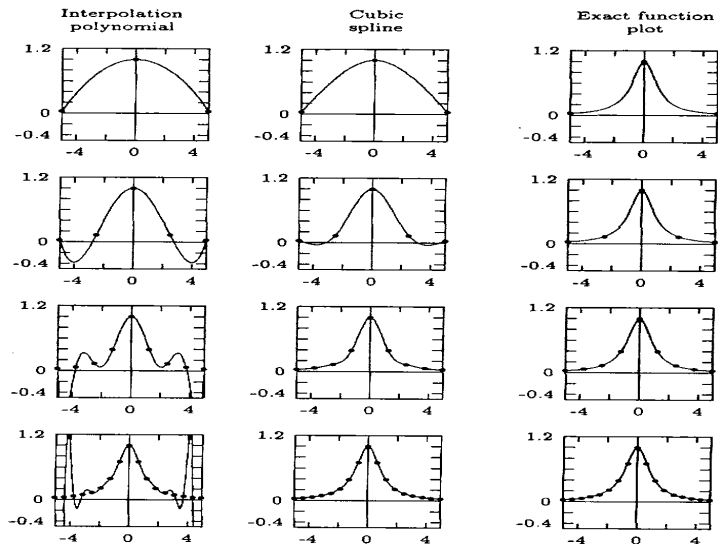
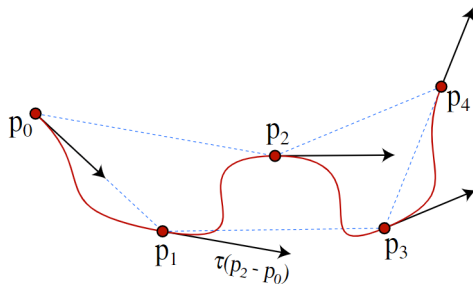


Figure 10.5: Comparison: Interpolating polynomial – cubic spline – exact plot of  $f(x) = 1/(1+x^2)$  for  $x \in [-5, 5]$  and increasing number of nodes

# Krzywe sklejane Catmulla-Roma

- ▶ *Krzywe sklejane Catmulla-Roma* to rodzina krzywych sklejanych 3-go stopnia, interpolujących ciąg punktów  $(p_i)_0^n$  w taki sposób, że styczna w każdym punkcie jest obliczana na podstawie poprzedniego i następnego punktu:  $\tau(p_{i+1} - p_{i-1})$ .
- ▶ Zatem w punktach interpolacji krzywe te mają ciągłość geometryczną  $C^1$  - parametr  $\tau$  określa siłę nachylenia krzywej w punkcie interpolacji.
- ▶ W punktach skrajnych styczna nie jest jednoznacznie zdefiniowana - często przyjmuje się jej postać jako, odpowiednio:  $\tau(p_1 - p_0)$ ,  $\tau(p_n - p_{n-1})$ .

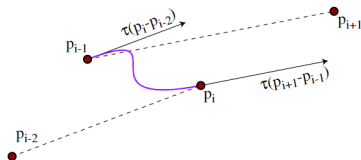


Rys. 1. Krzywa Catmulla-Roma 3-go stopnia zdefiniowana przez 5 punktów.



- ▶ Rozpatrzmy pojedynczy segment krzywej Catmulla-Roma, zdefiniowany przez punkty  $p_{i-2}$ ,  $p_{i-1}$ ,  $p_i$ ,  $p_{i+1}$ ,
- ▶ Ogólny wzór takiej krzywej to oczywiście

$$p(u) = \sum_{k=0}^3 c_k u^k$$



Rys. 2. Segment krzywej Catmulla-Roma 3-go stopnia.

- ▶ Zatem  $p(0) = p_{i-1}$ ,  $p(1) = p_i$ ,  $p'(0) = \tau(p_i - p_{i-2})$ ,  $p'(1) = \tau(p_{i+1} - p_{i-1})$

- ▶ Stąd

$$\begin{aligned}c_0 &= p_{i-1} \\c_0 + c_1 + c_2 + c_3 &= p_{i+1} \\c_1 &= \tau(p_i - p_{i-2}) \\c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= \tau(p_{i+1} - p_{i-1})\end{aligned}$$

- ▶ Proste przekształcenia implikują

$$\begin{aligned}c_0 &= p_{i-1} \\c_1 &= \tau(p_i - p_{i-2}) \\c_2 &= 3(p_i - p_{i-1}) - \tau(p_{i+1} - p_{i-1}) - 2\tau(p_i - p_{i-2}) \\c_3 &= -2(p_i - p_{i-1}) + \tau(p_{i+1} - p_{i-1}) + \tau(p_i - p_{i-2})\end{aligned}$$

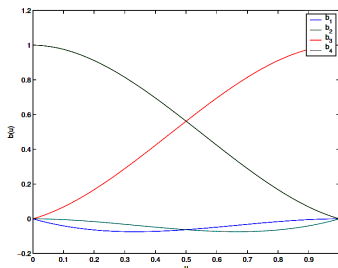
- ▶ Wyrażając te współczynniki jako liniowe kombinacje punktów kontrolnych otrzymujemy

$$\begin{aligned}c_0 &= 0p_{i-2} + p_{i-1} + 0p_i + 0p_{i+1} \\c_1 &= -\tau p_{i-2} + 0p_{i-1} + \tau p_i + 0p_{i+1} \\c_2 &= 2\tau p_{i-2} + (\tau - 3)p_{i-1} + (3 - 2\tau)p_i - \tau p_{i+1} \\c_3 &= -\tau p_{i-2} + (2 - \tau)p_{i-1} + (\tau - 2)p_i + \tau p_{i+1}\end{aligned}$$

- Przyjmując klasyczną definicję krzywej parametrycznej jako krzywej opisanej przez swoje funkcje bazowe otrzymujemy w tym przypadku

$$p(u) = u^T M p := [1 \ u \ u^2 \ u^3] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\tau & 0 & \tau & 0 \\ 2 & \tau - 3 & 3 - 2\tau & -\tau \\ -\tau & 2 - \tau & \tau - 2 & \tau \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{i-2} \\ p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \end{bmatrix}$$

- Funkcje bazowe mają zatem postać:  $Mu = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4]^T$



Rys. 2. Funkcje bazowe krzywej Catmulla-Roma 3-go stopnia dla  $\tau = 0.5$ .

- ▶ *GlobalBSplineCurveInterpolation*
- ▶ H. Lin et al., "Use Iterative Non-Uniform B-Spline Curve (Surface) to Fitting Given Point Set [J]." China Science, 33(10), 2003 pp. 912–923 (in Chinese).
- ▶ Skrypt CDF dmonstrujący algorytm z powyższej pracy  
*AlgorithmForCubicNonuniformBSplineCurveInterpolation*

# Parametryczne krzywe trzeciego stopnia



# Parametryczne krzywe trzeciego stopnia



# Parametryczne krzywe trzeciego stopnia

