KONSPEKT LEKCJI MATEMATYKI
Z WYKORZYSTANIEM OPROGRAMOWANIA SAGE MATH

Imię i nazwisko nauczyciela: Andżelika Wysocka

Data: 30.01.2019 r. *Czas realizacji:* **90 min**

Typ lekcji: lekcja wprowadzająca *Klasa*: I, szkoła średnia, poziom podstawowy

Temat lekcji: ***Rozwiązywanie równań i układów równań- Sage Math.***

1. Cele ujęte w podstawie programowej (informatyka):

Cele ogólne:
I. Bezpieczne posługiwanie się komputerem i jego oprogramowaniem, wykorzystanie sieci komputerowej; komunikowanie się za pomocą komputera i technologii informacyjno-komunikacyjnych. *II. Wyszukiwanie, gromadzenie i przetwarzanie informacji z różnych źródeł; opracowywanie za pomocą komputera: rysunków, tekstów, danych liczbowych, motywów, animacji, prezentacji multimedialnych.* *IV. Wykorzystanie komputera oraz programów i gier edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin oraz do rozwijania zainteresowań.*
Cele szczegółowe:
3. Uczeń wykorzystuje technologie komunikacyjno-informacyjne do komunikacji i współpracy z nauczycielami i innymi uczniami, a także z innymi osobami, jak również w swoich działaniach kreatywnych. *5. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera, stosowanie podejścia algorytmicznego. Uczeń:* *1) prowadzi dyskusje nad sytuacjami problemowymi;* *2) formułuje specyfikacje dla wybranych sytuacji problemowych;* *3) projektuje rozwiązanie: wybiera metodę rozwiązania, odpowiednio dobiera narzędzia komputerowe, tworzy projekt rozwiązania;* *4) realizuje rozwiązanie na komputerze za pomocą oprogramowania aplikacyjnego lub języka programowania;* *5) testuje otrzymane rozwiązanie, ocenia jego własności, w tym efektywność działania oraz zgodność ze specyfikacją;* *6) przeprowadza prezentację i omawia zastosowania rozwiązania.* *6. Wykorzystywanie komputera oraz programów edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin. Uczeń:* *1) wykorzystuje oprogramowanie dydaktyczne i technologie informacyjno-komunikacyjne w pracy twórczej i przy rozwiązywaniu zadań i problemów szkolnych;* *7. Wykorzystywanie komputera i technologii informacyjno-komunikacyjnych do rozwijania zainteresowań, opisywanie zastosowań informatyki, ocena zagrożeń i ograniczeń, aspekty społeczne rozwoju i zastosowań informatyki. Uczeń:* *3) zapoznaje się z możliwościami nowych urządzeń i programów związanych z technologiami informacyjno-komunikacyjnymi, zgodnie ze swoimi zainteresowaniami i potrzebami edukacyjnymi.*

2. Cele ujęte w podstawie programowej (matematyka):

Cele ogólne:
Wszystkie wymienione w podstawie programowej.
Cele szczegółowe:
Większość z wymienionych dla punktu 3. podstawy programowej: „3. Równania i nierówności”.

Scenariusz lekcji jest propozycją lekcji powtórzeniowej do działu „Równania i nierówności” i obejmuje wszystkie cele programowe realizowane w tym dziale dotyczące równań i układów równań. Jest przykładowym zastosowaniem oprogramowania dydaktycznego do rozwiązywania problemów szkolnych.

3. Metody pracy:
   pogadanka, dyskusja, działanie praktyczne

4. Środki dydaktyczne:
   tablica (interaktywna lub tradycyjna), projektor, skrypt oraz zadania do lekcji (załączniki), stanowisko komputerowe dla każdego ucznia z dostępem do Internetu lub zainstalowanym już pakietem *Sage Math*, prezentacja multimedialna

5. Formy pracy:
   z całą klasą, indywidualna

6. Przebieg lekcji:

- **(5 min) Czynności organizacyjne**- włączenie komputerów, przywitanie z uczniami, sprawdzenie obecności, udostępnienie skryptu do zajęć
- **(10 min) Wprowadzenie do tematu lekcji:**
  - podanie tematu lekcji;

Nauczyciel zapisuje na tablicy temat lekcji. *„Rozwiązywanie równań i ich układów - Sage Math.”.*

  - przedstawienie zagadnień, które będą omówione na lekcji;
  - zaciekawienie uczniów tematyką lekcji;

Nauczyciel krótko wprowadza uczniów w temat lekcji. Informuje uczniów, że dzisiejsza lekcja będzie lekcją powtórzeniową działu: *Równania i nierówności.*

  - przygotowanie niezbędnych środków dydaktycznych

Nauczyciel prosi uczniów o zainstalowanie oprogramowania dydaktycznego *Sage Math*- niezbędnego do realizacji lekcji. Program ten posłuży do rozwiązywania problemów

z omówionego działu. Uruchamia prezentację multimedialną i wyświetla ją uczniom. Główny slajd- logo programu *Sage Math*, następnie kolejne slajdy o tym, w jaki sposób zainstalować program.

- Realizacja tematu lekcji

W międzyczasie, gdy instalacja oprogramowania *Sage Math* trwa, nauczyciel omawia z uczniami skrypt do zajęć ***[załącznik 1].*** Na początek rozważa z uczniami prosty przykład równania liniowego $2x + 6 = 0$. Wiadome przenosimy na jedną stronę, niewiadome na drugą lub inaczej odejmujemy obustronnie 6. Na koniec dzielimy przez 2 i otrzymujemy wynik $x = -3$.

Opisane kroki możemy powtórzyć w Sage-u. Najpierw zdefiniujmy sobie równanie.

```
sage: rownanie = 2*x + 6 == 0
```

wynik: $2x+6=0$

Odejmijmy 6 od obydwu stron równania.

```
sage: rownanie.subtract_from_both_sides(6)
```

wynik: $2x=(-6)$

No i na koniec dzielimy obustronnie przez 2.

```
sage: rownanie.divide_both_sides(2)
```

wynik: $x=(-3)$

Nie jest to jedyny sposób. Do **rozwiązywania równań** najczęściej używa się polecenia **solve.**

```
sage: solve(rownanie, x)
```

Aby sprawdzić czy rozwiązanie jest poprawne **podstawiamy** je do równania

```
sage: rownanie.substitute(x=-3)
```

wynik: $(-3)=(-3)$

Lub **sprawdzamy wartość logiczną** wyrażenia:

```
sage: bool( rownanie.substitute(x=-3) )
```

wynik: True

Polecenie **solve** rozwiązuje też równania z parametrem np. $ax + b = 0$

```
sage: var('a,b')
sage: r_lin = a*x + b == 0
sage: solve(r_lin, x)
```

wynik: $\left[x = -\frac{b}{a}\right]$

Polecenie do rozwiązania równania $3x + 12 = 0$ wygląda następująco:

```
sage: solve(r_lin.subs(a=3, b=12), x)
```

wynik: $[x = (-4)]$

Inne przykłady bardziej skomplikowanych równań:

$$-3x^5 + 14x^4 + 33x^3 - 144x^2 - 28x + 240 = 0.$$

```
sage: solve(-3*x^5 + 14*x^4 + 33*x^3 - 144*x^2 - 28*x + 240, x)
```

wynik: $\left[x = (-3), x = 5, x = \left(-\frac{4}{3}\right), x = 2\right]$

Chcąc rozłożyć równanie na czynniki liniowe, a tym samym znaleźć pierwiastki równania musimy zastosować polecenie **factor**.

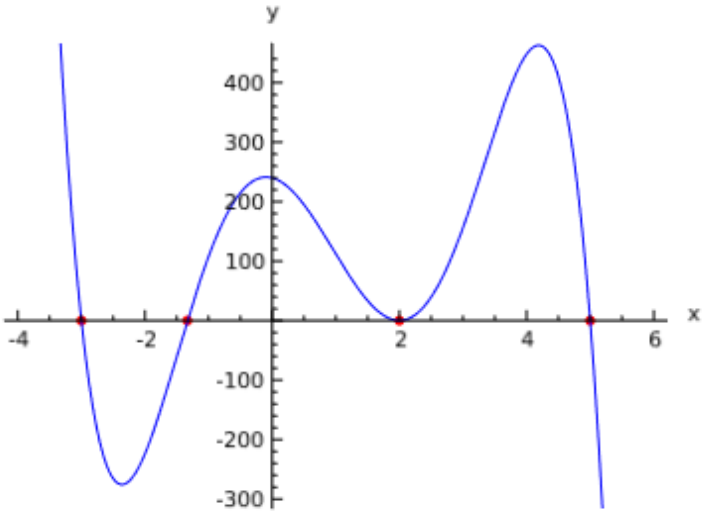
```
sage: f = -3*x^5 + 14*x^4 + 33*x^3 - 144*x^2 - 28*x + 240
sage: f.factor()
```

wynik: $-(3x+4)(x+3)(x-2)^2(x-5)$

Mając pierwiastki równania możemy **narysować wykres** wielomianu i zaznaczyć na nim wszystkie jego pierwiastki czerwonymi punktami.

```
sage: pkt = [(-3,0), (-4/3,0), (2,0), (5,0)]
sage: plot(f, x, -4, 6) + \
      points( pkt,size=15,color='red')
```

Wynik działania polecenia:



W *Sage Math* możemy **operować na lewej i prawej stronie** równania z osobna.

```
sage: r_nie = sqrt(x+2*x^2) == (sin(x)+2*x^3)
sage: r_nie
```

wynik: $\sqrt{2x^2+x} = 2x^3 + \sin(x)$

```
sage: r_nie.left()
```

wynik: $\sqrt{2x^2+x}$

```
sage: r_nie.right()
```

wynik: $2x^3 + \sin(x)$

```
sage: r_nie/r_nie.right()
```

wynik: $\frac{\sqrt{2x^2+x}}{2x^3+\sin(x)} = 1$

Równania można tworzyć ze zdefiniowanych wcześniej wyrażeń algebraicznych. Jeśli mamy np. trzy wyrażenia:

```
sage: wyr1 = sqrt(2*x+4)
sage: wyr2 = x^2-4; wyr3 = x^3-8
```

to możemy stworzyć następujące równania:

```
sage: r_nie1 = wyr1 == wyr2
```

wynik: $\sqrt{2x+4} = x^2 - 4$

```
sage: r_nie2 = wyr1 / wyr2 == wyr3
```

wynik: $\frac{\sqrt{2x+4}}{x^2-4} = x^3 - 8$

itd...

Możemy też wyodrębnić tylko jedną stronę równania. Zobaczmy jak wygląda prawa strona równania `r_nie1` oraz lewa strona równania `r_nie2`.

```
sage: r_nie1.right()
```

wynik: $x^2 - 4$

```
sage: r_nie2.left()
```

wynik: $\frac{\sqrt{2x+4}}{x^2-4}$

Widzimy, że równanie drugie jest wymierne i w liczniku posiada pierwiastek kwadratowy. Oznacza to, że powinniśmy zbadać jego dziedzinę. Przyrównajmy więc jego mianownik do zera i rozwiążmy to równanie.

```
sage: mianownik = r_nie2.left().denominator()
```

wynik: $x^2 - 4$

```
sage: solve(mianownik == 0, x)
```

wynik: $[x = (-2), x = 2]$

Następnie nauczyciel omawia z uczniami punkt drugi ze skryptu.

2. Rozwiązywanie układów równań.

Funkcją **solve** można też rozwiązywać układy równań. Weźmy następujący układ:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$$

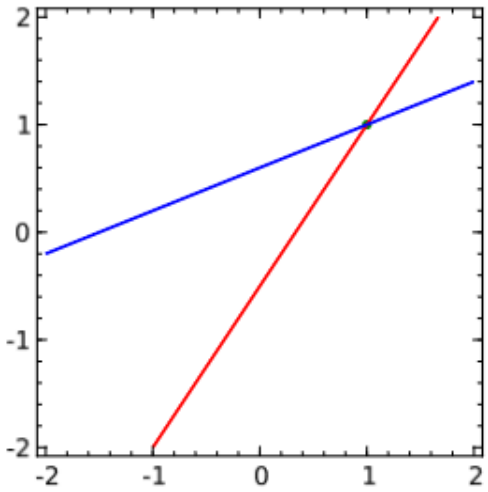
Aby znaleźć rozwiązanie należy wydać polecenie:

```
sage: var('x,y')
sage: solve([3*x-2*y==1, 2*x-5*y==-3], x,y)
```

wynik: $[[x = 1, y = 1]]$

Do zilustrowania układu równań moglibyśmy użyć poznanej wcześniej funkcji **plot** dla każdego y. Nie musimy jednak tego robić, ponieważ *Sage* posiada specjalną funkcję do tego przeznaczoną: **implicit_plot**. Jako pierwszy parametr przekazujemy funkcji równanie, które chcemy wykreślić, następnie podajemy przedziały zmiennych x i y.

```
sage: implicit_plot(3*x-2*y==1,(x,-2,2),(y,-2,2),color="red")\
    + implicit_plot(2*x-5*y==-3,(x-2,2),(y,-2,2),color="blue")\
    + points([(1,1)], size=15,color='green', figsize=4)
```



Inny przykład:

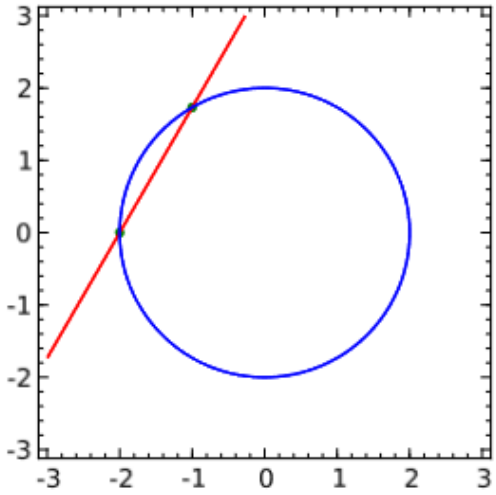
$$\begin{cases} y - \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

```
sage: var('x,y')
sage: solve([y-sqrt(3)*x==2*sqrt(3), x^2+y^2==4], x,y)
```

wynik: $\left[\left[x = (-1), y = \sqrt{3}\right], [x = (-2), y = 0]\right]$

Interpretacja graficzna:

```
sage: implicit_plot(y-sqrt(3)*x==2*sqrt(3),(x,-3,3),(y,-3,3))\
    + implicit_plot(x^2+y^2==4,(x-3,3),(y,-3,3),color="blue")\
    + points([(1,1)], size=15,color='green', figsize=4)
```



Nauczyciel rozdaje uczniom zadania do wykonania ***[załącznik 2].*** Do końca zajęć uczniowie pracują indywidualnie, w razie problemów proszą o pomoc nauczyciela.

7. Praca domowa

Brak pracy domowej, ewentualnie dokończyć zadania do lekcji.

8. Bibliografia

- http://www.sagemath.org/
- https://friweb.pl/sage-math-potega-matematyki-zamknieta-w-przegladarce/
- E-book pt. *„Wykorzystanie pakietu Sage w nauczaniu matematyki w szkołach ponadgimnazjalnych”*, autor: *M. Kowalewski*

9. Uwagi

Aby zaoszczędzić czas na lekcji warto poprosić uczniów o zainstalowanie programu *Sage Math* na jakiejś wcześniejszej lekcji. Może to również wykonać szkolny administrator sytemu/informatyk.