SKRYPT DO ZAJĘĆ

Temat lekcji: ***Rozwiązywanie równań i układów równań- Sage Math.***

1. ***Rozwiązywanie równań.***

   Na początek rozważmy prosty przykład równania liniowego $2x + 6 = 0$.
   Wiadome przenosimy na jedną stronę, niewiadome na drugą lub inaczej odejmujemy obustronnie 6. Na koniec dzielimy przez 2 i otrzymujemy wynik $x = -3$.

Opisane kroki możemy powtórzyć w Sage-u. Najpierw zdefiniujmy sobie równanie.

```
sage: rownanie = 2*x + 6 == 0
```

wynik: $2x + 6 = 0$

Odejmijmy 6 od obydwu stron równania.

```
sage: rownanie.subtract_from_both_sides(6)
```

wynik: $2x = (-6)$

No i na koniec dzielimy obustronnie przez 2.

```
sage: rownanie.divide_both_sides(2)
```

wynik: $x = (-3)$

Nie jest to jedyny sposób. Do **rozwiązywania równań** najczęściej używa się polecenia **solve.**

```
sage: solve(rownanie, x)
```

Aby sprawdzić czy rozwiązanie jest poprawne **podstawiamy** je do równania

```
sage: rownanie.substitute(x=-3)
```

wynik: $(-3) = (-3)$

Lub **sprawdzamy wartość logiczną** wyrażenia:

```
sage:  bool( rownanie.substitute(x=-3) )
```

wynik: True

Polecenie **solve** rozwiązuje też równania z parametrem np. $ax + b = 0$

```
sage:  var('a,b')
sage:  r_lin = a*x + b == 0
sage:  solve(r_lin, x)
```

wynik: $\left[x = -\frac{b}{a}\right]$

Polecenie do rozwiązania równania $3x + 12 = 0$ wygląda następująco:

```
sage:  solve(r_lin.subs(a=3, b=12), x)
```

wynik: $[x = (-4)]$

Inne przykłady bardziej skomplikowanych równań:

$$-3x^5 + 14x^4 + 33x^3 - 144x^2 - 28x + 240 = 0.$$

```
sage: solve(-3*x^5 + 14*x^4 + 33*x^3 - 144*x^2 - 28*x + 240, x)
```

wynik: $\left[x = (-3), x = 5, x = \left(-\frac{4}{3}\right), x = 2\right]$

Chcąc rozłożyć równanie na czynniki liniowe, a tym samym znaleźć pierwiastki równania musimy zastosować polecenie **factor**.

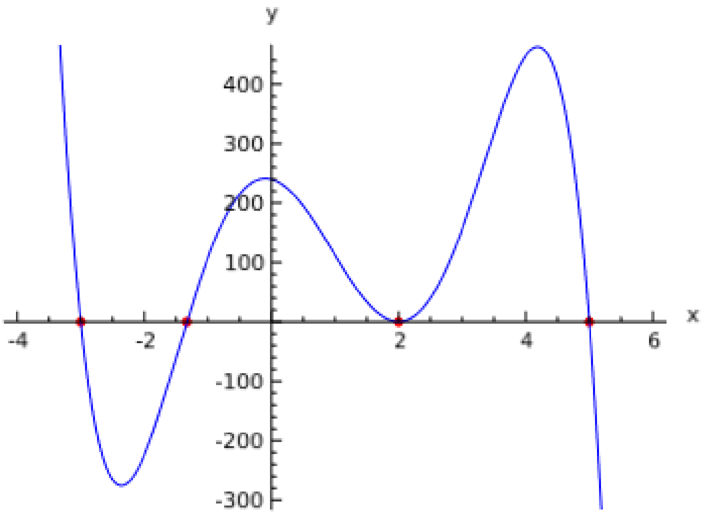
```
sage:  f = -3*x^5 + 14*x^4 + 33*x^3 - 144*x^2 - 28*x + 240
sage:  f.factor()
```

wynik: $-(3x + 4)(x + 3)(x - 2)^2(x - 5)$

Mając pierwiastki równania możemy **narysować wykres** wielomianu i zaznaczyć na nim wszystkie jego pierwiastki czerwonymi punktami.

```
sage: pkt = [(-3,0), (-4/3,0), (2,0), (5,0)]
sage: plot(f, x, -4, 6) + \
    points( pkt,size=15,color='red')
```

Wynik działania polecenia:



W *Sage Math* możemy **operować na lewej i prawej stronie** równania z osobna.

```
sage: r_nie = sqrt(x+2*x^2) == (sin(x)+2*x^3)
sage: r_nie
```

wynik: $\sqrt{2\,x^2 + x} = 2\,x^3 + \sin(x)$

```
sage: r_nie.left()
```

wynik: $\sqrt{2\,x^2 + x}$

```
sage: r_nie.right()
```

wynik: $2\,x^3 + \sin(x)$

```
sage: r_nie/r_nie.right()
```

wynik: $\frac{\sqrt{2\,x^2 + x}}{2\,x^3 + \sin(x)} = 1$

Równania można tworzyć ze zdefiniowanych wcześniej wyrażeń algebraicznych. Jeśli mamy np. trzy wyrażenia:

```
sage:  wyr1 = sqrt(2*x+4)

sage:  wyr2 = x^2-4; wyr3 = x^3-8
```

to możemy stworzyć następujące równania:

```
sage:  r_nie1 = wyr1 == wyr2
```

wynik: $\sqrt{2\,x+4} = x^2 - 4$

```
sage:  r_nie2 = wyr1 / wyr2 == wyr3
```

wynik: $\frac{\sqrt{2\,x+4}}{x^2-4} = x^3 - 8$

itd...

Możemy też wyodrębnić tylko jedną stronę równania. Zobaczmy jak wygląda prawa strona równania `r_nie1` oraz lewa strona równania `r_nie2`.

```
sage:  r_nie1.right()
```

wynik: $x^2 - 4$

```
sage:  r_nie2.left()
```

wynik: $\frac{\sqrt{2\,x+4}}{x^2-4}$

Widzimy, że równanie drugie jest wymierne i w liczniku posiada pierwiastek kwadratowy. Oznacza to, że powinniśmy zbadać jego dziedzinę. Przyrównajmy więc jego mianownik do zera i rozwiążmy to równanie.

```
sage:  mianownik = r_nie2.left().denominator()
```

wynik: $x^2 - 4$

```
sage:  solve(mianownik == 0, x)
```

wynik: $\left[x = (-2), x = 2\right]$

2. Rozwiązywanie układów równań.

Funkcją **solve** można też rozwiązywać układy równań. Weźmy następujący układ:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$$

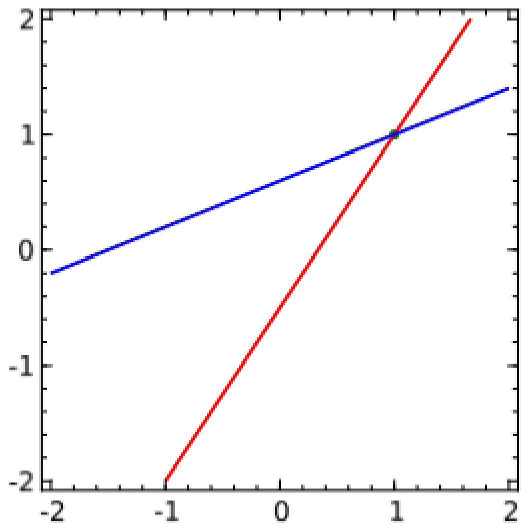
Aby znaleźć rozwiązanie należy wydać polecenie:

```
sage:  var('x,y')
sage:  solve([3*x-2*y==1, 2*x-5*y==-3], x,y)
```

wynik: $[[x = 1, y = 1]]$

Do zilustrowania układu równań moglibyśmy użyć poznanej wcześniej funkcji **plot** dla każdego y. Nie musimy jednak tego robić, ponieważ *Sage* posiada specjalną funkcję do tego przeznaczoną: **implicit_plot**. Jako pierwszy parametr przekazujemy funkcji równanie, które chcemy wykreślić, następnie podajemy przedziały zmiennych x i y.

```
sage: implicit_plot(3*x-2*y==1,(x,-2,2),(y,-2,2),color="red")\
   + implicit_plot(2*x-5*y==-3,(x-2,2),(y,-2,2),color="blue")\
   + points([(1,1)], size=15,color='green', figsize=4)
```



Inny przykład:

$$\begin{cases} y - \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

```
sage: var('x,y')
sage: solve([y-sqrt(3)*x==2*sqrt(3), x^2+y^2==4], x,y)
```

wynik: $\left[\left[x = (-1), y = \sqrt{3}\right], \left[x = (-2), y = 0\right]\right]$

Interpretacja graficzna:

```
sage: implicit_plot(y-sqrt(3)*x==2*sqrt(3),(x,-3,3),(y,-3,3))\
   + implicit_plot(x^2+y^2==4,(x-3,3),(y,-3,3),color="blue")\
   + points([(1,1)], size=15,color='green', figsize=4)
```