W. KRYSICKI • L. WŁODARSKI

ANALIZA MATEMATYCZNA W ZADANIACH

część I

ISBN 83-01-02440-2
9 788301 024406

ANALIZA MATEMATYCZNA
W ZADANIACH

WŁODZIMIERZ KRYSICKI, LECH WŁODARSKI

ANALIZA MATEMATYCZNA W ZADANIACH

CZĘŚĆ PIERWSZA

Wydanie XXV

WARSZAWA 1999
WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

**Okładkę projektował
K. RACINOWSKI**

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
ul. Miodowa 10, 00-251 Warszawa
Tel.: 69 54 321, e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.com.pl

ISBN 83-01-01460-1

PRZEDMOWA

Celem niniejszego podręcznika jest nauczenie Czytelnika rozwiązywania zadań z analizy matematycznej (w zakresie pierwszego roku studiów technicznych i przyrodniczych) przy pełnym zrozumieniu stosowanego aparatu teoretycznego. Chcąc uchronić Czytelnika przed mechanicznym rozwiązywaniem zadań, czyli stosowaniem szablonów bez dokładnego wnikania w treść stosowanych pojęć oraz bez sprawdzania, czy spełnione są założenia stosowanych twierdzeń, na początku każdego rozdziału podajemy potrzebne definicje i twierdzenia. Chodziło nam też o to, żeby w ten sposób ułatwić Czytelnikowi korzystanie przy rozwiązywaniu zadań z różnych podręczników. Autorzy podręczników często bowiem w różny sposób formułują pojęcia, podają twierdzenia przy różnych założeniach, a nawet stosują różną symbolikę.

Każdy rozdział składa się z zadań całkowicie rozwiązanych i zadań do samodzielnego rozwiązywania. Dzięki temu Czytelnik może z jednej strony nauczyć się we właściwy sposób rozwiązywać zadania, a z drugiej strony zdobyć pełną samodzielność przy ich rozwiązywaniu. Dla umożliwienia Czytelnikowi kontrolowania, czy właściwie rozwiązuje zadania, na końcu podręcznika są podane odpowiedzi do zadań nie rozwiązanych. Przy trudniejszych zadaniach podaliśmy ponadto wskazówki do ich rozwiązania, aby umożliwić przerobienie wszystkich zadań nawet słabiej przygotowanym Czytelnikom.

Analiza matematyczna jest działem matematyki, który przez swe subtelne rozważania, zwłaszcza związane z pojęciem granicy, nastręcza studiującym duże trudności. Opracowanie teorii analizy matematycznej jest możliwe jedynie przez wniknięcie właśnie w te subtelne rozważania, a więc przez dokładne studiowanie twierdzeń wraz z dowodami. Z drugiej strony, wyrażamy nadzieję, że nasz podręcznik może stanowić pewną ilustrację tej teorii, pomocną do jej zrozumienia, a to właśnie dzięki dokładnemu formułowaniu definicji i twierdzeń przed ich stosowaniem w zadaniach.

*

Niniejsze wydanie ukazuje się w zmienionej i rozszerzonej postaci. Przyczyną tego była chęć autorów dostosowania nowego wydania do zmienionego programu matematyki na wyższych studiach technicznych, zarówno na studiach dziennych, jak wieczorowych i zaocznych. Zostały dodane pewne wiadomości wstępne dla ułatwienia pokonywania trudności występujących w pierwszym okresie studiów oraz elementy kombinatoryki, macierze wraz z zastosowaniami oraz całki funkcji jednej zmiennej. Natomiast do części drugiej zostały przeniesione zagadnienia związane z funkcją dwóch i więcej zmiennych. Poza tym w wielu miejscach autorzy dokonali różnych uzupełnień.

Autorzy

Łódź, marzec 1969

Rozdział I

POJĘCIA WSTĘPNE, NIERÓWNOŚCI, RÓWNANIA MODUŁOWE

§ 1.1. POJĘCIA WSTĘPNE

Dużymi literami A, B, C, ... będziemy oznaczali *zbiory*, małymi a, b, c, ... *elementy zbiorów*. Zapis

$$a \in A,$$

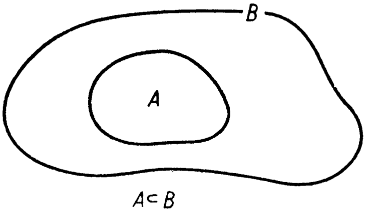
oznacza, że element a *należy* do zbioru A, a zapis

$$a \notin A$$

że element a nie należy do zbioru A. Zapis

$$A \subset B \quad \text{lub} \quad B \supset A$$

oznacza, że zbiór A *jest zawarty w zbiorze* B, tzn. każdy element zbioru A jest elementem zbioru B; mówimy także wtedy, że A jest *podzbiorem* B lub że B jest *nadzbiorem* A (rys. 1.1). W szczególności warunek $A \subset B$ jest spełniony, gdy zbiory A i B *pokrywają się* (są *identyczne*). Gdy $A \subset B$ oraz $A \neq B$, to mówimy, że A jest *podzbiorem właściwym* zbioru B.



Rys. 1.1

Zapis (warunek), w którym występują litery (np. x, y, z, ...), oznaczające dowolne liczby należące do pewnego zbioru X, a który po podstawieniu za te litery jakichkolwiek liczb należących do zbioru X staje się przy każdym podstawieniu albo zdaniem prawdziwym albo zdaniem fałszywym (przy różnych podstawieniach może być różnie), nazywa się *funkcją zdaniową*. Na przykład zapis $x^4-4<0$ oraz $x^2+y^2=4$, gdzie x i y oznaczają dowolne liczby rzeczywiste, są funkcjami zdaniowymi.

Niech teraz $S(x)$ oznacza pewną funkcję zdaniową. Wówczas zapis

$$\{x \in X : S(x)\}$$

oznacza zbiór tych wszystkich liczb x należących do zbioru X, dla których funkcja zdaniowa $S(x)$ jest prawdziwa.

PRZYKŁAD. Jeżeli wprowadzimy oznaczenia:
R — zbiór liczb rzeczywistych,
N — zbiór liczb naturalnych, tzn. całkowitych i dodatnich,
P — zbiór liczb parzystych i dodatnich,
Q — zbiór liczb nieparzystych i dodatnich,
to zapis

$$\{x \in P: 3 < x < 10\}$$

oznacza liczby 4, 6, 8, a zapis

$$\{x \in Q: 3 < x < 10\}$$

oznacza liczby 5, 7, 9.

Zbiór

$$\{x \in R: a \leqslant x \leqslant b\}$$

(mający nieskończenie wiele elementów), gdzie a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$, nazywamy *przedziałem domkniętym* i oznaczamy symbolem $\langle a, b\rangle$ (lub $[a, b]$). Zbiór

$$\{x \in R: a < x < b\},$$

gdzie a i b spełniają warunki jak poprzednio, nazywamy *przedziałem otwartym* i oznaczamy symbolem (a, b).

Mamy oczywiście $(a, b) \subset \langle a, b\rangle$.

Zbiorem pustym nazywamy zbiór nie mający żadnego elementu; zbiór ten oznaczamy symbolem O lub symbolem $\emptyset$.

PRZYKŁAD. Zbiór

$$\{x \in R: x^2 < -4\}$$

jest zbiorem pustym.

Niech litery p i q oznaczają odpowiednio dwa zdania orzekające (prawdziwe lub fałszywe). Wówczas za pomocą tych zdań oraz tzw. *funktorów* możemy utworzyć nowe zdania (złożone) w następujący sposób:

(1.1.1) $\sim p$ czytamy: nieprawda, że p (lub krótko: nie p),

(1.1.2) $p \vee q$ czytamy: p lub q,

(1.1.3) $p \wedge q$ czytamy: p i q,

(1.1.4) $p \Rightarrow q$ czytamy: jeśli p, to q (lub: z p wynika q).

Zdanie (1.1.1) uważamy za prawdziwe, jeśli p jest fałszywe, a za fałszywe, jeśli p jest prawdziwe. Zdanie (1.1.2) uważamy za prawdziwe, jeśli co najmniej jedno ze zdań p lub q jest prawdziwe; w innych przypadkach (to znaczy jeśli p i q są fałszywe) zdanie (1.1.2) uważamy za fałszywe. Zdanie (1.1.3) uważamy za prawdziwe, jeśli oba zdania p i q są zdaniami prawdziwymi; w innych przypadkach zdanie (1.1.3) uważamy za fałszywe. Zdanie (1.1.4) uważamy za prawdziwe, jeśli oba zdania p i q są prawdziwe, albo jeśli p jest zdaniem fałszywym; w innych przypadkach (to znaczy gdy p jest prawdziwe a q fałszywe) uważamy zdanie (1.1.4) za fałszywe. Jeżeli $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$, to piszemy

(1.1.5) $$p \equiv q \quad (\text{lub } p \Leftrightarrow q),$$

i czytamy: p wtedy i tylko wtedy, gdy q.

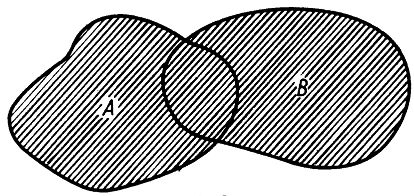
W zdaniu złożonym (1.1.1) użyty funktor nazywa się *funktorem negacji*, w zdaniu (1.1.2) *funktorem alternatywy*, w zdaniu (1.1.3) *funktorem koniunkcji*, a w zdaniu (1.1.4) *funktorem implikacji* (*wynikania*).

§ 1.2. ALGEBRA ZBIORÓW

W paragrafie tym umówimy się, że będziemy mówili tylko o podzbiorach $A, B, \ldots$ jednego określonego zbioru X, zwanego w takim przypadku *przestrzenią* (np. zbioru liczb rzeczywistych). Umawiamy się również, że zapis

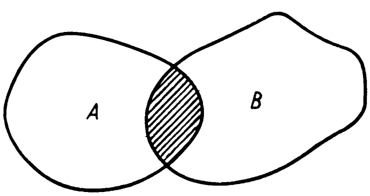
$$\{x: S(x)\}$$

będzie oznaczał to samo, co zapis $\{x \in X: S(x)\}$ określony w poprzednim paragrafie.



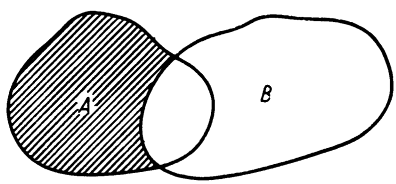
$A \cup B$

Rys. 1.2



$A \cap B$

Rys. 1.3



$A \setminus B$

Rys. 1.4

Określimy teraz kolejno za pomocą objaśnionej w poprzednim paragrafie symboliki *sumę mnogościową* $A \cup B$ zbiorów A i B (rys. 1.2, część zakreskowana), *przekrój* (*iloczyn mnogościowy*) $A \cap B$ zbiorów A i B (rys. 1.3, część zakreskowana) i *różnicę mnogościową* $A \setminus B$ (lub: $A - B$) zbiorów A i B (rys. 1.4, część zakreskowana). Mamy mianowicie

(1.2.1) $$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\},$$

(1.2.2) $$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\},$$

(1.2.3) $$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Tak określone działania dodawania i mnożenia zbiorów są
1° przemienne, tzn.

$$A\cup B=B\cup A \quad \text{oraz} \quad A\cap B=B\cap A;$$

2° łączne, tzn.

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \quad \text{oraz} \quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

3° mnożenie jest rozdzielne względem dodawania oraz dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia, tzn.

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \quad \text{oraz} \quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

ZADANIE 1.1. Wykazać, że

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

Rozwiązanie. Dla dowodu wykażemy, że jeżeli jakiś element x należy do zbioru, stojącego po lewej stronie równości, to należy także do zbioru, stojącego po prawej stronie równości, i na odwrót.

Przypuśćmy, że $x\in A\cap(B\cup C)$, to znaczy, że $x\in A$ oraz $x\in B\cup C$. To drugie zdanie oznacza, że $x\in B$ lub $x\in C$. Przypuśćmy, że $x\in B$. Wobec tego, że z poprzedniego wynikało, że $x\in A$, mamy $x\in A\cap B$, a zatem także $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Dowód w przeciwną stronę, to znaczy wykazanie, że z tego, że $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, wynika, że $x\in A\cap(B\cup C)$, przebiega podobnie.

(1.2.4) *Dopełnieniem* A' zbioru A do zbioru X (przestrzeni X) nazywamy zbiór $X\setminus A$.

Zadania

Wykazać prawdziwość następujących wzorów:

1.2. $\langle 2,5\rangle\cup\langle 3,7\rangle=\langle 2,7\rangle$.

1.3. $(1,3)\cap(3,5)=\emptyset$.

1.4. $(A\setminus B)\cap B=\emptyset$.

1.5. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

1.6. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

1.7. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

1.8. $A'\cap B'=(A\cup B)'$.

1.9. $A'\cup B'=(A\cap B)'$.

§ 1.3. KWANTYFIKATORY

Przy zapisie funkcji zdaniowych używamy często symboli zwanych *kwantyfikatorami*. Niech $S(x)$ i $T(x)$ oznaczają odpowiednio dwie funkcje zdaniowe. Zapis

(1.3.1) $$\bigwedge_x S(x)$$

odczytujemy: dla każdego x jest $S(x)$; zapis

(1.3.2) $$\bigvee_x S(x)$$

odczytujemy: istnieje takie x, że $S(x)$; zapis

$$\bigwedge_{T(x)} S(x) \tag{1.3.3}$$

odczytujemy: dla każdego x spełniającego warunek $T(x)$ zachodzi $S(x)$; zapis

$$\bigvee_{T(x)} S(x) \tag{1.3.4}$$

odczytujemy: istnieje takie x spełniające warunek $T(x)$, dla którego zachodzi $S(x)$.

Symbol $\wedge$ nazywamy *kwantyfikatorem dużym* lub *kwantyfikatorem ogólnym*; zamiast symbolu $\wedge$ używamy czasem symbolu $\forall$ lub symbolu $\prod$. Symbol $\vee$ nazywamy *kwantyfikatorem małym* lub *kwantyfikatorem szczegółowym*; zamiast symbolu $\vee$ używamy czasem symbolu $\exists$ lub symbolu $\sum$.

PRZYKŁAD. Zapis

$$\bigwedge_{x>2} x^2>4$$

odczytujemy: dla każdego $x>2$ jest $x^2>4$. Zdanie to jest oczywiście prawdziwe. Natomiast zdanie

$$\bigwedge_{x^2>4} x>2$$

jest fałszywe, bo np. liczba $x=-3$ nie spełnia tego zdania. Zdanie

$$\bigwedge_{x>0} \{x^2>4 \Rightarrow x>2\}$$

jest prawdziwe.

Ważne są reguły postępowania związane z zaprzeczaniem zdań, w których występują kwantyfikatory. Mamy następujące reguły

$$\sim \bigwedge_{x\in X} S(x) \equiv \bigvee_{x\in X} (\sim S(x)), \tag{1.3.5}$$

$$\sim \bigvee_{x\in X} S(x) \equiv \bigwedge_{x\in X} (\sim S(x)). \tag{1.3.6}$$

W jednym zdaniu możemy użyć kilku kwantyfikatorów. Na przykład

$$\sim \bigwedge_{x\in X} \bigvee_{y\in Y} S(x,y) \equiv \bigvee_{x\in X} \bigwedge_{y\in Y} (\sim S(x,y)). \tag{1.3.7}$$

Widzimy, że przy zaprzeczaniu zdania duży kwantyfikator przechodzi w mały, mały w duży, a zdanie $S(x,y)$ przechodzi w zdanie $\sim S(x,y)$. Trzeba również podkreślić, że zmiana kolejności użytych kwantyfikatorów zmienia sens zdania.

Kwantyfikatorów używamy często w zdaniach definiujących; podamy definicje sumy i iloczynu rodziny zbiorów. Przypuśćmy, że zbiory A_γ, gdzie *indeks* $\gamma\in\Gamma$, są podzbiorami pewnego określonego zbioru X. Wówczas

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x: \bigvee_{\gamma} x\in A_\gamma\}, \tag{1.3.8}$$

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x: \bigwedge_{\gamma} x\in A_\gamma\}. \tag{1.3.9}$$

Gdy zbiór Γ indeksów (wskaźników) γ ma dwa elementy, wówczas wzór (1.3.8) pokrywa się ze wzorem (1.2.1), a wzór (1.3.9) ze wzorem (1.2.2).

Zadania

Wykazać prawdziwość następujących *wzorów de Morgana*:

1.10. $(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)' = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma$. **1.11.** $(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)' = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma$.

Wskazówka. Wykorzystać wzory (1.3.5) i (1.3.6); definicja dopełnienia zbioru A' – patrz (1.2.4); por. też zadania 1.8 i 1.9.

§ 1.4. RELACJE (DWUARGUMENTOWE)

Niech A i B oznaczają pewne zbiory. *Iloczynem kartezjańskim* $A\times B$ nazywamy zbiór wszystkich par (a, b) takich, że $a\in A$, $b\in B$. Za pomocą określonych poprzednio symboli definicję iloczynu kartezjańskiego możemy zapisać w następujący sposób:

(1.4.1) $$A\times B=\{(a, b):\ a\in A,\ b\in B\}.$$

Możemy oczywiście rozpatrywać iloczyn kartezjański jakiegoś zbioru A przez siebie, tzn. $A\times A$. Będzie to zbiór wszystkich par (a', a'') takich, że $a'\in A$ oraz $a''\in A$.

Przez *relację* R w zbiorze A rozumiemy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A\times A$. Zapisy $(a', a'')\in R$ oraz $a'\,R\,a''$ uważamy za równoważne.

Na przykład, jeżeli X jest dowolnym zbiorem, to w klasie jego podzbiorów określiliśmy relację inkluzji $A\subset B$. W zbiorze liczb rzeczywistych przykładem relacji jest relacja $\leqslant$.

Relację R w zbiorze A nazywamy *relacją przechodnią*, jeżeli zachodzi implikacja

(1.4.2) $$\bigwedge_{a\in A}\ \bigwedge_{b\in A}\ \bigwedge_{c\in A} ((a\,R\,b)\wedge(b\,R\,c))\Rightarrow(a\,R\,c).$$

Relacje $\subset$ i $\leqslant$ są przechodnie. Przy relacji $\subset$ litery a, b, c oznaczają dowolne podzbiory pewnego zbioru X, a litera A rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X. Przy relacji $\leqslant$ litery a, b, c oznaczają dowolne liczby rzeczywiste, a litera A zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Również relacja $<$ jest przechodnia.

Relację R w zbiorze A nazywamy *relacją zwrotną*, jeżeli

(1.4.3) $$\bigwedge_{a\in A} a\,R\,a.$$

Obie relacje $\subset$ i $\leqslant$ są zwrotne, a relacja $<$ nie jest zwrotna.

Relację R w zbiorze A nazywamy *relacją symetryczną*, jeżeli

(1.4.4) $$\bigwedge_{a'\in A}\ \bigwedge_{a''\in A} (a'\,R\,a'')\Rightarrow(a''\,R\,a').$$

Na przykład żadna ze wspomnianych relacji nie jest symetryczna (natomiast relacja równości jest symetryczna).

Relację R w zbiorze A nazywamy *relacją antysymetryczną*, jeżeli

(1.4.5) $$\bigwedge_{a' \in A} \bigwedge_{a'' \in A} ((a' R a'') \wedge (a'' R a')) \Rightarrow (a' = a'').$$

Na przykład relacje $\subset$ i $\leqslant$ są antysymetryczne.

Mówimy, że *zbiór A jest częściowo uporządkowany* ze względu na relację R, jeżeli relacja R w zbiorze A jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.

Na przykład zbiór wszystkich podzbiorów określonego zbioru X jest częściowo uporządkowany ze względu na relację $\subset$.

Mówimy, że *zbiór A jest liniowo uporządkowany* (lub po prostu: *uporządkowany*) ze względu na relację R, jeżeli relacja R w zbiorze A jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna oraz zachodzi warunek

(1.4.6) $$\bigwedge_{a' \in A} \bigwedge_{a'' \in A} (a' R a'') \vee (a'' R a').$$

Na przykład zbiór liczb rzeczywistych jest liniowo uporządkowany ze względu na relację $\leqslant$, ponieważ relacja ta jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna oraz jeżeli dane są dwie liczby rzeczywiste, to zawsze jedna z nich jest mniejsza albo równa drugiej.

§ 1.5. NIERÓWNOŚCI STOPNIA PIERWSZEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

Jeżeli dwa wielomiany, z których jeden jest stopnia n, a drugi co najwyżej stopnia n (w szczególności może być równy stałej) połączymy znakiem $\leqslant$, $\geqslant$, $<$ albo $>$, to mówimy, że mamy *nierówność stopnia n*.

W szczególności, nierówność stopnia drugiego nazywamy *nierównością kwadratową*, a nierówność stopnia pierwszego *nierównością liniową*.

Nierówności ze znakiem $\leqslant$ albo $\geqslant$ nazywamy *nierównościami słabymi*, a nierówności ze znakiem $<$ albo $>$ *nierównościami ostrymi*.

Będziemy tutaj rozpatrywali tylko nierówności z jedną niewiadomą. *Rozwiązaniem nierówności* nazywamy zbiór takich liczb, które po wstawieniu ich za niewiadomą dają zdanie prawdziwe (nierówność prawdziwą). Dwie nierówności nazywamy *nierównościami równoważnymi*, jeżeli mają takie same rozwiązanie.

Zachodzą twierdzenia:

(1.5.1) *Jeżeli do obu stron danej nierówności dodamy ten sam dowolny wielomian, to otrzymamy nierówność równoważną.*

(1.5.2) *Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy przez liczbę dodatnią, to otrzymamy nierówność równoważną.*

(1.5.3) *Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy przez liczbę ujemną i zmienimy znak nierówności, to otrzymamy nierówność równoważną.*

Uwaga. Nie wolno mnożyć nierówności stronami przez wyrażenie o znaku niewiadomym lub zmiennym.

Nierówności stopnia pierwszego z jedną niewiadomą rozwiązujemy zupełnie podobnie jak równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą. Zobaczymy to najlepiej na przykładzie.

ZADANIE 1.12. Rozwiązać nierówność

$$2(x-3)+5<3(2x-7)-2.$$

Rozwiązanie. Po wymnożeniu nawiasów i redukcji otrzymujemy

$$2x-1<6x-23.$$

Przenosząc niewiadome na lewą stronę, a wiadome na prawą stronę nierówności (przenoszenie wyrażeń odpowiada odjęciu tych wyrażeń od obu stron nierówności) dostajemy nierówność równoważną

$$-4x<-22;$$

po podzieleniu obu stron tej nierówności przez -4 otrzymujemy nierówność równoważną

$$x>5{,}5,$$

która określa jednocześnie rozwiązanie podanej w zadaniu nierówności.

Zajmiemy się teraz nierównościami, których rozwiązanie można sprowadzić bądź do rozwiązania nierówności liniowej, bądź do rozwiązania układu nierówności liniowych.

ZADANIE 1.13. Rozwiązać nierówność

$$2x+\frac{1}{x-2}\leqslant 10+\frac{1}{x-2}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Nierówność (1) ma sens przy zastrzeżeniu, że

$$x\neq 2. \tag{2}$$

Do obu stron nierówności (1) dodajemy wyrażenie $-\frac{1}{x-2}$; otrzymamy wtedy nierówność

$$2x\leqslant 10. \tag{3}$$

Obie strony nierówności (3) dzielimy przez 2 i otrzymujemy nierówność równoważną

$$x\leqslant 5. \tag{4}$$

Nierówność (1) jest równoważna nierównościom (3) i (4) przy zastrzeżeniu (2). Biorąc więc pod uwagę (4) oraz zastrzeżenie (2) otrzymujemy następujące rozwiązanie nierówności (1):

$$x<2 \quad \text{lub} \quad 2<x\leqslant 5.$$

ZADANIE 1.14. Rozwiązać nierówność

$$\frac{1}{x-1}>2.$$

Rozwiązanie. Mamy zastrzeżenie, że $x\neq 1$. Przenosimy 2 na lewą stronę nierówności (czyli po obu stronach nierówności odejmujemy 2):

$$\frac{1}{x-1}-2>0.$$

Zauważmy, że nie wolno mnożyć przez mianownik $x-1$ (por. uwagę na str. 13). Sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$\frac{1-2(x-1)}{x-1}>0, \quad \text{skąd} \quad \frac{-2x+3}{x-1}>0;$$

mnożymy obie strony nierówności przez -1 i otrzymujemy

$$\frac{2x-3}{x-1}<0.$$

Jeżeli ułamek ma być ujemny, to mamy dwie możliwości:
1° licznik dodatni, a mianownik ujemny,
2° licznik ujemny, a mianownik dodatni.

Przypadek 1°. Mamy

$$2x-3>0, \quad x-1<0,$$

czyli

$$x>\tfrac{3}{2}, \quad x<1.$$

Stwierdzamy z zestawienia, że w tym przypadku rozwiązań nie ma.

Przypadek 2°. Mamy

$$2x-3<0, \quad x-1>0,$$

czyli

$$x<\tfrac{3}{2}, \quad x>1,$$

co możemy napisać w postaci

$$1<x<\tfrac{3}{2}.$$

Określony zbiór jest rozwiązaniem zadanej nierówności.

Zadanie 1.15. Rozwiązać nierówność

$$\frac{2}{x-1}\geqslant\frac{1}{x}, \tag{1}$$

Rozwiązanie. Robimy zastrzeżenie, że $x\neq0$, $x\neq1$. Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę nierówności, sprowadzamy występujące tam ułamki do wspólnego mianownika i po redukcji otrzymujemy nierówność równoważną

$$\frac{x+1}{x(x-1)}\geqslant0. \tag{2}$$

Oznaczmy wyrażenie stojące po lewej stronie nierówności (2) symbolem $L(x)$. Znak $L(x)$ zależy od znaków trzech wyrażeń liniowych: $x+1$, x, $x-1$. Znak $L(x)$ może się zmienić tylko wtedy, gdy się zmieni znak jednego z tych wyrażeń liniowych. Chcąc więc znaleźć wszystkie przedziały, w których zachodzi nierówność (2), robimy tabelkę, w której umieszczamy wszystkie liczby, dla których chociażby jedno z podanych wyżej wyrażeń liniowych równa się zeru; w naszym przykładzie są to liczby: -1, 0, 1 (znak $\|$ w ostatnim wierszu tabelki oznacza, że tu $L(x)$ nie jest określone):

x	$-\infty$	...	-1	...	0	...	1	...	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$L(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$+$

Z tabelki tej odczytujemy rozwiązanie nierówności (2):

(3) $$-1 \leqslant x < 0 \quad \text{lub} \quad x > 1,$$

które jest jednocześnie rozwiązaniem nierówności (1), równoważnej nierówności (2).

Zadania

Rozwiązać nierówności (zad. 1.16 - 1.20):

1.16. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2} > \dfrac{x}{6}$.

1.17. $\dfrac{1}{x} > 2$.

1.18. $\dfrac{2x+1}{3x-5} < 0$.

1.19. $2 > \dfrac{3}{x-3}$.

1.20. $\dfrac{3}{x+1} > \dfrac{2}{x-2}$.

§ 1.6. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI MODUŁOWE

Przypominamy, że *wartością bezwzględną* lub *modułem* $|x|$ liczby rzeczywistej x nazywamy

(1.6.1) $$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{gdy} \quad x < 0. \end{cases}$$

A więc moduł liczby nieujemnej równa się jej samej, moduł zaś liczby ujemnej równa się tej liczbie ze znakiem przeciwnym. Z definicji tej wynika, że moduł każdej liczby jest nieujemny, tzn. zawsze $|x| = |-x| \geqslant 0$, przy czym równa się zeru tylko dla liczby zero. Na przykład mamy $|5| = 5$, $|0| = 0$, $|-5| = 5$.

Podamy teraz przykłady rozwiązywania równań, gdy niewiadoma występuje pod znakiem modułu.

ZADANIE 1.21. Rozwiązać równanie

(1) $$|x-2| = 5.$$

Rozwiązanie. Rozpatrzymy dwa przypadki: $x \geqslant 2$ i $x < 2$.

1° $x \geqslant 2$. Wówczas $|x-2| = x-2$ i równanie (1) jest równoważne równaniu

(2) $$x-2=5, \quad \text{skąd} \quad x=7.$$

Ponieważ ta wartość spełnia warunek 1°, wobec tego jest rozwiązaniem równania (1).

2° $x<2$. Wówczas $|x-2| = -(x-2) = -x+2$ i równanie (1) jest równoważne równaniu

(3) $$-x+2=5, \quad \text{skąd} \quad x=-3.$$

Wartość ta spełnia warunek 2°, wobec tego jest także rozwiązaniem równania (1).

Ostatecznie więc równanie (1) ma dwa rozwiązania $x_1=-3$, $x_2=7$.

ZADANIE 1.22. Rozwiązać równanie

(1) $$|x+1| = -1.$$

Rozwiązanie. Ponieważ wartość bezwzględna każdej liczby jest nieujemna, więc lewa strona równania (1) jest przy każdym x nieujemna. Wobec tego równanie (1) jest sprzeczne, czyli nie ma żadnych rozwiązań.

ZADANIE 1.23. Rozwiązać równanie

(1) $$|2x-1| = |x-3|.$$

Rozwiązanie. Rozróżniamy przypadki: $x \geqslant 3$, $\frac{1}{2} \leqslant x < 3$ i $x < \frac{1}{2}$ (rozpatrując trzy przedziały liczbowe ograniczone pierwiastkami wyrażeń znajdujących się pod znakiem modułu).

1° $x \geqslant 3$. Wówczas $|2x-1| = 2x-1$ oraz $|x-3| = x-3$. Równanie (1) przybiera postać

(2) $$2x-1=x-3, \quad \text{skąd} \quad x=-2.$$

Liczba ta nie spełnia warunku 1°, wobec tego odpada jako rozwiązanie równania (1).

2° $\frac{1}{2} \leqslant x < 3$. Wówczas $|2x-1| = 2x-1$ oraz $|x-3| = -x+3$. Równanie (1) przybiera postać

(3) $$2x-1=-x+3, \quad \text{skąd} \quad x=\tfrac{4}{3}.$$

Liczba ta spełnia warunek 2°, a więc jest rozwiązaniem równania (1).

3° $x<\frac{1}{2}$. Wówczas $|2x-1| = -2x+1$ oraz $|x-3| = -x+3$ i równanie (1) ma postać

(4) $$-2x+1=-x+3, \quad \text{skąd} \quad x=-2.$$

Otrzymaliśmy dla równania (4) ten sam pierwiastek co dla równania (2). Ale obecnie liczba ta spełnia warunek 3°, więc jest także rozwiązaniem równania (1).

Ostatecznie więc równanie (1) ma dwa rozwiązania $x_1=-2$, $x_2=\frac{4}{3}$

Uwaga. Liczby ograniczające przedziały rozpatrywane w naszych przypadkach znajdujemy przez przyrównanie wyrażeń stojących pod znakiem modułu do zera, a więc w naszym zadaniu jako pierwiastki równań $2x-1=0$ oraz $x-3=0$.

Zadanie 1.24. Rozwiązać równanie

(1) $$|2x-1|+|x-2|=6.$$

Rozwiązanie. Rozpatrzymy przypadki $x \geqslant 2$, $\frac{1}{2} \leqslant x < 2$ i $x < \frac{1}{2}$.

1° $x \geqslant 2$. Wówczas $|2x-1|=2x-1$ oraz $|x-2|=x-2$. Równanie (1) możemy więc napisać w postaci

(2) $$2x-1+x-2=6, \quad \text{skąd} \quad x=3.$$

Liczba ta spełnia warunek 1°, wobec tego jest rozwiązaniem równania (1).

2° $\frac{1}{2} \leqslant x < 2$. Wówczas $|2x-1|=2x-1$ oraz $|x-2|=-x+2$. Równanie (1) można napisać w postaci

(3) $$2x-1-x+2=6, \quad \text{skąd} \quad x=5.$$

Liczba ta nie spełnia warunku 2°, wobec tego nie jest rozwiązaniem równania (1).

3° $x < \frac{1}{2}$. Wówczas $|2x-1|=-2x+1$ oraz $|x-2|=-x+2$, zatem równanie (1) można napisać w postaci

(4) $$-2x+1-x+2=6, \quad \text{skąd} \quad x=-1.$$

Liczba ta spełnia warunek 3° i wobec tego jest rozwiązaniem równania (1).

Ostatecznie więc równanie (1) ma dwa rozwiązania $x_1=-1$, $x_2=3$.

Przechodzimy teraz do rozpatrywania nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem modułu.

Podamy najpierw dwa ważne związki. Niech litera a oznacza dowolną ustaloną liczbę rzeczywistą, a litera b dowolną ustaloną liczbę dodatnią. Wówczas mamy następujące związki (por. str. 16):

(1.6.2) $$((|x-a|<b) \wedge (b>0)) \equiv (a-b<x<a+b),$$

(1.6.3) $$(|x-a|>b \wedge (b>0)) \equiv ((x<a-b) \vee (x>a+b)).$$

Przykład. Nierówność $|x-5| \leqslant 2$ jest równoważna nierówności

$$3 \leqslant x \leqslant 7,$$

a nierówność $|x+1|>2$ alternatywie nierówności

$$x<-3 \quad \text{lub} \quad x>1.$$

Zadanie 1.25. Rozwiązać nierówność

(1) $$\left|\frac{4x-5}{2x+7}\right|<3.$$

Rozwiązanie. Robimy zastrzeżenie, że $x \neq -\frac{7}{2}$ Nierówność naszą możemy napisać w postaci nierówności podwójnej

$$-3 < \frac{4x-5}{2x+7} < +3.$$

Muszą więc być spełnione jednocześnie dwie nierówności

$$\frac{4x-5}{2x+7} > -3 \tag{2}$$

oraz

$$\frac{4x-5}{2x+7} < 3. \tag{3}$$

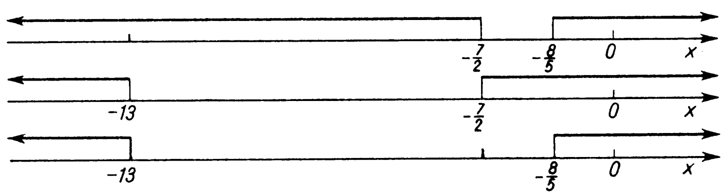
Rozwiązujemy najpierw nierówność (2). Mamy

$$\frac{10x+16}{2x+7} > 0, \quad \text{skąd} \quad \frac{5x+8}{2x+7} > 0.$$

Rozpatrujemy więc alternatywnie dwie możliwości

1° $5x+8>0$, $2x+7>0$, skąd $x > -\frac{8}{5}$,

2° $5x-8<0$, $2x-7<0$, skąd $x < -\frac{7}{2}$.



Rys. 1.5

Po zestawieniu wyników nierówność (2) jest spełniona, gdy

$$x < -\frac{7}{2} \quad \text{albo} \quad x > -\frac{8}{5}.$$

Rozwiązując analogicznie nierówność (3) otrzymujemy

$$\frac{x+13}{2x+7} > 0,$$

skąd

$$x < -13 \quad \text{albo} \quad x > -\frac{7}{2}.$$

Jednoczesne rozwiązanie nierówności (2) i (3) najwygodniej znaleźć metodą graficzną (rys. 1.5). Z zestawienia tego widzimy, że nierówności (2) i (3) są spełnione jednocześnie, czyli jest spełniona nierówność (1), gdy

$$x < -13 \quad \text{albo} \quad x > -\tfrac{8}{5}.$$

ZADANIE 1.26. Rozwiązać nierówność

$$\left|\frac{4x+1}{2x-3}\right| > 2. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Robimy zastrzeżenie, że $x \neq \frac{3}{2}$. Nierówność możemy napisać w postaci alternatywy dwóch nierówności (tzn. ma być spełniona jedna albo druga):

$$\frac{4x+1}{2x-3} < -2 \tag{2}$$

albo

$$\frac{4x+1}{2x-3} > 2. \tag{3}$$

Rozwiązujemy nierówność (2). Mamy

$$\frac{4x+1}{2x-3} + 2 < 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{8x-5}{2x-3} < 0,$$

skąd $\frac{5}{8} < x < \frac{3}{2}$.

Rozwiązujemy nierówność (3). Mamy

$$\frac{4x+1}{2x-3} - 2 > 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{7}{2x-3} > 0.$$

Nierówność ta jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $2x-3>0$, czyli gdy $x > \frac{3}{2}$.

Biorąc pod uwagę, że nierówności (2) i (3) mają być spełnione alternatywnie, widzimy że rozwiązanie nierówności (1) jest następujące:

$$x > \tfrac{5}{8}, \quad \text{przy czym} \quad x \neq \tfrac{3}{2}.$$

Zadania

Rozwiązać następujące równania (zad. 1.27 - 1.32):

1.27. $|x+1| = 3$.

1.28. $|x+1| = |x-1|$.

1.29. $|x+1| + 2|x-1| = 5$.

1.30. $|1-2x| + |2x-6| = x$.

1.31. $|4-2x| + |-x+3| = 5$.

1.32. $|x^2-7x+8| = 2$.

Rozwiązać następujące nierówności (zad. 1.33 - 1.40):

1.33. $|\frac{1}{4}x-1| < 5$.

1.34. $|3x-5| < |x+9|$.

1.35. $|x+100| > |2x-1|$.

1.36. $|x-1| + |2x-5| < 9$.

1.37. $\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|<2.$ **1.38.** $\left|\frac{5x-3}{2x+7}\right|<2.$

1.39. $\left|\frac{2x-5}{x+3}\right|>1.$ **1.40.** $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}>1.$

§ 1.7. NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

Każdą nierówność stopnia drugiego (nierówność kwadratową) można sprowadzić do postaci

(1.7.1) $$ax^2+bx+c>0,$$

przy czym zamiast znaku $>$ może być $<$, $\geqslant$ lub $\leqslant$. Możemy również założyć, że

(1.7.2) $$a>0,$$

ponieważ w przypadku gdy $a<0$, przez pomnożenie obu stron nierówności przez -1 sprowadzamy nierówność do przypadku, gdy współczynnik przy x^2 jest dodatni (oczywiście zmieniając jednocześnie znak nierówności na przeciwny).

Rozwiązanie nierówności typu (1.7.1) łączy się ściśle z wykresem funkcji kwadratowej

(1.7.3) $$y=ax^2+bx+c.$$

Nierówność (1.7.1) jest bowiem spełniona dokładnie dla tych x, dla których odpowiednie punkty (x, y) wykresu funkcji (1.7.3) znajdują się ponad osią Ox (wtedy rzędna y jest dodatnia).

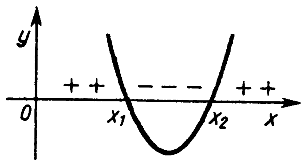
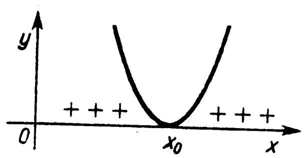
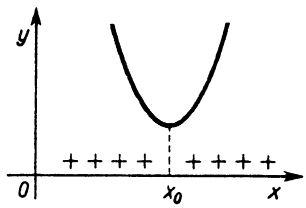
Wykres funkcji (1.7.3) jest krzywą zwaną *parabolą*, przy czym kształt tej paraboli zależy wyłącznie od współczynnika a przy x^2. Współczynniki b i c mają tylko wpływ na położenie paraboli względem układu współrzędnych Oxy. Przy założeniu (1.7.2) parabola (1.7.3) jest zwrócona wierzchołkiem ku dołowi (jest wypukła, por. str. 188), tzn. trójmian ax^2+bx+c ma minimum (por. str. 186). Minimum to zawsze jest przyjęte dla wartości $x=-b/2a$ i równa się $-\Delta/4a$, gdzie *wyróżnik* $\Delta=b^2-4ac$.

Oznaczmy

(1.7.4) $$T(x)\equiv ax^2+bx+c.$$

Położenie paraboli (1.7.3) względem osi Ox oraz istnienie *miejsc zerowych trójmianu* $T(x)$ (to jest takich wartości x, dla których $T(x)=0$) zależy od znaku wyróżnika Δ trójmianu kwadratowego $T(x)$.

Podajemy tabelę, z której, w zależności od znaku wyróżnika Δ, będzie można odczytywać rozwiązania nierówności typu (1.7.1) przy założeniu (1.7.2). W przypadku $\Delta>0$ miejsca zerowe trójmianu $T(x)$ oznaczamy przez x_1 i x_2, a w przypadku $\Delta=0$ podwójne miejsce zerowe trójmianu $T(x)$ przez x_0. Oczywiście w tym przypadku $x_0=-b/2a$, przy czym dla $x=x_0$ trójmian $T(x)$ przyjmuje wartość minimalną równą 0.

Znak Δ	Wykres trójmianu ($a>0$)	Warunek	Rozwiązanie
$\Delta>0$		$T(x)>0$	$x<x_1$ albo $x>x_2$
		$T(x)=0$	$x=x_1$ albo $x=x_2$
		$T(x)<0$	$x_1<x<x_2$
$\Delta=0$		$T(x)>0$	$x\neq x_0$
		$T(x)=0$	$x=x_0$
		$T(x)<0$	nigdy
$\Delta<0$		$T(x)>0$	zawsze
		$T(x)=0$	nigdy
		$T(x)<0$	nigdy

Zadanie 1.41. Rozwiązać nierówność $-2x^2+5x-2<0$.

Rozwiązanie. Mnożymy nierówność stronami przez -1 (aby otrzymać $a>0$):

$$2x^2-5x+2>0.$$

Mamy $\Delta=25-16=9>0$ oraz $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$. Jest to przypadek, gdy $\Delta>0$, mamy więc rozwiązanie

$$x<\tfrac{1}{2} \quad \text{lub} \quad x>2.$$

Zadanie 1.42. Rozwiązać nierówność $x^2+x+1<0$.

Rozwiązanie. Mamy $\Delta=1-4<0$. Jest to przypadek, gdy $\Delta<0$. Z tabelki widzimy, że nierówność jest sprzeczna.

Zadanie 1.43. Rozwiązać nierówność $4x^2-12x+9>0$.

Rozwiązanie. Mamy $\Delta=144-144=0$. Jest to przypadek, gdy $\Delta=0$. Nierówność spełniona, gdy $x\neq\frac{12}{8}$, czyli $x\neq\frac{3}{2}$.

Zadanie 1.44. Rozwiązać nierówność

$$\frac{x-2}{x+3}<0.$$

Rozwiązanie. Robimy zastrzeżenie, że $x \neq -3$. Przy tym zastrzeżeniu zamiast naszej nierówności możemy rozpatrzyć nierówność równoważną

$$(x-2)(x+3)<0$$

(przy iloczynie i ilorazie tego samego znaku zachodzą te same kombinacje znaków). Trójmian jest już w formie iloczynowej mamy więc od razu $x_1=-3$, $x_2=2$. Jest to przypadek, gdy $\Delta>0$. Zatem nierówność jest spełniona, gdy $-3<x<2$.

ZADANIE 1.45. Rozwiązać nierówność

$$\frac{x^2+x+2}{x^2-x-2}<0.$$

Rozwiązanie. Robimy zastrzeżenie, że $x^2-x-2 \neq 0$. Oznaczmy

$$L(x) \equiv x^2+x+2 \quad \text{oraz} \quad M(x) \equiv x^2-x-2.$$

Mamy $\Delta_L=1-8=-7<0$, zatem licznik $L(x)$ jest zawsze większy od zera. Natomiast $\Delta_M=1+8=9>0$, zatem mianownik ma dwa miejsca zerowe $x_1=-1$, $x_2=2$, a nasza nierówność będzie spełniona gdy $x^2-x-2<0$, czyli gdy $-1<x<2$.

ZADANIE 1.46. Rozwiązać nierówność

(1) $$\frac{1}{x}-\frac{3}{2(x+1)}>1.$$

Rozwiązanie. Robimy zastrzeżenie, że $x \neq 0$ i $x \neq -1$. Przenosząc wszystkie wyrazy na lewą stronę i sprowadzając do wspólnego mianownika otrzymujemy

$$\frac{2(x+1)-3x-2x(x+1)}{2x(x+1)}>0, \quad \text{skąd} \quad \frac{2x^2+3x-2}{x(x+1)}<0.$$

Oznaczmy $L(x) \equiv 2x^2+3x-2$; wówczas $\Delta_L=25>0$, $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{2}$. Podobnie oznaczając $M(x) \equiv (x+1)$ mamy $\Delta_M>0$, $x_1=-1$, $x_2=0$.

Rozpatrzymy dwa przypadki:

1° $L(x)<0$, $M(x)>0$, wówczas otrzymujemy

$$-2<x<\tfrac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad x<-1 \text{ lub } x>0;$$

2° $L(x)>0$, $M(x)<0$, wówczas

$$x<-2 \text{ lub } x>\tfrac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad -1<x<0$$

Nierówności podane w przypadku 2° nie mogą być nigdy spełnione. Zatem rozwiązaniem nierówności (1) jest zbiór określony za pomocą warunków $-2<x<-1$ lub $0<x<\frac{1}{2}$.

Zadania

Rozwiązać następujące nierówności (zad. 1.47 - 1.55):

1.47. $\dfrac{x+3}{x-3}>\dfrac{x-1}{x+5}.$

1.48. $\dfrac{1-2x}{1+x}-\dfrac{1+x}{1+2x}>1.$

1.49. $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x}<0.$

1.50. $\dfrac{13}{x-3}-\dfrac{3}{x+1}<-4.$

1.51. $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+4}>0.$

1.52. $\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}<0.$

1.53. $1<\dfrac{2x^2-7x-29}{x^2-2x-15}<2.$

1.54. $\left|\dfrac{x^2-5x+3}{x^2-1}\right|<1.$

1.55. $\left|\dfrac{x^2+2x-36}{x^2-4}\right|>1.$

§ 1.8. INDUKCJA MATEMATYCZNA (ZUPEŁNA)

(1.8.1) *Zasada indukcji matematycznej* (*zupełnej*) mówi, że *jeżeli*

1° *pewna liczba naturalna* n_0 *ma własność* W,

2° *z tego, że dowolna liczba naturalna* $k\geqslant n_0$ *ma własność* W, *wynika, że liczba* $k+1$ *ma własność* W,

to każda liczba naturalna $n\geqslant n_0$ *ma własność* W.

Za pomocą indukcji matematycznej dowodzimy twierdzeń i wzorów dotyczących liczb naturalnych. Jeżeli więc chcemy np. udowodnić prawdziwość pewnego wzoru, w którym występuje zmienna naturalna n, dla wszystkich możliwych n, to musimy

1° sprawdzić prawdziwość tego wzoru dla $n=1$.

2° zakładając prawdziwość wzoru dla $n=k$ (*założenie indukcyjne*), wykazać jego prawdziwości dla $n=k+1$ (*teza indukcyjna*).

Z tego wyniknie prawdziwość wzoru dla wszystkich liczb naturalnych.

ZADANIE 1.56. Wykazać, że

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Sprawdzamy wzór dla $n=1$; mamy $1^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, a więc punkt 1° jest spełniony.

Teraz zakładamy, że prawdziwe jest założenie indukcyjne

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k^3}{3}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{6},$$

a twierdzimy, że jest prawdziwa teza indukcyjna

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)^3}{3}+\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{k+1}{6}.$$

Będzie to oczywiste, jeżeli wykażemy, że lewe i prawe strony tezy i założenia różnią się o tę samą liczbę. Lewe strony tezy i założenia różnią się oczywiście o $(k+1)^2$. Obliczamy różnicę prawych stron; mamy

$$\frac{(k+1)^3}{3}+\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{k+1}{6}-\frac{k^3}{3}-\frac{k^2}{2}-\frac{k}{6}=k^2+k+\tfrac{1}{3}+k+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}=(k+1)^2,$$

czyli te różnice są rzeczywiście równe.

A więc na podstawie indukcji zupełnej wykazaliśmy prawdziwość żądanego wzoru.

Zadanie 1.57. Wykazać, że dla każdego n prawdziwa jest tzw. *nierówność Bernoulliego*

$$(1)\qquad (1+a)^n \geqslant 1+na \quad \text{dla} \quad a>-1.$$

Rozwiązanie. Prawdziwość wzoru dla $n=1$ jest oczywista. Załóżmy teraz, że wzór jest prawdziwy dla $n=k$, tzn. zachodzi nierówność $(1+a)^k \geqslant 1+ka$. Mnożąc obie strony założenia indukcyjnego przez $1+a>0$, otrzymujemy

$$(1+a)^{k+1} \geqslant (1+ka)(1+a), \quad \text{czyli} \quad (1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a+ka^2,$$

a więc tym bardziej

$$(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a,$$

co oznacza prawdziwość wzoru dla $k+1$, czyli prawdziwość tezy indukcyjnej.

W ten sposób prawdziwość żądanego wzoru została udowodniona na podstawie indukcji zupełnej.

Zadanie 1.58. Wykazać, że dla każdego n prawdziwy jest wzór

$$(1)\qquad \sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha-\cos(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Rozwiązanie. Sprawdzamy wzór dla $n=1$; mamy

$$\sin\alpha=\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha-\cos\frac{3}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Związek ten jest oczywiście spełniony; wystarczy zastosować wzór na $\cos\gamma-\cos\beta$.

Zakładamy teraz, że jest spełnione założenie indukcyjne

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin k\alpha=\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha-\cos(k+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

a twierdzimy, że jest spełniona teza indukcyjna

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin k\alpha+\sin(k+1)\alpha=\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha-\cos(k+\frac{3}{2})\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Lewe strony tezy i założenia różnią się o $\sin(k+1)\alpha$. Obliczmy różnicę prawych stron. Po prostej redukcji otrzymujemy

$$\frac{\cos(k+\frac{1}{2})\alpha-\cos(k+\frac{3}{2})\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Stosując ponownie wzór na różnicę cosinusów otrzymujemy $\sin(k+1)\alpha$.

W ten sposób udowodniliśmy, że z założenia indukcyjnego wynika teza indukcyjna, a więc wzór (1) podany (na zasadzie indukcji matematycznej) jest prawdziwy.

Zadania

Wykazać za pomocą indukcji matematycznej, że prawdziwe są następujące wzory dla każdej liczby naturalnej n (zad. 1.59 - 1.64):

1.59. $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

1.60. Wzór na n-ty wyraz $a_n=a_1q^{n-1}$ postępu geometrycznego.

1.61. Wzór na n-tą sumę cząstkową postępu geometrycznego

$$s_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}, \qquad q\neq 1.$$

1.62. $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

1.63. Uogólnienie nierówności Bernoulliego:

$$(1+a)^n\geqslant 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2 \quad \text{dla} \quad a\geqslant 0.$$

1.64. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\frac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}-1\right)$.

§ 1.9. DWUMIAN NEWTONA

Dwumianem Newtona nazywamy wzór na n-tą potęgę dwumianu $a+b$. We wzorze tym używamy symbolu $\binom{n}{k}$ (czytaj *n nad k*), zwanego *symbolem Newtona* i określonego następująco([1]):

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{1.9.1}$$

przy czym $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, gdzie symbol $k!$ (czytaj: *k silnia*) oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do k, przy czym przyjmujemy $0!=1$.

PRZYKŁAD. Mamy

$$\binom{n}{1}=n, \quad \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

([1]) W literaturze spotykamy też oznaczenia $\binom{n}{k}=C_n^k$.

Zauważmy, że zachodzi związek

$$(n+1)!=(n+1)\,n!. \tag{1.9.2}$$

Wzór na *dwumian Newtona* jest następujący:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+b^n. \tag{1.9.3}$$

Wzoru tego dowodzi się za pomocą indukcji matematycznej (por. § 1.8) dowodząc prawdziwości wzoru na współczynniki

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}. \tag{1.9.4}$$

Współczynniki rozwinięcia n-tej potęgi dwumianu $a+b$ można również znaleźć za pomocą tzw. *trójkąta Pascala*

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Trójkąt ten budujemy z liczb w ten sposób, że na początku i na końcu każdego wiersza piszemy 1, a inne wyrazy danego wiersza otrzymujemy jako sumę dwóch najbliższych wyrazów stojących w wierszu znajdującym się nad danym wierszem. Liczby stojące w $(n+1)$-szym wierszu są współczynnikami rozwinięcia $(a+b)^n$, np.

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Zadania

1.65. Wykazać, że $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}=\binom{8}{4}$

Wskazówka. Wykorzystać wzór (1.9.4).

1.66. Znaleźć siódmy wyraz rozwinięcia $(2a+b^2)^8$.

1.67. Wykazać, że suma wszystkich współczynników w rozwinięciu dwumianu Newtona $(a+b)^n$ wynosi 2^n, tzn.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n.$$

Udowodnić (zad. 1.68 - 1.71):

1.68. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$

1.69. $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}a^k b^{p-k}=\binom{n}{p}(a+b)^p$ dla $n\geqslant p\geqslant 0$.

1.70. $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=2^p\binom{n}{p}$ dla $n\geqslant p\geqslant 0$.

1.71. $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=0$ dla $n\geqslant p\geqslant 0$.

1.72. Do jakiej potęgi należy podnieść dwumian $a+b$, aby w rozwinięciu suma wykładników potęg liczby a we wszystkich wyrazach wyniosła 120

1.73. Do jakiej potęgi należy podnieść dwumian $a+b$, aby w rozwinięciu suma wykładników potęgi liczby b we wszystkich wyrazach wyniosła 45.

1.74. Na płaszczyźnie dane jest n punktów położonych tak, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Ile różnych prostych można poprowadzić poprzez te punkty?

1.75. W rozwinięciu dwumianu $(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^n$ współczynnik przy trzecim wyrazie wynosi 28. Znaleźć środkowy wyraz rozwinięcia.

1.76. W rozwinięciu dwumianu $(\sqrt[3]{a}+\sqrt{a^{-1}})^{15}$ znaleźć wyraz nie zawierający a.

1.77. Przy jakiej wartości n współczynniki drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu rozwinięcia dwumianu $(x+y)^n$ tworzą postęp arytmetyczny.

1.78. Zbadać, które wyrazy nie zawierają niewymierności w rozwinięciu dwumianu $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^5$.

1.79. Znaleźć piąty wyraz rozwinięcia dwumianu

$$\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n,$$

jeżeli stosunek współczynnika przy trzecim wyrazie do współczynnika przy drugim wyrazie wynosi $\frac{11}{2}$.

1.80. Znaleźć czwarty wyraz rozwinięcia

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{b-a}+\sqrt[3]{\frac{b^2-a^2}{a}}\right)^n,$$

jeżeli współczynnik przy trzecim wyrazie wynosi 21.

1.81. Wyliczyć z dokładnością do 0,001 potęgę $1{,}0005^{36}$.

Wskazówka. Należy zauważyć, że $1{,}0005=1+0{,}0005$.

Rozdział II

CIĄGI NIESKOŃCZONE

§ 2.1. UWAGI OGÓLNE O CIĄGACH

Jeżeli każdej liczbie naturalnej n zostanie przyporządkowana jedna liczba rzeczywista u_n, to mówimy, że został określony *nieskończony ciąg liczbowy.*

Ciąg nieskończony zapisuje się w postaci

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \quad \text{lub} \quad \{u_n\}.$$

Liczby $u_1, u_2, \ldots$ nazywamy *wyrazami ciągu* $\{u_n\}$; symbol u_n nazywamy *wyrazem ogólnym* tego ciągu.

Ciąg nieskończony $\{u_n\}$ ma *granicę* g, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε można znaleźć w ciągu (istnieje w ciągu) takie miejsce N, że dla każdego $n \geqslant N$ zachodzi nierówność

$$|u_n - g| < \varepsilon.$$

Zamiast słów: „ciąg $\{u_n\}$ ma granicę g", mówi się również: „ciąg $\{u_n\}$ dąży do granicy g". Zapisujemy

$$u_n \to g, \text{ gdy } n \to \infty, \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = g.$$

Mówimy, że ciąg nieskończony $\{u_n\}$ ma *granicę* ∞ (plus nieskończoność), jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ można znaleźć w ciągu (istnieje w ciągu) takie miejsce N, że dla każdego $n \geqslant N$ zachodzi nierówność

$$u_n > M.$$

Zamiast słów: „ciąg $\{u_n\}$ ma granicę $+\infty$", mówi się również: „ciąg $\{u_n\}$ dąży do plus nieskończoności". Zapisujemy

$$u_n \to \infty, \text{ gdy } n \to \infty, \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \infty.$$

Mówimy, że ciąg nieskończony $\{u_n\}$ ma *granicę* $-\infty$ (minus nieskończoność), jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ można znaleźć w ciągu (istnieje w ciągu) takie miejsce N, że dla każdego $n \geqslant N$ zachodzi nierówność

$$u_n < -M.$$

Zamiast słów: „ciąg $\{u_n\}$ ma granicę $-\infty$", mówi się również: „ciąg $\{u_n\}$ dąży do minus nieskończoności". Zapisujemy

$$u_n \to -\infty, \text{ gdy } n\to\infty, \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty.$$

Nie każdy ciąg nieskończony ma granicę, na przykład ciąg nieskończony 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... nie ma granicy.

Ciąg nieskończony, który ma granicę skończoną, nazywamy *ciągiem zbieżnym*. Wszystkie inne ciągi nieskończone nazywamy *ciągami rozbieżnymi*; w szczególności jeżeli ciąg $\{u_n\}$ dąży do $+\infty$, to mówimy, że jest *rozbieżny do plus nieskończoności* i podobnie mówimy o ciągu *rozbieżnym do minus nieskończoności.*

Zmiana skończonej ilości wyrazów ciągu nieskończonego nie wpływa na istnienie granicy ciągu ani na jej wartość.

Zadanie 2.1. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$=\frac{2n^2-3n+5}{3+7n-6n^2}.$$

Rozwiązanie. Dzieląc licznik i mianownik przez najwyższą potęgę zmiennej naturalnej (¹) występującą w mianowniku ułamka, tj. przez n^2, otrzymujemy

$$u_n=\frac{\dfrac{2n^2}{n^2}-\dfrac{3n}{n^2}+\dfrac{5}{n^2}}{\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{7n}{n^2}-\dfrac{6n^2}{n^2}}=\frac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{7}{n}-6}.$$

Do licznika i mianownika stosujemy twierdzenie:

(2.1.1) *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n+b_n\}$ ma granicę $a+b$.*

Zauważmy, że przy $n\to\infty$ mamy $3/n\to 0$, $5/n^2\to 0$, $3/n^2\to 0$, $7/n\to 0$. Granicą licznika jest więc $2-0+0=2$, a granicą mianownika $0+0-6=-6$.

Następnie stosujemy twierdzenie:

(2.1.2) *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a, ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, przy czym żaden z wyrazów ciągu $\{b_n\}$ nie równa się zeru, ani też jego granica b nie jest równa zeru, to ciąg ilorazów $\{a_n/b_n\}$ ma granicę a/b.*

A więc

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}.$$

W ten sam sposób postępujemy zawsze, gdy licznik i mianownik są wielomianami tego samego stopnia względem n. Ogólnie biorąc, prawdziwe jest następujące twierdzenie:

(2.1.3) *Jeżeli licznik i mianownik ułamka są wielomianami tego samego stopnia względem zmiennej naturalnej n, to granica takiego ułamka przy $n\to\infty$ równa się stosunkowi współczynników przy najwyższych potęgach n.*

(¹) Tzn. zmiennej przybierającej wartości liczb naturalnych.

ZADANIE 2.2. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n=\frac{4n^3-5n+1}{3n^5+2n^2-4}.$$

Rozwiązanie. Podzielmy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę zmiennej naturalnej n występującą w mianowniku ułamka, tj. przez n^5; po skróceniu poszczególnych ułamków powstałych w liczniku i mianowniku otrzymujemy

$$u_n=\frac{\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^4}+\frac{1}{n^5}}{3+\frac{2}{n^3}-\frac{4}{n^5}}\to\frac{0}{3}=0, \quad \text{gdy} \quad n\to\infty.$$

A więc granicą danego ciągu jest 0.

Ogólnie biorąc, prawdziwe jest twierdzenie:

(2.1.4) *Jeżeli mianownik ułamka jest wielomianem stopnia wyższego względem zmiennej naturalnej n aniżeli licznik, to granica takiego ułamka przy $n\to\infty$ równa się zeru.*

ZADANIE 2.3. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n=\frac{2n^2-5n+8}{15n-3}.$$

Rozwiązanie. Podzielmy licznik i mianownik ułamka przez najwyższą potęgę zmiennej naturalnej n występującą w mianowniku ułamka, tj. przez n; po skróceniu ułamków w liczniku i mianowniku otrzymujemy

$$u_n=\frac{2n-5+\frac{8}{n}}{15-\frac{3}{n}}.$$

Gdy $n\to\infty$, licznik rośnie nieograniczenie, a mianownik dąży do 15, a więc dany ciąg ma granicę $+\infty$.

Mamy twierdzenie:

(2.1.5) *Jeżeli licznik ułamka jest wielomianem względem zmiennej naturalnej n stopnia wyższego niż mianownik, to gdy $n\to\infty$, wartość bezwzględna ułamka dąży do nieskończoności.*

ZADANIE 2.4. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n=\frac{(0{,}99)^n}{n+1}.$$

Rozwiązanie opieramy na wiadomościach o ciągu geometrycznym. Ciąg o wyrazie ogólnym $u_n=q^n$ ma skończoną granicę tylko dla $-1<q\leqslant 1$, przy czym:

(2.1.6) *Jeżeli* $-1<q<1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.

(2.1.7) *Jeżeli* $q=1$, to $q^n=1$, *więc* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=1$.

W myśl wzoru (2.1.6) licznik badanego ułamka ze wzrostem n dąży do zera, a mianownik rośnie nieograniczenie, więc granicą ułamka jest 0:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

ZADANIE 2.5. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \sqrt{4n^2+5n-7} - 2n.$$

Rozwiązanie. Bezpośrednie wnioskowanie z postaci wyrazu u_n jest trudne, bo zarówno odjemna, jak i odjemnik rosną nieograniczenie ze wzrostem n. Przekształćmy to wyrażenie korzystając z następującego wzoru algebry elementarnej:

$$a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}.$$

Otrzymujemy

$$u_n = \frac{(\sqrt{4n^2+5n-7})^2 - 4n^2}{\sqrt{4n^2+5n-7}+2n} = \frac{5n-7}{\sqrt{4n^2+5n-7}+2n}.$$

Dzielimy teraz licznik i mianownik przez n pamiętając o tym, że aby podzielić pierwiastek kwadratowy przez n, należy wyrażenie podpierwiastkowe podzielić przez n^2. Następnie stosujemy twierdzenie:

(2.1.8) *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach nieujemnych ma granicę a, to ciąg $\{\sqrt[p]{a_n}\}$, gdzie p jest ustaloną liczbą naturalną, ma granicę $\sqrt[p]{a}$.*

Jest więc

$$u_n = \frac{5-\dfrac{7}{n}}{\sqrt{4+\dfrac{5}{n}-\dfrac{7}{n^2}}+2} \to \frac{5}{\sqrt{4}+2} = \frac{5}{4}, \quad \text{gdy} \quad n\to\infty.$$

Poszukiwana granica istnieje i jest równa $\frac{5}{4}$.

ZADANIE 2.6. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2+4} - \sqrt[3]{n^3+1}.$$

Rozwiązanie. Przekształćmy dane wyrażenie korzystając z rozkładu różnicy sześcianów

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2),$$

skąd

$$a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}.$$

Otrzymujemy

$$u_n = \frac{(n^3+2n^2+4)-(n^3+1)}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2+4)^2}+\sqrt[3]{(n^3+2n^2+4)(n^3+1)}+\sqrt[3]{(n^3+1)^2}}.$$

Po wykonaniu redukcji licznik ułamka przybiera postać $2n^2+3$. Podzielmy licznik i mianownik przez taką potęgę n, aby w mianowniku otrzymać wyrażenie, którego granicą jest liczba skończona, różna od zera. Widoczne jest, że w tym przykładzie taką potęgą jest n^2.

Zauważmy, że:

1° aby podzielić pierwiastek sześcienny przez n^2, należy wyrażenie podpierwiastkowe podzielić przez $(n^2)^3$, tj. przez n^6;

2° aby podzielić kwadrat wyrażenia przez n^6, można samo wyrażenie podzielić przez n^3;

3° aby podzielić iloczyn dwóch czynników przez n^6, wystarczy podzielić każdy z tych czynników przez n^3.

Po podzieleniu licznika i mianownika przez n^2 przy zastosowaniu podanych reguł i po skróceniu poszczególnych ułamków otrzymujemy

$$u_n=\frac{2+\dfrac{3}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^2}}.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy ostatecznie

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}.$$

Zadanie 2.7. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnvm

$$u_n=\frac{3^{2n+1}-7}{9^n+4}.$$

Rozwiązanie. Zwróćmy uwagę na to, że $3^{2n+1}=3^{2n}\cdot 3^1=(3^2)^n\cdot 3=9^n\cdot 3$. Wyraz ogólny ciągu możemy napisać w postaci

$$u_n=\frac{3\cdot 9^n-7}{9^n+4}$$

i po podzieleniu licznika i mianownika przez 9^n otrzymujemy

$$u_n=\frac{3-\dfrac{7}{9^n}}{1+\dfrac{4}{9^n}}\to\frac{3}{1}=3,\quad \text{gdy}\quad n\to\infty.$$

Granica ciągu istnieje i jest równa 3.

Zadanie 2.8. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n=\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}.$$

Rozwiązanie. Zwróćmy uwagę na oczywistą nierówność

$$7^n < 3^n + 5^n + 7^n < 7^n + 7^n + 7^n,$$

z której wynika, że

$$\sqrt[n]{7^n} < \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 7^n}, \quad \text{czyli} \quad 7 < \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} < 7\sqrt[n]{3}.$$

Zastosujemy tu tzw. *twierdzenie o trzech ciągach*:

(2.1.9) *Jeżeli wyrazy ogólne trzech ciągów* $\{a_n\}$, $\{u_n\}$, $\{b_n\}$ *spełniają* dla $n \geqslant n_0$ *nierówność*

$$a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$$

i jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ *mają wspólną granicę* g, *tzn.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g,$$

to ciąg $\{u_n\}$ *ma tę samą granicę, czyli*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = g.$$

Wyrazy badanego ciągu $\{u_n\}$ są zawarte pomiędzy odpowiednimi wyrazami $a_n = 7$ i $b_n = 7\sqrt[n]{3}$ dwóch ciągów, tzn. $a_n < u_n < b_n$. Opierając się na wzorze

(2.1.10) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dla} \quad a > 0$$

mamy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 7 \cdot 1 = 7$; jest też oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 7$, a więc również $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 7$. Ostatecznie otrzymujemy

$$u_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} \to 7, \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Zadanie 2.9. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n.$$

Rozwiązanie. Gdy $n \to \infty$, wówczas $4/n \to 0$, a więc $1 + 4/n \to 1$. Mogłoby się wobec tego wydawać, że granicą ciągu $\{u_n\}$ jest liczba 1. Wnioskować jednak w ten sposób nie wolno, ponieważ w danym przypadku jednocześnie ze zmianą podstawy potęgi zmienia się wykładnik potęgi.

Aby znaleźć granicę ciągu, przypomnijmy sobie jeden z podstawowych wzorów teorii granic:

(2.1.11) $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

gdzie $e = 2{,}71828\ldots$ jest podstawą logarytmów naturalnych.

Mamy także wzór ogólniejszy

(2.1.12) $$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e, \quad \text{jeżeli} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ i } a_n \neq 0.$$

Weźmy pod uwagę nasz ciąg, przekształcony w następujący sposób:

$$u_n=\left[\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4.$$

Podstawiając we wzorze (2.1.12) $a_n=4/n$ otrzymujemy, że granicą ciągu $\{u_n\}$ jest e^4.

ZADANIE 2.10. Znaleźć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Rozwiązanie. Przekształćmy ułamek dzieląc licznik i mianownik przez n; mamy wówczas

$$u_n=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Gdy $n\to\infty$ mianownik dąży do e, na podstawie wzoru (2.1.11) zadania poprzedniego, a więc

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{e}.$$

ZADANIE 2.11. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n=\sqrt[n]{\frac{1}{n}}.$$

Rozwiązanie. Gdy $n\to\infty$, to $1/n\to 0$ i mogłoby się wydawać, że granicą ciągu $\{u_n\}$ jest liczba 0. Ale tak nie jest, gdyż jednocześnie ze zmniejszaniem się liczby podpierwiastkowej stopień pierwiastka n rośnie nieograniczenie, co wpływa na powiększenie się wyrazów ciągu począwszy od u_3. Jest bowiem

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<\frac{1}{\sqrt[4]{4}}<\frac{1}{\sqrt[5]{5}}<\ldots<\frac{1}{\sqrt[n]{n}}<\ldots$$

Granicę rozważanego ciągu obliczamy na podstawie jednego z podstawowych wzorów teorii granic:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1. \tag{2.1.13}$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{1}=1$$

ZADANIE 2.12. Wykazać, że jeżeli dla ciągu $\{u_n\}$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=q<1,$$

to $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Rozwiązanie. Weźmy pod uwagę ciąg bezwzględnych wartości wyrazów danego ciągu: $\{|u_n|\}$. Ciąg ten od pewnego miejsca musi być malejący, ponieważ na podstawie definicji granicy dla każdego ε istnieje takie N, że

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant q+\varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant N.$$

Weźmy ε tak małe, aby $q+\varepsilon<1$; wtedy

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1 \quad \text{czyli} \quad |u_{n+1}| < |u_n|.$$

Ciąg $\{|u_n|\}$, jako malejący i ograniczony liczbą 0, musi mieć granicę nieujemną, skończoną. Twierdzimy, że granicą tą musi być 0, gdyż jeśli $|u_n| \to g \neq 0$, to

$$|u_{n+1}| \to g \quad \text{i} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \to \frac{g}{g} = 1 \neq q,$$

wbrew założeniu.

Wykazaliśmy więc, że $|u_n| \to 0$, a tym samym i $u_n \to 0$, ponieważ $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$.

Uwaga. Podobnie można wykazać, że jeżeli dla ciągu $\{u_n\}$ istnieje

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = q > 1,$$

to $|u_n| \to +\infty$, a więc ciąg $\{u_n\}$ jest rozbieżny.

Zadanie 2.13. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{2^n}.$$

Rozwiązanie. Mamy

$$u_n = \frac{n^{10}}{2^n}, \quad \text{skąd} \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}.$$

Obliczamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10} \cdot 2^n}{2^{n+1} n^{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}}{2} = \frac{1}{2},$$

a więc, na podstawie poprzedniego zadania,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{2^n} = 0.$$

Zadanie 2.14. Kapitał $k=1000$ zł podlega oprocentowaniu po $p=6\%$ rocznie w ciągu $t=3$ lata. Obliczyć kapitał końcowy:

a) gdy odsetki są dopisywane do kapitału w końcu każdego roku;

b) gdy odsetki są dopisywane do kapitału m razy w roku co $1/m$ roku (obliczyć dla $m=12$);

c) gdy oprocentowanie odbywa się w sposób ciągły, tzn. gdy $m\to\infty$.

Rozwiązanie. Mamy

a) $$K_1=k\left(1+\frac{p}{100}\right)^t,$$

b) $$K_m=k\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mt},$$

c) $$K=\lim_{m\to\infty}K_m=\lim_{m\to\infty}k\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mt}=k\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{100m/p}\right]^{pt/100}=ke^{pt/100}.$$

Obliczenia:

a) $$K_1=1000\left(1+\frac{6}{100}\right)^3=1191{,}0\text{ zł},$$

b) $$K_{12}=1000\left(1+\frac{6}{1200}\right)^{12\cdot 3}=1196{,}2\text{ zł},$$

c) $$K=1000e^{6\cdot 3/100}=1197{,}2\text{ zł}.$$

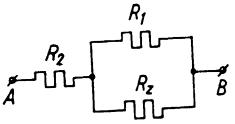
ZADANIE 2.15. Po zamknięciu obwodu elektrycznego, zawierającego oporność czynną oraz indukcyjność, natężenie prądu zmienia się według równania $i=15(1-e^{-2t})$. Obliczyć natężenie prądu w chwili $t=0$ oraz graniczną wartość natężenia przy $t\to\infty$.

Rozwiązanie. Dla $t=0$ mamy $i=0$, a dla $t\to\infty$ mamy

$$i=15\lim_{t\to\infty}(1-e^{-2t})=15.$$

ZADANIE 2.16. W przypadku oporów połączonych jak na podanym rysunku 2.1 oporność wypadkowa wyraża się wzorem

$$R=\frac{R_1R_z}{R_1+R_z}+R_2.$$



Rys. 2.1

Wyznaczyć przedział, w którym zmienia się oporność wypadkowa R, gdy opornik R_z będzie regulowany od 0 do ∞. Wykonać obliczenie dla $R_1=2$ i $R_2=3$.

Rozwiązanie. Zbadajmy pochodną dR/dR_z:

$$\frac{dR}{dR_z}=\frac{R_1(R_1+R_z)-R_1R_z}{(R_1+R_z)^2}=\frac{R_1^2}{(R_1+R_z)^2}.$$

Ponieważ pochodna ta jest stale dodatnia, więc ze wzrostem R_z oporność wypadkowa R rośnie.

Gdy $R_z=0$, oporność wypadkowa wynosi $R=R_2=3$. Aby obliczyć do jakiej granicy dąży R, gdy $R_z \to \infty$, obliczamy

$$\lim_{R_z\to\infty}\left(\frac{2R_z}{2+R_z}+3\right)=\lim_{R_z\to\infty}\left(\frac{2}{\dfrac{2}{R_z}+1}+3\right)=5.$$

A więc gdy oporność R_z zmienia się od 0 do ∞, oporność wypadkowa R rośnie od 3 do 5 omów.

Zadania

Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.17 - 2.40):

2.17. $u_n=\dfrac{n}{n+1}$.

2.18. $u_n=\dfrac{4n-3}{6-5n}$.

2.19. $u_n=\dfrac{n^2-1}{3-n^3}$.

2.20. $u_n=\dfrac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}$.

2.21. $u_n=\dfrac{(n-1)(n+3)}{3n^2+5}$.

2.22. $u_n=\dfrac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$.

2.23. $u_n=\dfrac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$.

2.24. $u_n=\dfrac{3}{n}-\dfrac{10}{\sqrt{n}}$.

2.25. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$.

2.26. $u_n=\left(\dfrac{2n-3}{3n+1}\right)^2$.

2.27. $u_n=\left(\dfrac{5n-2}{3n-1}\right)^3$.

2.28. $u_n=\dfrac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1}$.

2.29. $u_n=\dfrac{\sqrt{n}-2}{3n+5}$.

2.30. $u_n=\dfrac{n-10}{3}$.

2.31. $u_n=\dfrac{(-0{,}8)^n}{2n-5}$.

2.32. $u_n=\dfrac{2-5n-10n^2}{3n+15}$.

2.33. $u_n=\dfrac{2n+(-1)^n}{n}$.

2.34. $u_n=\dfrac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$.

2.35. $u_n=\sqrt{\dfrac{3n-2}{n+10}}$.

2.36. $u_n=\sqrt[3]{\dfrac{n-1}{8n+10}}$.

2.37. $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$.

2.38. $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$.

2.39. $u_n=\dfrac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n}-n}$.

2.40. $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+7n}-2n}$.

Opierając się na zadaniach 2.5 i 2.6 obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad 2.41 - 2.47):

2.41. $u_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$.

2.42. $u_n=\sqrt{n^2+n}-n$.

2.43. $u_n=n-\sqrt{n^2+5n}$.

2.44. $u_n=\sqrt{3n^2+2n-5}-n\sqrt{3}$.

2.45. $u_n=3n-\sqrt{9n^2+6n-15}$.

2.46. $u_n=\sqrt[3]{n^3+4n^2}-n$.

2.47. $u_n=n\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}$.

Opierając się na zadaniu 2.7 znaleźć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.48 - 2.53):

2.48. $u_n=\dfrac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}$.

2.49. $u_n=\dfrac{5\cdot 3^{2n}-1}{4\cdot 9^n+7}$.

2.50. $u_n=\dfrac{3\cdot 2^{2n+2}-10}{5\cdot 4^{n-1}+3}$.

2.51. $u_n=\dfrac{-8^{n-1}}{7^{n+1}}$.

2.52. $u_n=\dfrac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$.

2.53. $u_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\dfrac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$.

Opierając się na zadaniu 2.8 obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.54 - 2.57):

2.54. $u_n=\sqrt[n]{3^n+2^n}$.

2.55. $u_n=\sqrt[n]{10^n+9^n+8^n}$.

2.56. $u_n=\sqrt[n]{10^{100}}-\sqrt[n]{\dfrac{1}{10^{100}}}$.

2.57. $u_n=\sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n+(\frac{3}{4})^n}$.

Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.58 - 2.63):

2.58. $u_n=\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (por. zad. 1.59):

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2.59. $u_n=\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (por. zad. 1.56):

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.60. $u_n=\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$.

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (por. zad. 1.62):

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2.61. $u_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

2.62. $u_n=\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$.

2.63. $u_n=\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\ldots+\dfrac{n}{n^k}$.

Opierając się na zadaniu 2.9 znaleźć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.64–2.70):

2.64. $u_n=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.

2.65. $u_n=\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

2.66. $u_n=\left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n$.

2.67. $u_n=\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^n$.

2.68. $u_n=\left(1-\dfrac{4}{n}\right)^{-n+3}$

2.69. $u_n=\left(\dfrac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$.

2.70. $u_n=\left(\dfrac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.71 - 2.90):

2.71. $u_n=\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$.

2.72. $u_n=\sqrt{n(n-\sqrt{n^2-1})}$.

2.73. $u_n=n(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1})$.

2.74. $u_n=\sqrt[n]{2n^3-3n^2+15}$.

2.75. $u_n=\sqrt{n^{10}-2n^2+2}$.

2.76. $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$.

2.77. $u_n=\dfrac{1}{2n}\cos n^3-\dfrac{3n}{6n+1}$.

2.78. $u_n=2^{-n}a\cos n\pi$.

2.79. $u_n=\dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$.

2.80. $u_n=(\sin n!)\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{2n}{3n+1}\cdot\dfrac{n}{1-3n}$.

2.81. $u_n=\dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-1}-\dfrac{n}{1-2n}\cdot\dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$.

2.82. $u_n=n\left(\ln(n+1)-\ln n\right)$.

2.83. $u_n=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}$.

2.84. $u_n=\dfrac{\log_2 n^5}{\log_8 n}$.

2.85. $u_n=\dfrac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$.

2.86. $u_n=\dfrac{8^{\log_2 n}}{2^n}$.

2.87. $u_n=\dfrac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$.

2.88. $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

2.89. $u_n=\dfrac{2^n\cdot 3^{2n}}{n!}$.

2.90. $u_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\dots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

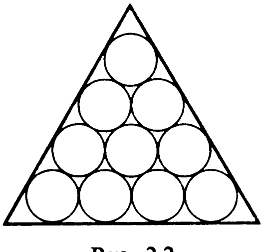
Wskazówka. Każdy czynnik postaci $1-\dfrac{1}{k^2}$ przedstawić w postaci

$$\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k},$$

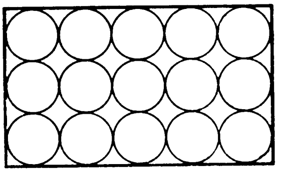
a następnie uprościć iloczyn.

2.91. Okazać, że jeżeli $\sqrt[n]{|u_n|}\to q<1$, to $u_n\to 0$.

2.92. W trójkąt równoboczny o boku a wpisano k_n okręgów o jednakowych promieniach r_k tak jak na rysunku 2.2. Niech S_{k_n} oznacza sumę pól tych okręgów, a S oznacza pole danego trójkąta. Znaleźć granicę stosunku S_{k_n}/S przy $n\to\infty$.



Rys. 2.2



Rys. 2.3

2.93. W prostokąt wpisano k_n okręgów (jak to podano na rysunku 2.3) o jednakowych promieniach. Niech a i b oznaczają długości boków prostokąta, a $a/2n$ promień wpisanych okręgów. Znaleźć granicę stosunku S_{k_n}/S przy $n\to\infty$, jeżeli S_{k_n} oznacza pole k_n wpisanych okręgów, a S pole danego prostokąta.

2.94. Odcinek AB o długości d podzielono na n równych części (rys. 2.4). Na każdej z nich z pominięciem pierwszej i ostatniej zbudowano równoboczne trójkąty. Obliczyć granicę pól S_n i obwodów P_n otrzymanej figury przy $n\to\infty$.

Rys. 2.4

2.95. Punkt P_1 dzieli odcinek AB o długości l na dwie równe części; punkt P_2 dzieli odcinek AP_1 na połowy, punkt P_3 dzieli odcinek P_2P_1 na połowy; punkt P_4 w ten sam sposób dzieli odcinek $P_2\,P_3$ itd. Określić graniczne położenie punktu P_n przy $n\to\infty$.

2.96. Pewna reakcja chemiczna przebiega w ten sposób, że przyrost ilościowy substancji w każdym przedziale czasu τ jest proporcjonalny do długości przedziału i do początkowej ilości materii znajdującej się w początku tego przedziału. Zakładając, że w chwili rozpoczęcia reakcji ilość substancji wynosiła Q_0, określić jej ilość $Q_t^{(n)}$ po upływie czasu t, jeżeli $\tau=t/n$. Znaleźć $Q_t=\lim\limits_{n\to\infty} Q_t^{(n)}$.

Rozdział III

SZEREGI LICZBOWE

§ 3.1. UWAGI OGÓLNE O SZEREGACH

Przez *szereg liczbowy nieskończony* oznaczony symbolem

(1) $$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n\text{[1]}$$

rozumiemy ciąg sum:

(2) $$\begin{aligned} s_1&=u_1, \\ s_2&=u_1+u_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n&=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Liczby $u_1, u_2, \ldots$ nazywamy *wyrazami szeregu*, a symbol u_n nazywamy *wyrazem ogólnym szeregu*. Wyrazy ciągu $\{s_n\}$ nazywamy *sumami cząstkowymi* szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Jeżeli ciąg sum cząstkowych (2) jest zbieżny, czyli ma skończoną granicę s, to mówimy, że *szereg* (1) *jest zbieżny*, a liczbę s nazywamy *sumą szeregu nieskończonego* (1). Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy *szeregiem rozbieżnym*.

Jeżeli szereg (1) jest zbieżny, to na oznaczenie jego sumy s używa się tych samych symboli (1), co na oznaczenie samego szeregu, mianowicie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=s \quad \text{lub} \quad u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=s.$$

Zanotujmy twierdzenia:

(3.1.1) *Warunkiem koniecznym zbieżności każdego szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest to, żeby jego wyraz ogólny* u_n *dążył do zera*:

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0.$$

---

[1] Czasem do oznaczania szeregu wygodnie jest użyć symbolu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, który oznacza ciąg sum o wyrazie ogólnym $s_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$; przez symbol $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ rozumiemy ciąg o wyrazie ogólnym $s_n= =u_2+u_3+\ldots+u_{n+1}$ itp.

(3.1.2) *Jeżeli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny i jego suma równa się* s, *a* c *jest liczbą stałą, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ *jest zbieżny i jego suma jest równa* cs; *jeżeli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest rozbieżny, to przy* $c \neq 0$ *szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ *jest też rozbieżny.*

Specjalnie ważne są omówione poniżej szeregi:

(3.1.3) *Szereg geometryczny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad \text{czyli} \quad a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$$

jest zbieżny, gdy $|q|<1$, tzn. gdy $-1<q<1$, i wówczas suma jego wynosi

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

Szereg geometryczny jest natomiast rozbieżny, gdy $|q| \geqslant 1$, tzn. gdy $q \leqslant -1$ lub $q \geqslant 1$.

(3.1.4) *Szereg harmoniczny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{czyli} \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

jest rozbieżny do ∞.

Uwaga. Zauważmy, że wyraz ogólny $1/n$ szeregu harmonicznego jest średnią harmoniczną wyrazów sąsiednich $1/(n-1)$ i $1/(n+1)$. *Średnią harmoniczną* n liczb $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$ różnych od zera nazywamy

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

(3.1.5) *Szereg harmoniczny rzędu* α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \text{czyli} \quad 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots\frac{1}{n^\alpha}+\ldots,$$

gdzie $\alpha>0$, jest dla $\alpha>1$ zbieżny, a dla $\alpha \leqslant 1$ jest rozbieżny. Dla $\alpha=1$ otrzymujemy szereg podany poprzednio.

Ze względu na metody badania zbieżności szeregów wygodnie jest wyodrębnić dwie grupy:

Szeregi o wyrazach nieujemnych, np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}, \quad \text{czyli} \quad 2+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{3^2}+\ldots+\frac{n+1}{n^2}+\ldots$$

Szeregi przemienne, tzn. szeregi, w których wyrazy dodatnie i ujemne występują regularnie na przemian, np.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n, \quad \text{czyli} \quad -2+2^2-2^3+\ldots+(-2)^n+\ldots$$

Istnieją także szeregi, które nie należą do żadnej z podanych grup, jak np. szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}n, \quad \text{czyli} \quad -1-2+3+4-5-6+7+8-\ldots$$

§ 3.2. SZEREGI O WYRAZACH NIEUJEMNYCH

(3.2.1) Kryterium porównawcze zbieżności szeregów. *Jeżeli dla szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, *gdzie* $u_n \geqslant 0$, *można wskazać taki szereg zbieżny* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *że począwszy od pewnego miejsca* N (*tzn. dla każdego* $n \geqslant N$) *zachodzi nierówność* $u_n \leqslant v_n$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest również zbieżny.*

(3.2.2) Kryterium porównawcze rozbieżności szeregów. *Jeżeli dla szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *można wskazać taki szereg rozbieżny* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *gdzie* $v_n \geqslant 0$, *że począwszy od pewnego miejsca* N (*tzn. dla każdego* $n \geqslant N$) *zachodzi nierówność* $u_n \geqslant v_n$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest również rozbieżny.*

Uwaga. Przy stosowaniu tych kryteriów staramy się tak dobrać szereg $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, aby jego zbieżność lub rozbieżność była znana lub łatwiejsza do zbadania niż zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

(3.2.3) Kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów. *Jeżeli w szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *o wyrazach dodatnich począwszy od pewnego miejsca* N (*tzn. dla każdego* $n \geqslant N$) *stosunek dowolnego wyrazu* u_{n+1} *do poprzedzającego wyrazu* u_n *jest stale mniejszy od pewnej liczby* p *mniejszej od* 1, *tzn. jeżeli*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant p < 1 \quad \textit{dla każdego} \quad n \geqslant N,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny.*

(3.2.4) Kryterium d'Alemberta rozbieżności szeregów. *Jeżeli w szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *o wyrazach dodatnich począwszy od pewnego miejsca* N (*tzn. dla każdego* $n \geqslant N$) *stosunek dowolnego wyrazu* u_{n+1} *do poprzedzającego wyrazu* u_n *jest nie mniejszy od jedności, tzn. jeżeli*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \quad \textit{dla każdego} \quad n \geqslant N,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest rozbieżny.*

Z podanych kryteriów d'Alemberta wynikają wnioski:

(3.2.5) *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=r<1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny.*

(3.2.6) *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=s>1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest rozbieżny.*

(3.2.7) *Jeżeli zaś* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$, *to przypadek jest wątpliwy; należy wtedy stosować inne metody badania zbieżności szeregów.*

(3.2.8) KRYTERIUM CAUCHY'EGO ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW. *Jeżeli dla szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o wyrazach nieujemnych istnieje taka liczba* $p<1$, *że począwszy od pewnego miejsca* N (*tzn. dla każdego* $n\geqslant N$), *zachodzi nierówność*

$$\sqrt[n]{u_n}<p<1,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny.*

(3.2.9) KRYTERIUM CAUCHY'EGO ROZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW. *Jeżeli dla szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *dla nieskończenie wielu wartości* n (*niekoniecznie dla wszystkich*) *zachodzi nierówność*

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest rozbieżny.*

Z podanych kryteriów Cauchy'ego wynikają wnioski:

(3.2.10) *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r<1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny.*

(3.2.11) *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=s>1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest rozbieżny.*

(3.2.12) *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$, *to przypadek jest wątpliwy.*

Uwaga. Kryterium Cauchy'ego jest mocniejsze niż kryterium d'Alemberta; np. w szeregu

$$1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{3}{2^{2n+1}}+\ldots$$

kryterium d'Alemberta nie prowadzi do rozstrzygnięcia sprawy zbieżności tego szeregu, bo stosunek u_{n+1}/u_n jest na przemian większy i mniejszy od 1. Kryterium Cauchy'ego natomiast daje w tym przypadku wynik natychmiastowy, gdyż

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\tfrac{1}{2}<1,$$

a więc szereg jest zbieżny.

W dalszych zadaniach występuje symbol $n!$ (por. § 1.9). Przypominamy, że oznacza on iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n:

$$n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n. \tag{3.2.13}$$

Dodatkowo umawiamy się, że przez 0! rozumiemy 1.

ZADANIE 3.1. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n!}.$$

Rozwiązanie. Wypiszmy kilka wyrazów tego szeregu:

$$\frac{6^1}{1!}+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}+\frac{6^4}{4!}+\frac{6^5}{5!}+\frac{6^6}{6!}+\frac{6^7}{7!}+\ldots,$$

czyli po skróceniu:

$$6+18+36+54+64\tfrac{4}{5}+64\tfrac{4}{5}+55\tfrac{19}{35}+\ldots$$

Widzimy, że do piątego miejsca wyrazy szeregu wzrastają, a od szóstego miejsca zaczynają maleć. Chcąc zbadać zbieżność szeregu stosujemy kryterium d'Alemberta; mamy

$$u_n=\frac{6^n}{n!},\qquad u_{n+1}=\frac{6^{n+1}}{(n+1)!},$$

a więc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{6^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\,6^n}=\frac{6}{n+1}\to 0,\quad \text{gdy}\quad n\to\infty.$$

Pierwszy wniosek z kryterium d'Alemberta jest spełniony, bo $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}/u_n)=0<1$, a więc nasz szereg jest zbieżny (wniosek 3.2.5).

ZADANIE 3.2. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}.$$

Rozwiązanie. Stosujemy kryterium Cauchy'ego; mamy

$$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}}=\frac{(\sqrt[n]{n})^3}{2}$$

Ale $\sqrt[n]{n}$ dąży do 1, na podstawie wzoru (2.1.13), a więc $\sqrt[n]{u_n}$ dąży do $\frac{1}{2}$. Jest więc

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\tfrac{1}{2}<1,$$

a to, na podstawie pierwszego wniosku z kryterium Cauchy'ego, wystarcza do wykazania zbieżności szeregu.

Zadanie 3.3. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$$

Rozwiązanie. Zadanie rozwiążemy dwoma sposobami.

Sposób I. Zauważmy, że wyraz ogólny

$$u_n=\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}$$

jest, zaczynając od czwartego miejsca, mniejszy od $2/n^2$, tzn. jest mniejszy od ogólnego wyrazu szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, a ten szereg jest zbieżny, jako iloczyn liczby 2 przez szereg $\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}$ zbieżny (harmoniczny rzędu wyższego od 1)([1]).

Stąd, na podstawie kryterium (3.2.1), wynika zbieżność rozpatrywanego szeregu.

Sposób II. Zastosujmy kryterium d'Alemberta; mamy

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n!}{n^n}=\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=$$

$$=(n+1)\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Granicą ostatniego ułamka, na podstawie zadania 2.10, jest $1/e$. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{e}<1,$$

co dowodzi na podstawie kryterium (3.2.3), zbieżności badanego szeregu.

Zadanie 3.4. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}, \quad \text{czyli} \quad \cos 1+\cos\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{3}+\ldots+\cos\frac{1}{n}+\ldots$$

Rozwiązanie. Jest to szereg o składnikach dodatnich, gdyż $1/n$ zmienia się od 1 (czyli od 1 radiana) do 0, a w tym przedziale jest $\cos x>0$. Zauważmy, że z ciągłości funkcji $\cos x$ wynika wzór

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=\cos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)=\cos 0=1.$$

Wyraz ogólny szeregu nie dąży do zera, a więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu, tzn. nasz szereg jest rozbieżny.

---

[1]) Patrz (3.1.2) i (3.1.5).

ZADANIE 3.5. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 5^n}{(2n)!}$$

Rozwiązanie. Stosujemy, jak w poprzednim zadaniu, kryterium d'Alemberta. Obliczamy

$$u_{n+1} = \frac{[(n+1)!]^2 \cdot 5^{n+1}}{(2n+2)!}$$

W mianowniku mamy $(2n+2)!$, gdyż wyraz u_{n+1} otrzymujemy ze wzoru na wyraz u_n zastępując wszędzie n przez $n+1$, a więc $2n$ przez $2(n+1)$, czyli przez $(2n+2)$. Mamy więc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{[(n+1)!]^2 \cdot 5^{n+1} \cdot (2n)!}{(2n+2)!(n!)^2 \cdot 5^n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 5}{(2n+1)(2n+2)} =$$

$$= \frac{5(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{5(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{5n+5}{4n+2}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+5}{4n+2} = \frac{5}{4} > 1,$$

więc szereg jest rozbieżny, na mocy kryterium d'Alemberta.

ZADANIE 3.6. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n},$$

czyli

$$\frac{\sqrt{2}-1}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{3} + \ldots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} + \ldots$$

Rozwiązanie. Jest to szereg o wyrazach dodatnich. Weźmy pod uwagę ogólny wyraz tego szeregu:

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$$

Mnożąc licznik i mianownik ułamka przez $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ otrzymujemy

$$u_n = \frac{(n+1)-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}.$$

Jest oczywiste, że $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, więc

$$u_n = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < \frac{1}{2n\sqrt{n}}, \qquad \text{czyli} \quad u_n < \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Wobec tego, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$$

jest zbieżny([1]), więc i szereg rozpatrywany jest zbieżny, na mocy kryterium porównawczego.

ZADANIE 3.7. Obliczyć, jaką wartość liczbową przedstawia ułamek okresowy

$$0,(45)\ldots = 0,454545\ldots$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$0,(45)\ldots = 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \ldots$$

Prawa strona jest szeregiem geometrycznym

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{45}{100^n},$$

którego sumę obliczamy według wzoru (3.1.3) podstawiając $a=0,45$ i $q=0,01$. Mamy

$$0,(45)\ldots = \frac{0,45}{1-0,01} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

ZADANIE 3.8. Obliczyć, jaką wartość liczbową przedstawia ułamek okresowy mieszany

$$0,4(90)\ldots = 0,4909090\ldots$$

Rozwiązanie. Przedstawmy dany ułamek w postaci sumy:

$$0,4(90)\ldots = 0,4 + (0,090 + 0,00090 + 0,0000090 + \ldots).$$

Wyrażenie zawarte w nawiasie jest szeregiem geometrycznym

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{100^n},$$

którego sumą jest

$$\frac{0,09}{1-0,01} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}.$$

Dodając $\frac{1}{11}$ do 0,4 otrzymujemy poszukiwaną wartość ułamka okresowego mieszanego:

$$0,4(90)\ldots = 0,4 + \tfrac{1}{11} = \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{11} = \tfrac{27}{55}.$$

ZADANIE 3.9. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}, \quad \text{czyli} \quad \operatorname{tg}1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2} + \operatorname{tg}\frac{1}{3} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{1}{n} + \ldots$$

([1]) Patrz zadanie 3.3.

Rozwiązanie. Jest to szereg o wyrazach dodatnich, gdyż $1/n$ leży w przedziale $0<1/n\leqslant \leqslant 1$ i wówczas $\operatorname{tg}(1/n)>0$.

Warunek konieczny zbieżności szeregu jest spełniony, gdyż mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}(1/n)=0$. Ale szereg jest rozbieżny. Aby to wykazać, stosujemy kryterium porównawcze opierając się na nierówności $\sin x<x<\operatorname{tg} x$, która zachodzi dla kątów x wyrażonych w mierze łukowej (w radianach) i zawartych w przedziale $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Na podstawie tej nierówności, kładąc $x=1/n$, mamy $\operatorname{tg}(1/n)>1/n$ dla każdej liczby naturalnej n.

Wiemy jednak, że szereg harmoniczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, a więc i nasz szereg, na podstawie kryterium porównawczego (3.2.2), jest rozbieżny.

Zadanie 3.10. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}, \qquad \text{czyli} \qquad \sin 1+\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\ldots+\sin\frac{1}{n}+\ldots$$

Rozwiązanie. Szereg ten, jak i poprzednie, jest szeregiem o wyrazach dodatnich. Chcąc udowodnić jego rozbieżność (mimo że warunek konieczny zbieżności $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ jest spełniony), weźmy wzór

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \tag{3.2.14}$$

gdzie x wyrażone jest w mierze łukowej (w radianach). Podstawiając $x=1/n$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$$

W myśl definicji granicy ciągu (patrz § 2.1) możemy dla dowolnej liczby dodatniej ε znaleźć w ciągu takie miejsce N, żeby była spełniona nierówność

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}-1\right|<\varepsilon \quad \text{dla każdego} \quad n>N,$$

czyli

$$1-\varepsilon<\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon \quad \text{dla} \quad n>N.$$

Przyjmując $\varepsilon=\frac{1}{2}$ mamy

$$1-\tfrac{1}{2}<\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}<1+\tfrac{1}{2},$$

skąd

$$\sin\frac{1}{n}>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad n>N.$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

jest rozbieżny, jako iloczyn liczby $\frac{1}{2}$ przez szereg harmoniczny rzędu 1 [1], a więc na podstawie kryterium porównawczego (3.2.2) stwierdzamy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Zadanie 3.11. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}, \quad \text{czyli} \quad \sin 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}+\ldots$$

Rozwiązanie. Na podstawie nierówności $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ mamy

$$\sin\frac{1}{n}<\frac{1}{n}.$$

Mnożąc obie strony tej nierówności przez $1/\sqrt{n}$ otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}<\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

jest szeregiem harmonicznym rzędu $\alpha=\frac{3}{2}$, a więc jest szeregiem zbieżnym, skąd i nasz szereg, na podstawie kryterium porównawczego (3.2.1), jest też szeregiem zbieżnym.

Zadanie 3.12. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Rozwiązanie. Jest to szereg o składnikach dodatnich. Bierzemy pod uwagę równość

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1, \tag{3.2.15}$$

gdzie x jest wyrażone w mierze łukowej. Podstawiając $x=1/\sqrt{n}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1,$$

---

[1] Patrz (3.1.2) i (3.1.4).

a więc dla dowolnego $\varepsilon>0$ można znaleźć takie N, że

$$1-\varepsilon<\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}<1+\varepsilon \quad \text{dla} \quad n>N.$$

Przyjmując $\varepsilon=1$, dla $n>N$ mamy

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}<2, \quad \text{czyli} \quad \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}<2\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Mnożąc obie strony nierówności przez $1/n$ otrzymujemy

$$\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}<2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{2}{n^{3/2}}.$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3/2}}$$

jest zbieżny(¹). Na podstawie kryterium (3.2.1) szereg badany jest więc zbieżny.

Zadanie 3.13. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\ldots+\frac{1}{n\log n}+\ldots,$$

gdzie logarytmy są dziesiętne.

Rozwiązanie. Składniki szeregu łączymy w grupy w sposób następujący: Pierwsza grupa obejmuje 9 wyrazów:

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\ldots+\frac{1}{10\log 10},$$

druga grupa obejmuje 90 wyrazów:

$$\frac{1}{11\log 11}+\frac{1}{12\log 12}+\ldots+\frac{1}{100\log 100},$$

trzecia grupa obejmuje 900 wyrazów:

$$\frac{1}{101\log 101}+\frac{1}{102\log 102}+\ldots+\frac{1}{1000\log 1000},$$

(¹) Patrz zadanie 3.3.

i tak dalej. Ostatnie wyrazy każdej grupy są najmniejszymi wyrazami tej grupy, przy czym ostatni wyraz pierwszej grupy wynosi

$$\frac{1}{10\log 10}=\frac{1}{10}, \quad \text{gdyż} \quad \log 10=1,$$

ostatni wyraz drugiej grupy wynosi

$$\frac{1}{100\log 100}=\frac{1}{200}, \quad \text{gdyż} \quad \log 100=2,$$

ostatni wyraz trzeciej grupy wynosi

$$\frac{1}{1000\log 1000}=\frac{1}{3000}, \quad \text{gdyż} \quad \log 1000=3,$$

i tak dalej. Jeżeli teraz każdy wyraz w danej grupie zastąpimy ostatnim wyrazem danej grupy, to otrzymamy sumę mniejszą niż poprzednio, przy czym suma 9 wyrazów pierwszej grupy będzie

$$\frac{1}{2\log 2}+\ldots+\frac{1}{10\log 10}>\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{10}=\frac{9}{10},$$

podobnie suma 90 wyrazów drugiej grupy będzie

$$\frac{1}{11\log 11}+\ldots+\frac{1}{100\log 100}>\frac{1}{200}+\ldots+\frac{1}{200}=\frac{90}{200}=\frac{9}{20},$$

tak samo suma 900 wyrazów trzeciej grupy będzie

$$\frac{1}{101\log 101}+\ldots+\frac{1}{1000\log 1000}>\frac{1}{3000}+\ldots+\frac{1}{3000}=\frac{900}{3000}=\frac{9}{30},$$

i tak dalej. Oznaczając przez s_n sumę pierwszych n wyrazów badanego szeregu otrzymujemy kolejno nierówności:

$$s_9>\tfrac{9}{10},$$

$$s_{99}>\tfrac{9}{10}+\tfrac{9}{20}=\tfrac{9}{10}(1+\tfrac{1}{2}),$$

$$s_{999}>\tfrac{9}{10}+\tfrac{9}{20}+\tfrac{9}{30}=\tfrac{9}{10}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_{10^n-1}>\tfrac{9}{10}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}).$$

Po prawej stronie mamy w nawiasie sumę cząstkową szeregu harmonicznego, która przy $n\to\infty$ wzrasta nieograniczenie. Z ostatniej nierówności wynika, że przy $n\to\infty$ suma s_{10^n-1} dąży do plus nieskończoności, więc badany szereg jest rozbieżny.

ZADANIE 3.14. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}.$$

Rozwiązanie. Porównajmy ten szereg ze znanym już szeregiem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Pytamy się, dla jakich wartości α będzie

(1) $$\frac{1}{(\log n)^{\log n}} < \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \text{czyli} \quad (\log n)^{\log n} > n^{\alpha}.$$

Po zlogarytmowaniu otrzymujemy $\log n \log(\log n) > \alpha \log n$, a po podzieleniu obu stron przez $\log n$ mamy

$$\log(\log n) > \alpha.$$

Nierówność ta będzie spełniona, gdy $\log n > 10^{\alpha}$, tzn. dla

(2) $$n > 10^{10^{\alpha}}$$

Jeżeli $\alpha > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ jest zbieżny, a ponieważ dla wartości n spełniającej warunek (2) zachodzi nierówność (1), więc również i dany w zadaniu szereg jest zbieżny, w myśl kryterium (3.2.1).

§ 3.3. SZEREGI PRZEMIENNE

W szeregu o wyrazach dodatnich łączenie wyrazów w grupy, jak i zmiana kolejności składników nie wpływają na zbieżność ani nie zmieniają wartości sumy. Natomiast w szeregu o wyrazach różnego znaku nie wolno tego czynić. Na przykład szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}, \quad \text{czyli} \quad 1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots,$$

jest rozbieżny, gdyż ciąg sum cząstkowych s_n przybiera na przemian wartość 1 (gdy ilość wyrazów jest nieparzysta) i 0 (gdy ilość wyrazów jest parzysta). Otóż łącząc wyrazy tego szeregu w grupy, po dwa wyrazy w jeden składnik nowego szeregu, otrzymujemy

$$(1-1)+(1-1)+\ldots$$

Jest to szereg zbieżny, którego suma równa się zeru. Łącząc zaś odpowiednio wyrazy

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots,$$

otrzymujemy szereg również zbieżny, którego suma równa się 1.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ nazywamy *przemiennym*, jeśli wyrazy jego są naprzemian dodatnie i ujemne.

(3.3.1) KRYTERIUM LEIBNIZA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW. *Jeżeli w szeregu przemiennym $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ począwszy od pewnego miejsca N bezwzględne wartości wyrazów szeregu dążą mono-*

tonicznie do zera, to znaczy, dla każdego $n>N$ spełnione są warunki:

(1) $$|u_{n+1}| \leqslant |u_n|,$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny.*

Uwaga. Warunek (2) jest koniecznym warunkiem zbieżności każdego szeregu; kryterium Leibniza dla szeregów przemiennych wymaga ponadto spełnienia warunku (1).

ZADANIE 3.15. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad \text{czyli} \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots$$

Rozwiązanie. Jest to szereg przemienny, zwany *szeregiem anharmonicznym*. Bezwzględne wartości jego wyrazów monotonicznie dążą do zera:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots>\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>\ldots$$

oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, a więc, na podstawie kryterium Leibniza, szereg jest zbieżny.

ZADANIE 3.16. Zbadać zbieżność szeregu przemiennego

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Rozwiązanie. Warunek konieczny zbieżności $\lim u_n=0$ jest spełniony, ale szereg, jak wykażemy, jest rozbieżny.

Oznaczmy sumę cząstkową jego $2n$ wyrazów przez S_{2n}. Będzie wówczas $S_{2n}=H_n-G_n$, gdzie

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \qquad G_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

Gdy $n\to\infty$, to $H_n\to\infty$, na podstawie wzoru (3.1.4), a $G_n\to 1$, na podstawie wzoru (3.1.3), więc $S_{2n}\to\infty$, co oznacza, że szereg jest rozbieżny.

ZADANIE 3.17. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt[n]{3}-1).$$

Rozwiązanie. Jest to szereg przemienny, którego wyraz ogólny dąży do zera.

Porównajmy wartości bezwzględne dwóch kolejnych wyrazów u_n i u_{n+1}. Nietrudno wykazać, że $|u_{n+1}|<|u_n|$, to znaczy, że

$$\sqrt[n+1]{3}-1<\sqrt[n]{3}-1, \quad \text{czyli} \quad \sqrt[n+1]{3}<\sqrt[n]{3},$$

po podniesieniu bowiem do potęgi $n(n+1)$ otrzymamy oczywistą nierówność $3^n<3^{n+1}$ spełnioną dla każdej wartości naturalnej n.

Wobec spełnienia założeń kryterium Leibniza szereg rozpatrywany jest zbieżny.

(3.3.2) KRYTERIUM BEZWZGLĘDNEJ ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW. *Jeżeli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, *którego wyrazy są równe wartościom bezwzględnym wyrazów szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, *jest zbieżny, to i szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *jest zbieżny.*

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ nazywamy *szeregiem bezwzględnie zbieżnym*, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ jest zbieżny. Na przykład szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

jest bezwzględnie zbieżny, ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny jako szereg harmoniczny rzędu $\alpha=2$.

Szereg zbieżny, który nie jest bezwzględnie zbieżny, nazywamy *szeregiem warunkowo zbieżnym*. Na przykład szereg anharmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

jest warunkowo zbieżny, a nie jest bezwzględnie zbieżny, gdyż szereg bezwzględnych wartości jego wyrazów stanowi rozbieżny szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

ZADANIE 3.18. Zbadać zbieżność szeregu

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Rozwiązanie. Jest to szereg przemienny. Nie spełnia on kryterium Leibniza, gdyż mamy

$$\frac{1}{6^2}>\frac{1}{2^6},\quad \frac{1}{2^6}<\frac{1}{7^2},\quad \frac{1}{7^2}>\frac{1}{2^7},\quad \frac{1}{2^7}<\frac{1}{8^2},\quad \ldots$$

Mimo to jednak szereg jest zbieżny, i to bezwzględnie zbieżny.

Oznaczmy przez S_n sumę wartości bezwzględnych jego n wyrazów i weźmy najpierw pod uwagę tylko ciąg sum parzystych S_{2n}. Łącząc w grupy odpowiednie wyrazy otrzymujemy

$$S_{2n}=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right),$$

czyli

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}.$$

Wiemy, że gdy $n\to\infty$, to obie sumy mają granice skończone: pierwsza granica jest równa sumie szeregu harmonicznego rzędu $\alpha=2$, a więc zbieżnego, druga granica, obliczona ze wzoru (3.1.3), daje 1: a więc

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+1.$$

Okazaliśmy, że ciąg sum cząstkowych parzystych S_{2n} jest zbieżny.

Ażeby dowieść, że ciąg S_n jest zbieżny, należy jeszcze wykazać, że ciąg sum cząstkowych nieparzystych S_{2n+1} jest zbieżny i to do tej samej granicy; wynika to bezpośrednio z równości

$$S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1},$$

wobec tego, że wyraz ogólny danego szeregu dąży do zera.

W ten sposób udowodniliśmy zbieżność szeregu utworzonego z bezwzględnych wartości wyrazów danego szeregu, a więc tym samym udowodniliśmy bezwzględną zbieżność danego szeregu.

§ 3.4. INNE SZEREGI LICZBOWE

Zajmiemy się tutaj szeregami nie należącymi do żadnej z poprzednio rozpatrzonych grup. Przy badaniu zbieżności takich szeregów stosujemy często podane już kryterium bezwzględnej zbieżności szeregów (3.3.2).

ZADANIE 3.19. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\cdot\frac{1}{3^n},$$

czyli

$$-\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}-\ldots-\frac{1}{3^{4n-3}}-\frac{1}{3^{4n-2}}+\frac{1}{3^{4n-1}}+\frac{1}{3^{4n}}-\ldots$$

Rozwiązanie. Szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, gdyż szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów danego szeregu jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $q=\frac{1}{3}$.

ZADANIE 3.20. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{3^n},\quad \text{czyli}\quad \frac{\sin 1}{3}+\frac{\sin 2}{3^2}+\frac{\sin 3}{3^3}+\ldots+\frac{\sin n}{3^n}+\ldots$$

Rozwiązanie. W szeregu tym występują wyrazy dodatnie i ujemne, ale nie na przemian.

Badamy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{3^n} \tag{1}$$

utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów danego szeregu. Biorąc pod uwagę, że dla każdej wartości naturalnej n zachodzi nierówność $|\sin n| \leqslant 1$, mamy $|\sin n|/3^n \leqslant 1/3^n$, więc w myśl kryterium porównawczego szereg (1) jest zbieżny, gdyż szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $q=\frac{1}{3}$. Stąd wniosek, że dany szereg jest bezwzględnie zbieżny.

Zadania

Napisać sumy częściowe podanych niżej szeregów i znaleźć ich granice (zad. 3.21 - 3.25):

3.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Wskazówka. Wykorzystać równość $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

3.22. $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \ldots$

3.23. $\ln 2 + \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{3}) + \ldots$

3.24. $\ln \frac{1}{4} + \ln \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 7} + \ln \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 10} + \ln \frac{4 \cdot 10}{3 \cdot 13} + \ldots$

3.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[2n+1]{x} - \sqrt[2n-1]{x}\right)$.

Mając daną sumę częściową szeregu S_n znaleźć ogólny wyraz szeregu oraz jego sumę (zad. 3.26 - 3.28):

3.26. $S_n = \frac{n+1}{n}$. **3.27.** $S_n = \frac{-1+2^n}{2^n}$. **3.28.** $S_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Zbadać zbieżność następujących szeregów (zad. 3.29 - 3.81):

3.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$. **3.30.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$.

3.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$. **3.32.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$.

3.33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}$.

3.34. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$.

3.35. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$.

3.36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$.

3.37. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}n}$.

3.38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

3.39. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$, przy czym $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a, b, a_n > 0$.

3.40. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n$.

3.41. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\,5^n}{2^n \cdot 3^{n+1}}$.

3.42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n}$.

3.43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^n}$.

3.44. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2}-1)$.

3.45. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

3.46. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$.

3.47. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$.

3.48. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

3.49. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$.

3.50. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln^2 n}$.

3.51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$.

3.52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} \cdot 99^n}{100^n}$.

3.53. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{n+1}}}$.

3.54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!\,(n+3)! \cdot 3^n}{(2n)!}$.

3.55. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}\right)$.

3.56. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \sin \frac{2}{n} \operatorname{tg} \frac{5}{n}\right)$.

3.57. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n!}$.

3.58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2}$.

3.59. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}\right)$.

3.60. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

3.61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$.

3.62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$.

3.63. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin^2 \frac{1}{n}$.

3.64. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\cos^2\frac{1}{n}\right)$

3.65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

3.66. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(na^n)$.

3.67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

3.68. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$.

3.69. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

3.70. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

3.71. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3-n})$.

3.72. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n^3+4}-n)$.

3.73. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n^2+n}-n)}$.

3.74. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-n)}$.

3.75. $\sum_{n=1}^{\infty}\left((\sqrt[3]{8n^3+2n}-2n)\sin\frac{1}{n}\right)$

3.76. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^3}=1+\frac{1+2}{2^2}+\frac{1+2+3}{3^3}+\ldots+\frac{1+2+\ldots+n}{n^3}+\ldots$

3.77. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3-(-1)^n}{2n}=\frac{2}{1}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{2}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots$

3.78. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi$.

3.79. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi$.

3.80. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\log n}}$.

3.81. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$.

3.82. Między krzywymi

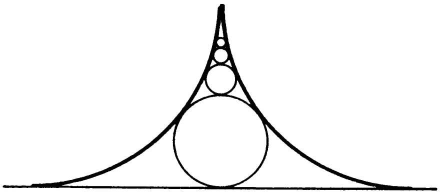
$$y=\frac{1}{x^3} \quad \text{i} \quad y=\frac{1}{x^2}$$

na prawo od ich punktu przecięcia przeprowadzono odcinki równoległe do osi Oy, w równej odległości od siebie. Czy suma długości tych odcinków jest skończona?

3.83. Czy będzie skończona suma długości odcinków z zadania poprzedniego, jeżeli krzywą $y=\frac{1}{x^2}$ zastąpimy krzywą $y=\frac{1}{x}$?

3.84. Wyrazami szeregu są długości odcinków zbudowanych następująco: pierwszym odcinkiem jest $\frac{1}{10}$ część odcinka jednostkowego, drugim jest $\frac{1}{10}$ pierwszego itd. Znaleźć sumę otrzymanego szeregu.

3.85. Rozważmy ciąg trójkątów prostokątnych równoramiennych takich, że przyprostokątna poprzedniego jest przeciwprostokątną następnego trójkąta. Przeciwprostokątna pierwszego trójkąta równa się 1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie a_n jest długością przyprostokątnej n-tego trójkąta.



Rys. 3.1

3.86. Rozważmy figurę krzywoliniową ograniczoną łukami dwóch okręgów stycznych o promieniach równych 1 i prostą styczną do tych okręgów. W figurę tę wpisujemy ciąg okręgów o możliwie maksymalnych promieniach (rys. 3.1). Długości średnic tych okręgów tworzą szereg, którego suma równa się 1. Napisać ten szereg.

Rozdział IV

FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ

§ 4.1. UWAGI OGÓLNE O FUNKCJACH

Mówimy, że w zbiorze liczb A jest określona pewna *funkcja* f (*funkcja jednej zmiennej*), jeżeli każdej liczbie x ze zbioru A jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba y pewnego zbioru liczb B.

Przyporządkowanie to zapisujemy:

(1) $$y=f(x).$$

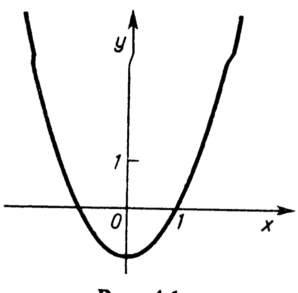
Literę x we wzorze (1) nazywamy *argumentem funkcji* lub *zmienną niezależną*, literę y — *zmienną zależną*. Określoną liczbę x_0 ze zbioru A nazywamy *wartością argumentu* funkcji f albo *wartością zmiennej niezależnej* x; przyporządkowaną jej liczbę y_0 ze zbioru B nazywamy *wartością funkcji* f w punkcie x_0. Zbiór A wartości argumentów funkcji f nazywamy *dziedziną funkcji* f albo *polem określoności* funkcji f. Zbiór B wartości funkcji f nazywamy *zakresem funkcji* f.

Funkcja może być określona różnymi sposobami. Podamy najważniejsze z nich:

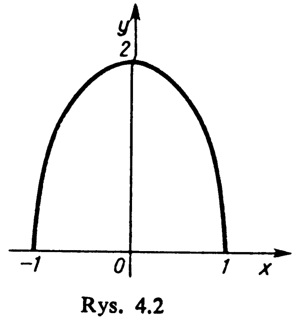
1° Za pomocą wzoru.

PRZYKŁADY:

(a) $y=x^2-1$. Za pole tej funkcji można przyjąć zbiór wszystkich liczb (co można zapisać w postaci podwójnej nierówności $-\infty<x<\infty$); wówczas zakresem tej funkcji jest zbiór liczb y spełniających nierówność $y\geqslant -1$ (rys. 4.1).



Rys. 4.1



Rys. 4.2

(b) $y=2\sqrt{1-x^2}$. Za pole tej funkcji można przyjąć zbiór liczb x spełniających podwójną nierówność $-1\leqslant x\leqslant 1$; wówczas zakresem funkcji będzie zbiór liczb y spełniających podwójną nierówność $0\leqslant y\leqslant 2$ (rys. 4.2).

(c) $y=\sqrt{-x^2(1-x)^2}$. Pole tej funkcji składa się z dwóch liczb 0 i 1, a zakres z jednej liczby 0

2° Za pomocą tabeli; np. tabeli wydajności pracy lub tabeli wartości produkcji w poszczególnych latach.

3° Za pomocą przepisu słownego; np. przyporządkowanie liczbom wymiernym liczby 0, a liczbom niewymiernym liczby 1 określa pewną funkcję w zbiorze liczb rzeczywistych. Polem tej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, zakres funkcji składa się z dwóch liczb 0 i 1 (tzw. *funkcja Dirichleta*).

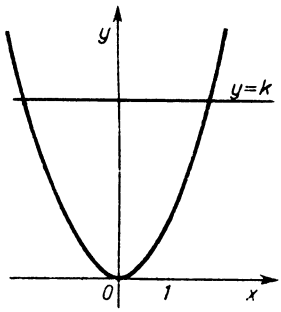
Zauważmy, że wzór (1), który przedstawia funkcję f, łączy odpowiadające sobie liczby x i y w pary (x, y). Pary te są *uporządkowane*, ponieważ inna jest rola pierwszego elementu pary (w tym przypadku x), a inna rola drugiego elementu (w tym przypadku y). Zauważmy, że pierwsze elementy różnych par określonych przez daną funkcję muszą być różne, natomiast drugie elementy mogą nie być różne.

Jest obojętne, jakimi literami oznaczymy zmienną zależną i niezależną; w matematyce najczęściej oznacza się zmienną niezależną literą x, a zmienną zależną literą y; w fizyce, gdy rozpatruje się drogę jako funkcję czasu, zmienną niezależną oznacza się często literą t, a zmienną zależną literą s, czyli pisze się: $s=f(t)$, gdy zaś rozpatruje się ciśnienie jako funkcję temperatury, to zmienną niezależną często oznacza się literą T, a zmienną zależną literą p, czyli pisze się: $p=g(T)$. Z rodzajem litery nie należy jednak łączyć faktu, czy zmienna jest niezależna, czy zależna. Obszerniejsze objaśnienia patrz część II, rozdz. XVI, str. 326.

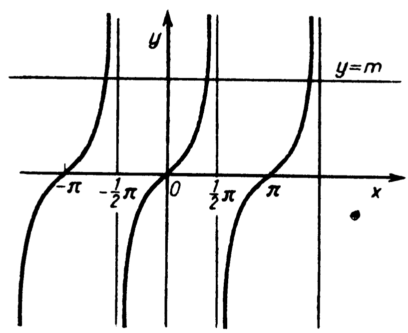
§ 4.2. INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA FUNKCJI

Wykresem funkcji f nazywamy zbiór tych punktów M na płaszczyźnie, których odciętymi są liczby należące do zbioru A (pierwsze elementy par), a rzędnymi są przyporządkowane im wartości funkcji (drugie elementy par).

Z określenia funkcji widać, że ***każda** prosta równoległa do osi rzędnych ma co najwyżej jeden punkt wspólny z wykresem funkcji.*



Rys. 4.3



Rys. 4.4

Prosta równoległa do osi odciętych może mieć z wykresem funkcji więcej niż jeden punkt wspólny. Np. prosta $y=k$, gdzie $k>0$, przecina wykres funkcji $y=x^2$ w dwóch punktach (rys. 4.3), a prosta $y=m$ przecina wykres funkcji $y=\operatorname{tg} x$ w nieskończenie wielu punktach (rys. 4.4).

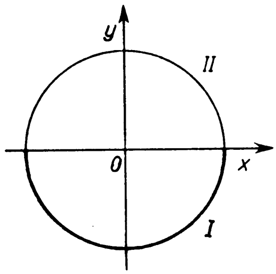
Rzut wykresu funkcji na oś odciętych jest polem tej funkcji, rzut wykresu funkcji na oś rzędnych jest zakresem tej funkcji.

Nie każdy wzór przedstawia jedną funkcję.

PRZYKŁADY:

(a) Związek $x^2+y^2=1$ przedstawia dwie funkcje ciągłe (por. str. 77):

$$y=-\sqrt{1-x^2} \quad \text{i} \quad y=\sqrt{1-x^2}.$$



Rys. 4.5

Dla obydwóch funkcji polem jest przedział $-1 \leqslant x \leqslant 1$; zakresem pierwszej funkcji jest przedział $-1 \leqslant y \leqslant 0$, a drugiej – przedział $0 \leqslant y \leqslant 1$ (rys. 4.5).

(b) Związek $x^2+y^2+1=0$ nie określa żadnej funkcji, gdyż równanie to nie ma rozwiązań.

§ 4.3. FUNKCJA ZŁOŻONA

Niech

(1) $$z=g(x)$$

będzie funkcją, której polem jest zbiór liczb A, a zakresem zbiór liczb B, natomiast

(2) $$y=h(z)$$

niech będzie funkcją, której polem jest zbiór liczb C, a zakresem zbiór liczb D. Jeżeli zbiór B jest zawarty w zbiorze liczb C, to oba wzory (1) i (2) wspólnie przyporządkowują każdej liczbie x ze zbioru A dokładnie jedną liczbę y ze zbioru D, a więc określają nową funkcję, co zapisujemy

(3) $$y=h(g(x)).$$

Funkcję określoną w ten sposób w zbiorze liczb A nazywamy *funkcją złożoną* lub *funkcją superponowaną* (z funkcji h i g); funkcję h nazywamy wtedy *funkcją zewnętrzną* funkcji złożonej, a funkcję g – *funkcją wewnętrzną* funkcji złożonej.

PRZYKŁAD. Funkcja

$$z=\sqrt{2x-x^2}$$

jest funkcją, której polem jest przedział $0 \leqslant x \leqslant 2$, a zakresem przedział $0 \leqslant z \leqslant 1$; funkcja

$$y=3^z$$

jest funkcją, której polem jest zbiór wszystkich liczb, a zakresem zbiór wszystkich liczb dodatnich; zatem funkcja

$$y = 3^{\sqrt{2x-x^2}}$$

jest funkcją złożoną, której polem jest przedział $0 \leqslant x \leqslant 2$, a zakresem przedział $1 \leqslant y \leqslant 3$.

§ 4.4. FUNKCJA RÓŻNOWARTOŚCIOWA

Funkcję $f(x)$ nazywamy *funkcją różnowartościową* w zbiorze A, jeżeli dla każdej pary różnych wartości $x_1 \neq x_2$ z tego zbioru odpowiadające im wartości funkcji $f(x_1) \neq f(x_2)$ są różne.

Z określenia funkcji różnowartościowej widać, że *każda prosta $y=k$, równoległa do osi odciętych ma z wykresem funkcji różnowartościowej co najwyżej jeden punkt wspólny.*

Funkcję nazywamy *funkcją rosnącą* w zbiorze A, jeżeli dla każdej pary wartości $x_1 < x_2$ z tego zbioru jest $f(x_1) < f(x_2)$. Funkcję nazywamy *funkcją malejącą* w zbiorze A, jeżeli dla każdej pary wartości $x_1 < x_2$ z tego zbioru jest $f(x_1) > f(x_2)$. Funkcja rosnąca i funkcja malejąca są funkcjami różnowartościowymi.

§ 4.5. FUNKCJA ODWROTNA

Jeżeli związek

$$y = f(x) \tag{1}$$

określa w zbiorze A funkcję różnowartościową, mającą jako zakres zbiór B, to związek (1) określa także w zbiorze B funkcję g, zwaną funkcją odwrotną do funkcji f,

$$x = g(y), \tag{2}$$

jaką otrzymamy, gdy dowolnej liczbie y_0 ze zbioru B przyporządkujemy taką liczbę x_0 ze zbioru A, dla której $y_0 = f(x_0)$. Jest oczywiste, że zakresem funkcji g jest zbiór A.

We wzorze (2), określającym funkcję odwrotną, zmieniamy często litery w ten sposób, aby x oznaczało zmienną niezależną, a y — zmienną zależną. Po tej zamianie funkcję odwrotną zapisujemy w postaci

$$y = g(x). \tag{3}$$

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest określona i rosnąca w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, przy czym $f(a) = c$ oraz $f(b) = d$, to istnieje funkcja g, odwrotna do funkcji f, która jest określona i rosnąca w przedziale domkniętym $\langle c, d\rangle$.

Podobnie jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest określona i malejąca w przedziale $\langle a, b\rangle$, przy czym $f(a) = c$ oraz $f(b) = d$, to istnieje funkcja g, odwrotna do funkcji f, która jest określona i malejąca w przedziale $\langle d, c\rangle$.

Dla możliwości zbudowania funkcji odwrotnej względem danej funkcji $y=f(x)$ w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ istotne jest to, żeby funkcja $y=f(x)$ była w tym przedziale różnowartościowa, tzn. żeby różnym wartościom zmiennej x wziętym z przedziału $a \leqslant x \leqslant b$, odpowiadały różne wartości zmiennej y.

Funkcja mająca funkcję odwrotną nazywa się *funkcją odwracalną*.

Przykład 1. Weźmy pod uwagę funkcję $y=x^3$. Jest to funkcja rosnąca dla wszystkich wartości x i przybiera wartości od $-\infty$ do $+\infty$. Wobec tego istnieje dla niej funkcja odwrotna

$$x=\sqrt[3]{y} \quad \text{lub} \quad y=\sqrt[3]{x}$$

również rosnąca dla wszystkich wartości argumentu.

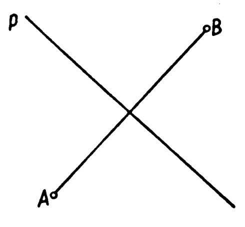
Przykład 2. Rozważmy funkcję $y=\sin x$, która jest określona dla wszystkich wartości x. Funkcja ta nie jest jednak różnowartościowa w całym zbiorze liczb rzeczywistych, a zatem nie jest odwracalna w tym zbiorze; da się natomiast odwrócić w przedziale domkniętym $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant +\frac{1}{2}\pi$, w którym jest funkcją rosnącą od -1 do $+1$. Funkcją odwrotną względem funkcji $y=\sin x$ dla $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant +\frac{1}{2}\pi$ jest funkcja $x=\arcsin y$, określona dla $-1 \leqslant y \leqslant +1$; jest ona w tym przedziale również rosnąca.

Przykład 3. Dla funkcji $y = x^2+1$ rozważanej i rosnącej w zbiorze $\{x \in R\colon x \geqslant 0\}$ funkcją odwrotną jest funkcja $y=\sqrt{x-1}$ określona i rosnąca w zbiorze $\{x \in R\colon x \geqslant 1\}$.

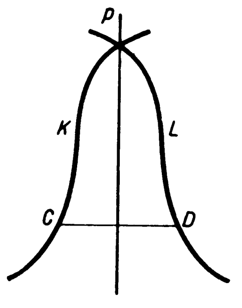
Uwaga. Funkcja $y = x^2+1$ rozważana w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych nie jest różnowartościowa i nie ma funkcji odwrotnej.

§ 4.6. SYMETRIA PUNKTÓW I LINII WZGLĘDEM PROSTEJ

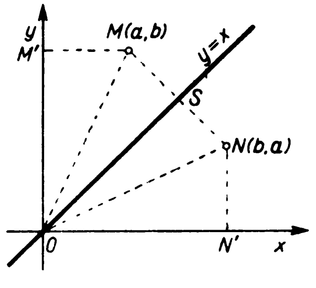
Punkty A i B nazywamy *punktami symetrycznie położonymi względem prostej p*, jeżeli prosta p jest symetralną(¹) odcinka AB (rys. 4.6).



Rys. 4.6



Rys. 4.7



Rys. 4.8

Linie K i L nazywamy *liniami symetrycznymi względem prostej p*, jeżeli każdemu punktowi C linii K odpowiada punkt D linii L taki, że punkty C i D są symetrycznie położone względem prostej p, i odwrotnie, każdemu punktowi D linii L odpowiada punkt C linii K symetryczny do niego względem prostej p (rys. 4.7).

Uwaga. Punkty $M(a,b)$ i $N(b,a)$ przy każdych a i b są symetrycznie położone względem $y=x$(²). Czytelnik łatwo to udowodni rozpatrując przystające trójkąty OMM' i ONN', a następnie przystające trójkąty OMS i ONS (rys. 4.8).

(¹) *Symetralna odcinka* jest to prosta prostopadła do odcinka, przechodząca przez środek tego odcinka.

(²) Prosta ta jest dwusieczną kąta, jaki tworzą dodatnie zwroty osi współrzędnych.

§ 4.7. WYKRES FUNKCJI ODWROTNEJ

Niech

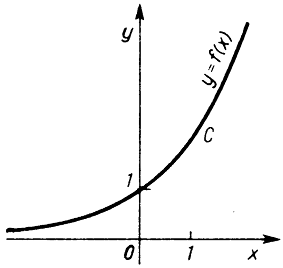
(1) $$y=f(x).$$

będzie funkcją różnowartościową. Rozważmy utworzoną w § 4.5 funkcję

(2) $$x=g(y)$$

Wykresem równania (2) jest ta sama linia C (rys. 4.9), która jest wykresem równania (1), gdyż ze sposobu tworzenia równania (2) z równania (1) wynika, że oba te równania przedstawiają ten sam związek między x i y.

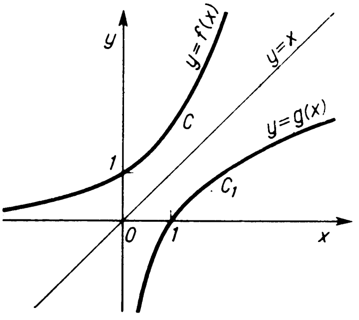
Przy wykresie jednak związku (1) osią zmiennej niezależnej jest oś Ox, natomiast przy wykresie związku (2) osią zmiennej niezależnej jest oś Oy. Jeżeli zaś chcemy, aby przy wykresie związku (2) osie zmiennej niezależnej i zależnej zajmowały zwykłe położenie, to musimy całą płaszczyzną Oxy, obrócić w przestrzeni o 180° dookoła prostej $y=x$; wówczas krzywa C przejdzie na krzywą C_1 symetryczną do C względem prostej $y=x$. Oznaczając znowu oś zmiennej niezależnej jako oś Ox, a oś zmiennej zależnej jako oś Oy (czyli zamieniając x na y, a y na x) równanie krzywej C_1 będzie postaci



Rys. 4.9

(3) $$y=g(x),$$

gdzie C_1 jest wykresem funkcji odwrotnej względem funkcji (1). A więc *wykres C funkcji f i wykres C_1 funkcji odwrotnej g są symetrycznie położone względem dwusiecznej kąta zawartego między dodatnimi półosiami współrzędnych* (rys. 4.10).



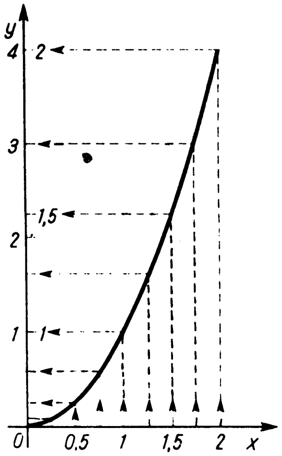
Rys. 4.10

Uwaga. Na rysunku 4.10 za funkcję $y=f(x)$ przyjęliśmy $y=2^x$, funkcją odwrotną jest $y=g(x)=\log_2 x$.

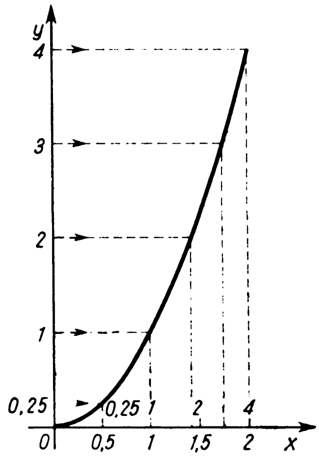
§ 4.8. SKALE FUNKCYJNE PAPIERY FUNKCYJNE

Wykonajmy wykres funkcji np. $y=x^2$ dla $0 \leqslant x \leqslant 2$ obierając pewną, ustaloną jednostkę (rys. 4.11).

Po lewej stronie osi Oy umieśćmy *skalę równomierną* (*jednostajną*). Jeżeli punkty wykresu odpowiadające dla przykładu wartościom $x=0{,}5$, 1, 1,5, 2 zrzutujemy na oś Oy i po prawej stronie osi Oy zapiszemy wartości x, to na osi Oy powstanie tzw. *skala funkcyjna* dla funkcji $y=x^2$ i przedziału $0 \leqslant x \leqslant 2$ (rys. 4.11). Liczbę milimetrów równą długości odcinka przyjętego za jednostkę w skali równomiernej nazywamy *modułem skali funkcyjnej*.



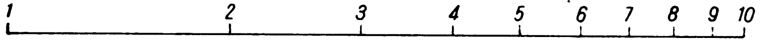
Rys. 4.11



Rys. 4.12

Postępując analogicznie, tj. rzutując wartości y na oś Ox w sposób wskazany strzałkami na rysunku 4.12 i zapisując odpowiednie wartości y nad osią Ox (pod osią Ox umieszczamy ocyfrowanie skali równomiernej zmiennej x) otrzymujemy skalę funkcyjną dla funkcji odwrotnej względem funkcji $y=x^2$ przy x dodatnich, tj. dla funkcji $x=\sqrt{y}$.

Bardzo rozpowszechniona jest *logarytmiczna skala funkcyjna* $y=\log_{10} x$ (rys. 4.13), z której licznymi zastosowaniami zapoznamy się przy tzw. *papierach funkcyjnych*.



Rys. 4.13

Skale funkcyjne konstruuje się w praktyce dla funkcji ciągłych i ściśle monotonicznych (jeśli nie są ściśle monotoniczne w przedziale określoności jak np. $y=x^2$, to wybiera się przedział, w którym funkcja jest ściśle monotoniczna, np. dla funkcji $y=x^2$ dowolny przedział nie zawierający wewnątrz punktu $x=0$).

Jeżeli na osi odciętych i osi rzędnych wyznaczymy pewne skale funkcyjne i przez odpowiednie punkty tych osi poprowadzimy proste równoległe do osi Ox i Oy, to otrzymamy tzw. *siatkę funkcyjną*.

Ponieważ wykonywanie siatek funkcyjnych jest czasochłonne, więc najczęściej korzysta się z drukowanych siatek (odpowiednich typów), tzw. *papierów funkcyjnych.*

Jeśli na osi odciętych wyznaczymy skalę $x=f_1(u)$, a na osi rzędnych skalę $y=f_2(v)$, to linia (krzywa albo prosta) o równaniu $y=F(x)$ (we współrzędnych kartezjańskich przy równomiernych skalach o tym samym module na obu osiach) w omówionej siatce funkcyjnej będzie miała równanie

$$f_2(v)=F\big(f_1(u)\big).$$

W szczególności linia prosta o równaniu liniowym $y=kx+l$ będzie wykresem zależności

$$f_2(v)=kf_1(u)+l \tag{4.8.1}$$

nieliniowej (przy założeniu — w praktyce zawsze spełnionym — że przynajmniej jedna ze skal funkcyjnych na osiach współrzędnych nie jest liniowa).

Rozważmy tutaj kilka najważniejszych przypadków takiego doboru odpowiednich siatek funkcyjnych do funkcji mających liczne zastosowania, aby otrzymane wykresy ich były liniami prostymi.

PRZYKŁAD 1. Rozważmy *funkcję potęgową* postaci

$$y=bx^m \quad (b>0,\ m\neq 0) \tag{4.8.2}$$

o wykładniku m dowolnym. Po zlogarytmowaniu obustronnym przy podstawie 10 otrzymujemy

$$\log y=m\log x+\log b\,. \tag{4.8.3}$$

Związek ten jest liniowy względem $\log x$ i $\log y$, co dowodzi, że jeżeli na obu osiach współrzędnych są skale logarytmiczne, to wykresem każdej funkcji potęgowej jest linia prosta.

Siatka funkcyjna, na której na obu osiach współrzędnych są skale logarytmiczne, nazywa się *siatką podwójnie logarytmiczną*, a odpowiedni papier z wydrukowaną siatką *papierem podwójnie logarytmicznym.*

Tak więc wykresy następujących funkcji:

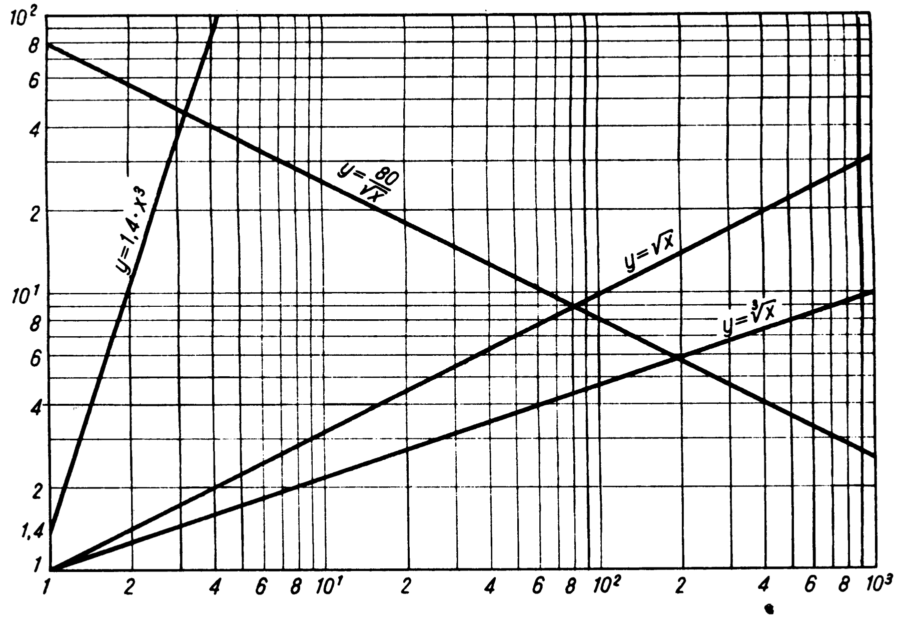
$$y=3x^2,\quad y=x^3,\quad y=\tfrac{1}{2}x^5,\quad y=\sqrt{x},\quad y=2\sqrt[3]{x},$$

$$y=\frac{4}{x},\quad y=\frac{2}{\sqrt{x}},\quad y=\frac{5}{x^3},\quad y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

na papierze podwójnie logarytmicznym są liniami prostymi, co niezwykle ułatwia wykres; wystarczą bowiem dwa punkty. Na rysunku 4.14 podano wykresy następujących funkcji:

$$y=\sqrt{x},\quad y=\sqrt[3]{x},\quad y=1{,}4x^3,\quad y=\frac{80}{\sqrt{x}}.$$

Na rysunku 4.15 podano skale logarytmiczne na obu osiach współrzędnych dla wszystkich czterech ćwiartek.



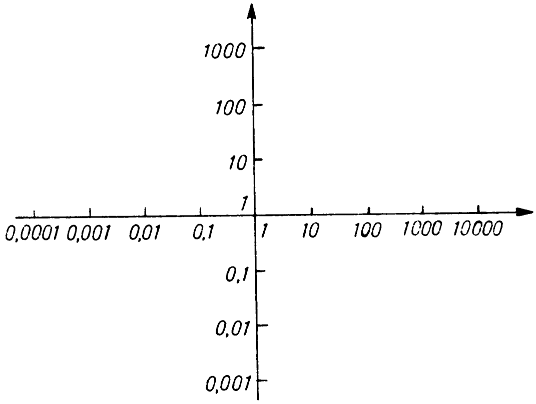
Rys. 4.14

PRZYKŁAD 2. Rozważmy z kolei *funkcję wykładniczą* postaci

$$y=ba^x \quad (a>0,\ b>0,\ -\infty<x<+\infty). \tag{4.8.4}$$

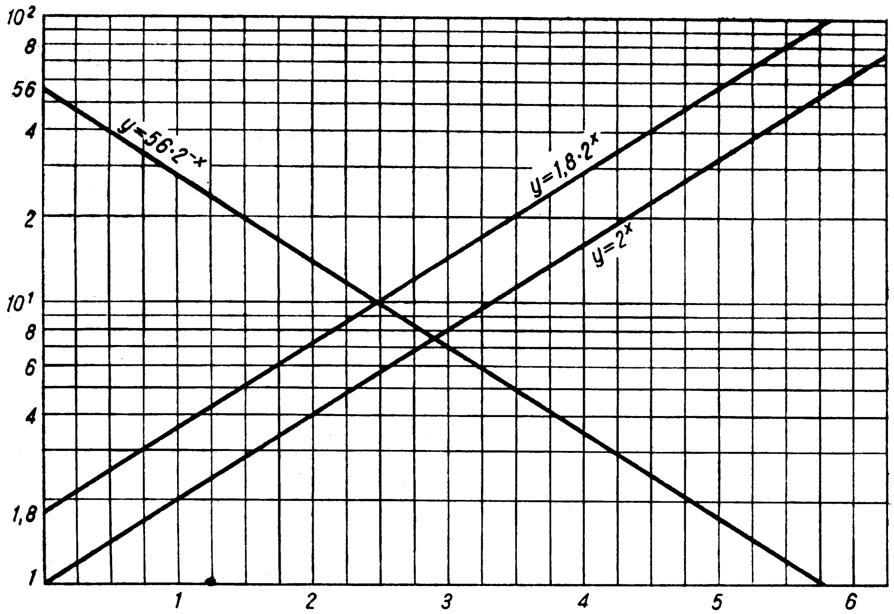
Logarytmując przy podstawie 10 otrzymujemy

$$\log y=\log a\cdot x+\log b. \tag{4.8.5}$$

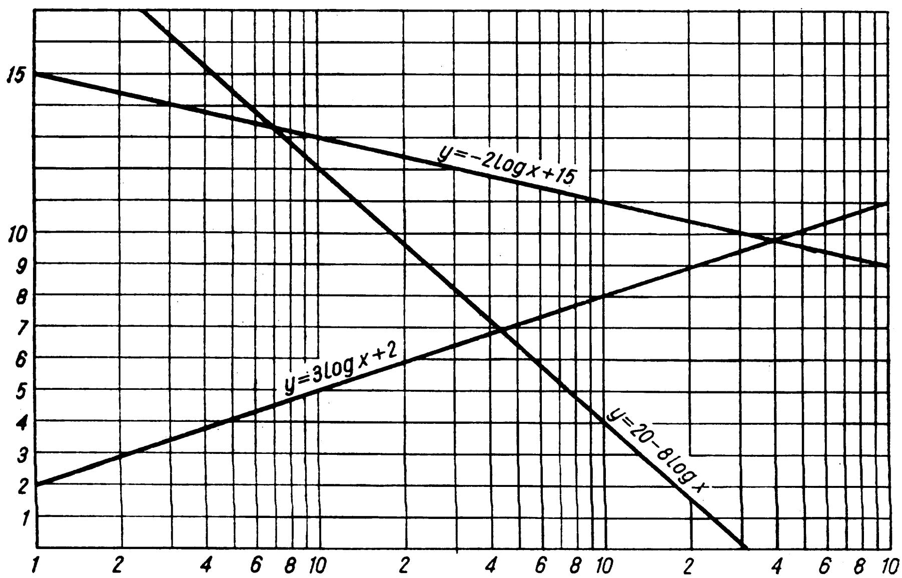


Rys. 4.15

Jest to funkcja liniowa względem log y i x, co dowodzi, że jeżeli na osi odciętych jest skala równomierna, a na osi rzędnych skala logarytmiczna, to wykresem funkcji wykładniczej postaci (4.8.4) jest linia prosta.



Rys. 4.16



Rys. 4.17

Siatkę funkcyjną z takimi skalami funkcyjnymi nazywać będziemy *siatką równomierno--logarytmiczną*. Zauważmy, że początek układu ma tutaj współrzędne (0, 1). Podstawiając $x=0$ otrzymujemy $y=b$, więc prosta przecina oś Oy w punkcie $(0, b)$. Jako drugą wartość x pożądane jest obrać możliwie największą wartość taką, aby odpowiadający jej punkt wykresu znalazł się na papierze; dzięki takiemu doborowi uzyskamy możliwie największą dokładność wykresu. Na rysunku 4.16 podane są wykresy funkcji wykładniczych:

$$y=2^x, \quad y=1{,}8\cdot 2^x, \quad y=56\cdot 2^{-x}.$$

PRZYKŁAD 3. Rozważmy jeszcze *funkcję logarytmiczną liniową* postaci

$$y=a\log x+b \quad (a\neq 0,\ x>0). \tag{4.8.6}$$

Jest to funkcja liniowa względem $\log x$ i y. Tak więc jeżeli na osi odciętych jest skala logarytmiczna, a na osi rzędnych skala równomierna, to wykresem funkcji logarytmicznej liniowej postaci (4.8.6) jest linia prosta.

Odpowiednią siatkę funkcyjną nazywamy *siatką logarytmiczno-równomierną*.

Siatki równomierno-logarytmiczne i logarytmiczno-równomierne nazywa się często wspólnym mianem *siatek pojedynczo logarytmicznych*.

Na rysunku 4.17 podano wykresy funkcji

$$y=3\log x+2, \quad y=-2\log x+15, \quad y=20-8\log x$$

przy zastosowaniu siatek pojedynczo logarytmicznych.

Rozdział V

GRANICE FUNKCJI

§ 5.1. GRANICA LEWOSTRONNA I GRANICA PRAWOSTRONNA FUNKCJI

Mówimy, że liczba g jest *granicą lewostronną funkcji* $f(x)$ *w punkcie* $x=c$, co zapisujemy

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=g,$$

jeżeli dla każdego $\varepsilon>0$ można wskazać taką liczbę (istnieje taka liczba) $\delta>0$, żeby było

$$|f(x)-g|<\varepsilon \quad \text{dla} \quad c-\delta<x<c.$$

Definicję tę za pomocą symboli określonych w rozdziale I możemy zapisać następująco

$$\left(\lim_{x\to c-0} f(x)=g\right)\equiv\left(\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta>0}\bigwedge_{x}\left((c-\delta<x<c)\Rightarrow(|f(x)-g|<\varepsilon)\right)\right).$$

Granicę lewostronną funkcji $f(x)$ w punkcie $x=0$ oznaczamy symbolem $\lim\limits_{x\to -0} f(x)$.

Zauważmy, że na to, by granica lewostronna mogła istnieć, funkcja powinna być określona w pewnym przedziale otwartym, którego prawym końcem jest c. Natomiast dla $x=c$ oraz $x>c$ funkcja może nie być określona.

Mówimy, że $+\infty$ jest *granicą lewostronną funkcji* $f(x)$ *w punkcie* $x=c$, co zapisujemy

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=+\infty,$$

jeżeli dla każdej liczby $M>0$ istnieje taka liczba $\delta>0$, żeby było

$$f(x)>M \quad \text{dla} \quad c-\delta<x<c.$$

Definicję tę możemy zapisać następująco:

$$\left(\lim_{x\to c-0} f(x)=+\infty\right)\equiv\left(\bigwedge_{M>0}\bigvee_{\delta>0}\bigwedge_{x}\left((c-\delta<x<c)\Rightarrow(f(x)>M)\right)\right).$$

Mówimy, że $-\infty$ jest *granicą lewostronną funkcji* $f(x)$ *w punkcie* $x=c$, co zapisujemy

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=-\infty,$$

jeżeli dla każdej liczby $M>0$ istnieje taka liczba $\delta>0$, żeby było

$$f(x)<-M \quad \text{dla} \quad c-\delta<x<c.$$

Definicję tę można zapisać następująco:

$$\left(\lim_{x\to c-0} f(x) = -\infty\right) \equiv \left(\bigwedge_{M>0}\ \bigvee_{\delta>0}\ \bigwedge_{x} \big((c-\delta<x<c) \Rightarrow (f(x)<-M)\big)\right).$$

Dla *prawostronnej granicy funkcji* $f(x)$ *w punkcie* $x=c$ podaje się definicje odpowiednio, jak wyżej, z tą tylko zmianą, że podane nierówności mają być spełnione dla x zawartego w przedziale $c<x<c+\delta$. Granicę prawostronną funkcji $f(x)$ w punkcie $x=c$ oznaczamy symbolem $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)$, a w punkcie $x=0$ – symbolem $\lim\limits_{x\to +0} f(x)$.

Granica lewostronna i granica prawostronna funkcji noszą wspólną nazwę *granic jednostronnych*.

W podanych poprzednio definicjach określiliśmy granicę lewostronną i granicę prawostronną funkcji $f(x)$ w punkcie $x=c$ w *sensie Cauchy'ego*. Oprócz tej definicji jest jeszcze inna definicja granicy funkcji w *sensie Heinego*, mianowicie mówimy, że liczba g (ewentualnie $+\infty$, $-\infty$) jest *granicą lewostronną* (*granicą prawostronną*) *funkcji* $f(x)$ *w punkcie* $x=c$, jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do c i takiego, że dla każdego n zachodzi nierówność ostra $x_n<c$ ($x_n>c$), mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=g$ (ewentualnie $+\infty$ albo odpowiednio $-\infty$).

Przy określeniu granicy w sensie Heinego zakładamy, że została poprzednio określona granica ciągu (to założenie przy definicji Cauchy'ego nie jest potrzebne).

Można udowodnić, że *definicje Cauchy'ego i Heinego granicy* (*lewostronnej i prawostronnej*) *funkcji* $f(x)$ *w punkcie* $x=c$ *są równoważne.*

Uwaga. Każda z tych definicji ma inne zalety. Zaletą definicji Cauchy'ego jest to, że ta definicja obejmuje granicę ciągu (jeżeli ciąg rozumieć jako funkcję zmiennej naturalnej), natomiast zaletą definicji Heinego jest to, że daje się ona łatwiej przenosić w przypadkach uogólnień funkcji – tzn. operacji, dystrybucji itp.

§ 5.2. INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA GRANIC JEDNOSTRONNYCH

Zapis $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=g$ geometrycznie oznacza (rys. 5.1), że jakikolwiek weźmiemy wąski pasek

(1) $$g-\varepsilon<y<g+\varepsilon,$$

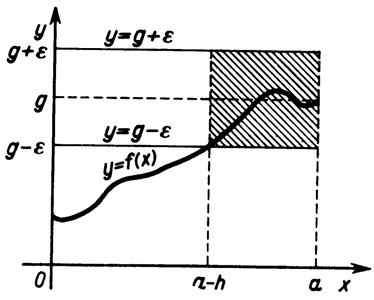
to musi istnieć takie *otoczenie lewostronne* punktu $x=a$[1], czyli taki przedział

(2) $$a-h<x<a, \quad \text{gdzie} \quad h>0,$$

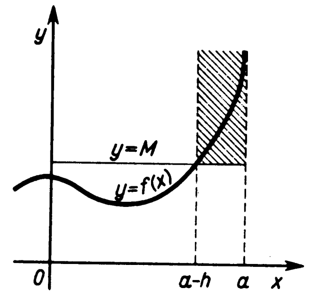
że cały wykres funkcji dla x z przedziału (2) znajduje się w pasku (1).

Zapis $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$ geometrycznie oznacza (rys. 5.2), że dla każdej prostej $y=M$ istnieje taki przedział $(a-h, a)$, gdzie $h>0$, że cały wykres funkcji odpowiadającej temu

[1] Ogólnie *otoczeniem punktu* $x=a$ *o promieniu* $h>0$ nazywamy przedział otwarty
$$a-h<x<a+h.$$



Rys. 5.1



Rys. 5.2

przedziałowi znajduje się ponad prostą $y=M$. Z tego wynika, że prosta $x=a$ jest tzw. *asymptotą pionową* krzywej $y=f(x)$, gdy $y\to\infty$ (por. str. 194).

Analogiczną interpretację geometryczną ma granica prawostronna funkcji.

§ 5.3. GRANICA FUNKCJI

Mówimy, że liczba g jest *granicą funkcji* $f(x)$ w punkcie $x=c$, co zapisujemy

(1)
$$\lim_{x\to c} f(x)=g,$$

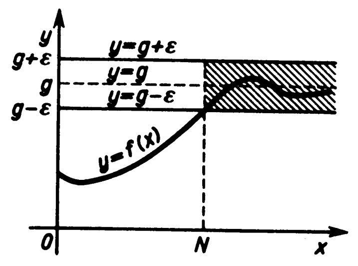
jeżeli istnieją granice lewostronna i prawostronna w punkcie $x=c$ i obie są równe liczbie g tzn. jeżeli

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=\lim_{x\to c+0} f(x)=g.$$

Mówimy, że liczba g jest *granicą funkcji* $f(x)$ *przy* $x\to+\infty$, co zapisujemy

(2)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=g,$$

jeżeli dla dowolnie obranej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $N>0$, żeby było $|f(x)-g|<\varepsilon$ dla każdej wartości $x>N$,



Rys. 5.3

Zapis (2) geometrycznie oznacza (rys. 5.3), że jakkolwiek jest wąski pasek $g-\varepsilon<y<g+\varepsilon$, to istnieje taka prosta $x=N$, że cały wykres funkcji $y=f(x)$ na prawo od prostej $x=N$ znajduje się wewnątrz tego paska. Z tego wynika, że prosta $y=g$ jest tzw. *asymptotą poziomą* krzywej $y=f(x)$, gdy $x\to+\infty$.

Mówimy, że liczba g jest *granicą funkcji* $f(x)$ *przy* $x\to-\infty$, co zapisujemy

(3)
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=g,$$

jeżeli dla dowolnie obranej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $K>0$, żeby było $|f(x)-g|<\varepsilon$ dla każdej wartości $x<-K$.

Mówimy, że *funkcja* $f(x)$ *dąży do* $+\infty$ *przy* $x \to +\infty$, co zapisujemy

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \tag{4}$$

jeżeli dla dowolnie obranej liczby $M > 0$ istnieje taka liczba $K > 0$, żeby było $f(x) > M$ dla każdej wartości $x > K$.

Mówimy, że *funkcja* $f(x)$ *dąży do* $-\infty$ *przy* $x \to +\infty$, co zapisujemy

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \tag{5}$$

jeżeli dla dowolnie obranej liczby $M > 0$ istnieje taka liczba $K > 0$, żeby było $f(x) < M$ dla każdej wartości $x > -K$.

Podobnie określamy granice

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty. \tag{6}$$

Zachodzą następujące twierdzenia o granicach:

Jeżeli istnieją granice $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ *oraz* $\lim\limits_{x \to c} g(x)$, *to*

$$\lim_{x \to c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x), \tag{5.3.1}$$

$$\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x), \tag{5.3.2}$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}, \quad \textit{pod warunkiem, że} \quad \lim_{x \to c} g(x) \neq 0. \tag{5.3.3}$$

Analogiczne twierdzenia zachodzą dla granic lewostronnych i prawostronnych. Zapis twierdzeń dla granic lewostronnych otrzymamy z zapisu podanych twierdzeń zastępując symbol $x \to c$ symbolem $x \to c-0$, a dla granic prawostronnych zastępując symbol $x \to c$ symbolem $x \to c+0$.

§ 5.4. CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

Funkcję $f(x)$ nazywamy *funkcją ciągłą w punkcie* $x = c$, jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ i jeżeli granica ta równa się $f(c)$.

Zachodzą następujące twierdzenia dotyczące ciągłości funkcji:

(5.4.1) *Suma dwóch funkcji ciągłych w punkcie* $x = c$ *jest funkcją ciągłą w tym punkcie.*

(5.4.2) *Iloczyn dwóch funkcji ciągłych w punkcie* $x = c$ *jest funkcją ciągłą w tym punkcie,*

(5.4.3) *Iloraz dwóch funkcji ciągłych w punkcie* $x = c$ *takim, że dzielnik jest różny od zera, jest funkcją ciągłą w tym punkcie.*

(5.4.4) *Jeżeli funkcja złożona (superponowana) $f(g(x))$ jest określona w pewnym otoczeniu punktu $x=x_0$, funkcja $g(x)$ jest ciągła w punkcie $x=x_0$, a funkcja $f(u)$ jest ciągła w punkcie $u=u_0$, gdzie $u_0=g(x_0)$, to funkcja złożona $f(g(x))$ jest ciągła w punkcie $x=x_0$.*

Ciągłość najważniejszych funkcji:

(5.4.5) *Wielomian*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

jest funkcją ciągłą dla wszystkich wartości x.

(5.4.6) *Funkcja wymierna*

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

jest funkcją ciągłą dla tych wartości x, przy których mianownik jest różny od zera.

(5.4.7) *Funkcja potęgowa* x^a, gdzie a jest to stała dowolna, jest określona i ciągła dla wartości $x>0$.

(5.4.8) *Funkcja wykładnicza*

$$a^x, \quad \text{gdzie} \quad a>0,$$

jest ciągła dla wszystkich wartości x.

(5.4.9) *Funkcja logarytmiczna*

$$\log_a x, \quad \text{gdzie} \quad a>0 \text{ i } a \neq 1,$$

jest ciągła dla wartości $x>0$.

(5.4.10) *Funkcje trygonometryczne* są ciągłe:

1° $\sin x$ i $\cos x$ dla wszystkich wartości x,

2° $\operatorname{tg} x$ dla $x \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą,

3° $\operatorname{ctg} x$ dla $x \neq k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

(5.4.11) *Funkcje kołowe (cyklometryczne)* są ciągłe:

1° $\arcsin x$ i $\arccos x$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

2° $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arcctg} x$ dla wszystkich wartości x.

(5.4.12) *Funkcje hiperboliczne* są ciągłe:

1° $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{tgh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ dla wszystkich wartości x,

2° $\operatorname{ctgh} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ dla $x \neq 0$.

(5.4.13) *Funkcje area*(1) *(odwrotne względem funkcji hiperbolicznych)* są ciągłe:

(1) Słowo *area* oznacza pole.

1° $\operatorname{arsinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ dla wszystkich wartości x,

2° $\operatorname{arcosh} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ dla $x \geqslant 1$,

3° $\operatorname{artgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ dla $-1<x<1$,

4° $\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ dla $x<-1$ oraz dla $x>1$.

ZADANIE 5.1. Obliczyć granicę funkcji

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+2}$$

w punkcie $x=2$.

Rozwiązanie. Funkcja badana jest funkcją wymierną, której mianownik jest różny od zera, a więc funkcja ta w punkcie $x=2$ jest ciągła. Z tego wynika, że $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ istnieje i równa się

$$f(2)=\frac{2-1}{4+2}=\frac{1}{6},$$

czyli

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^2+2}=\frac{1}{6}.$$

ZADANIE 5.2. Wyznaczyć granicę funkcji

$$f(x)=\frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}$$

w punkcie $x=2$.

Rozwiązanie. Łatwo zauważyć, że dla $x=2$ zarówno mianownik, jak i licznik funkcji $f(x)$ równają się zeru, a więc funkcja $f(x)$ w punkcie $x=2$ nie jest określona. Chcemy znaleźć jej granicę w tym punkcie.

Licznik i mianownik wyrażenia ułamkowego $f(x)$ są wielomianami, które przy $x=2$ są równe zeru, a więc zarówno licznik, jak i mianownik mają dzielnik $x-2$. Aby czynnik ten wydzielić w liczniku, sprowadzamy licznik do postaci iloczynowej według wzoru([1])

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

gdzie x_1 równa się 2, a x_2 znajdujemy ze wzoru $x_1+x_2=-b\ a$ lub ze wzoru $x_1 \cdot x_2 = c/a$; otrzymujemy

$$3x^2-5x-2=3(x-2)(x+\tfrac{1}{3}).$$

Mianownik po wyciągnięciu 5 przed nawias jest różnicą kwadratów, a więc możemy go przedstawić jako iloczyn różnicy przez sumę:

$$5x^2-20=5(x^2-4)=5(x-2)(x+2).$$

([1]) Trójmian kwadratowy można wyrazić w postaci iloczynu czynników rzeczywistych pierwszego stopnia tylko wtedy, gdy wyróżnik trójmianu $\Delta=b^2-4ac$ jest nieujemny

Napiszemy funkcję $f(x)$ w postaci iloczynu dwóch ułamków:

$$f(x)=\frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)}\cdot\frac{x-2}{x-2}.$$

Pierwszy czynnik

$$\varphi(x)=\frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)}$$

funkcji $f(x)$ jest funkcją wymierną, ciągłą dla $x=2$, ponieważ mianownik jego w tym punkcie jest różny od zera, a więc $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)$ istnieje i równa się

$$\varphi(2)=\frac{3(2+\frac{1}{3})}{5(2+2)}=\frac{7}{20}.$$

Drugi czynnik

$$g(x)=\frac{x-2}{x-2}$$

funkcji $f(x)$ równa się 1 dla $x\neq 2$, a dla $=2$ nie jest zdefiniowany; w myśl więc definicji granicy $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ istnieje i równa się 1.

Na podstawie twierdzenia o granicy iloczynu mamy

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}=\frac{7}{20}\cdot 1=\frac{7}{20}.$$

Zadanie 5.3. Obliczyć granicę funkcji

$$f(x)=\frac{2x^3+250}{x^2+4x-5}$$

w punkcie $x=-5$.

Rozwiązanie. Dla $x=-5$ licznik i mianownik wyrażenia ułamkowego $f(x)$ równają się zeru. Chcemy wydzielić czynnik $x+5$. W tym celu do licznika zastosujemy wzór

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Mamy więc

$$2x^3+250=2(x^3+125)=2(x+5)(x^2-5x+25).$$

Mianownik też sprowadzamy do postaci iloczynowej

$$x^2+4x-5=(x-1)(x+5).$$

Możemy więc funkcję $f(x)$ przedstawić w postaci iloczynu dwóch ułamków

$$f(x)=\frac{2(x^2-5x+25)}{x-1}\cdot\frac{x+5}{x+5}.$$

Pierwszy czynnik

$$\varphi(x)=\frac{2(x^2-5x+25)}{x-1}$$

funkcji $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x=-5$, a więc granica $\lim\limits_{x\to-5}\varphi(x)$ istnieje i równa się

$$\varphi(-5)=\frac{2(25+25+25)}{-5-1}=-25\,;$$

drugi zaś czynnik równa się 1 dla $x\neq-5$, a więc

$$\lim_{x\to-5}\frac{x+5}{x+5}=1,$$

czyli ostatecznie

$$\lim_{x\to-5}\frac{2x^3+250}{x^2+4x-5}=-25.$$

ZADANIE 5.4. Obliczyć granice funkcji:

$$\frac{1}{x},\quad\frac{1}{x^2},\quad\frac{1}{x^3}$$

w punkcie $x=0$.

Rozwiązanie. Wprost z definicji (w § 5.1) widać, że: $\lim\limits_{x\to+0}1/x=+\infty$, gdyż dla dowolnego $M>0$ można dobrać $\delta=1/M$ i wówczas będzie $1/x>M$ dla $0<x<\delta$; dla M zaś ujemnego wartość δ może być dowolną liczbą dodatnią; $\lim\limits_{x\to-0}1/x=-\infty$, gdyż dla dowolnego $M>0$ można wziąć $\delta=-1/M$, dla M zaś dodatniego wartość δ może być dowolną liczbą dodatnią.

Podobnie łatwo wykazać, że

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\quad\lim_{x\to-0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\quad\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^3}=+\infty,\quad\lim_{x\to-0}\frac{1}{x^3}=-\infty.$$

Określamy funkcję $[x]$ *entier*(1) x jako największą liczbę całkowitą N spełniającą warunek $N\leqslant x$. Na przykład

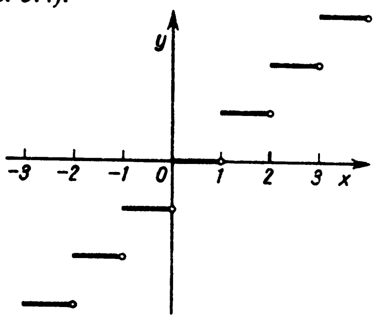
$$[\tfrac{5}{3}]=1,\quad[2]=2,\quad[\pi]=3,\quad[-\tfrac{2}{3}]=-1,\quad[-\pi]=-4.$$

ZADANIE 5.5. Obliczyć granicę funkcji $[x]$ w punkcie $x=3$.

Rozwiązanie. Łatwo zauważyć wprost z definicji granicy, że $\lim\limits_{x\to3+0}[x]=3$, gdyż dla $3\leqslant x<4$ jest $[x]=3$, natomiast $\lim\limits_{x\to3-0}[x]=2$, ponieważ dla $2\leqslant x<3$ jest $[x]=2$. A więc granica funkcji $[x]$ w punkcie $x=3$ nie istnieje. Uogólniając to, możemy wypowiedzieć twierdzenie:

(1) Z francuskiego *entier* — całkowity.

(5.4.1 4) *Funkcja* $[x]$ *jest określona dla wszystkich* x, *nieciągła dla* x *całkowitych, ciągła dla* x *pozostałych* (rys. 5.4).



Rys. 5.4

ZADANIE 5.6. Obliczyć granicę funkcji

$$f(x)=\frac{a\sin bx}{cx}, \quad \text{gdzie} \quad c\neq 0,$$

w punkcie $x=0$.

Rozwiązanie. Przy $x=0$ zarówno licznik, jak i mianownik wyrażenia ułamkowego $f(x)$ stają się równe zeru. Znalezienie granicy danego wyrażenia opierać się będzie na następującym podstawowym wzorze z teorii granic:

(5.4.15)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Gdy $x\to 0$, to również $bx\to 0$ oraz $\dfrac{\sin bx}{bx}\to 1$. Ponieważ w mianowniku rozważanego przykładu brak czynnika b, mnożymy licznik i mianownik przez b i otrzymujemy

$$\frac{a\sin bx}{cx}=\frac{ab}{c}\cdot\frac{\sin bx}{bx}\to\frac{ab}{c}\cdot 1=\frac{ab}{c}, \quad \text{gdy} \quad x\to 0.$$

ZADANIE 5.7. Obliczyć

$$\lim_{x\to 0}\frac{10x}{\operatorname{tg} 3x}$$

Rozwiązanie. Ponieważ licznik i mianownik dla $x=0$ stają się równe zeru, przekształcamy powyższe wyrażenie w sposób następujący:

$$\frac{10x}{\operatorname{tg} 3x}=\frac{10x\cos 3x}{\sin 3x}=\frac{10}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cos 3x.$$

Gdy $x\to 0$, to $\dfrac{3x}{\sin 3x}\to 1$, $\cos 3x\to\cos(3\cdot 0)=\cos 0=1$ [1], więc poszukiwana granica jest równa $\frac{10}{3}$.

---

[1] $\cos 3x$ jest funkcją złożoną, ciągłą dla wszystkich wartości x (patrz twierdzenie (5.4.4)), gdyż $\cos u$ jest funkcją ciągłą dla każdego u oraz $3x$ jest funkcją ciągłą dla każdego x.

ZADANIE 5.8. Obliczyć $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, gdzie

$$f(x)=\sqrt{x(x-\sqrt{x^2-1})}.$$

Rozwiązanie. Mnożąc i dzieląc $f(x)$ przez $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$ otrzymujemy

$$f(x)=\frac{\sqrt{x[x^2-(x^2-1)]}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}.$$

Następnie dzieląc licznik i mianownik przez $\sqrt{x}$ otrzymujemy (1)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}}.$$

Wreszcie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ZADANIE 5.9. Obliczyć granicę funkcji

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}$$

w punkcie $x=1$.

Rozwiązanie. W punkcie $x=1$ dana funkcja nie jest określona. Przedstawiamy naszą funkcję w postaci iloczynu dwóch ułamków:

$$f(x)=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x}.$$

Pierwszy czynnik

$$g(x)=\frac{1}{1+x}$$

funkcji $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x=1$; mamy

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}.$$

Drugi czynnik

$$h(x)=\frac{1}{1-x}$$

ma granicę lewostronną i granicę prawostronną różne:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1-x}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1-x}=-\infty.$$

---

(1) Otrzymujemy wyrażenie, które jest funkcją złożoną, ciągłą dla $x\geqslant 1$.

Ostatecznie otrzymujemy

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1-x^2}=+\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1-x^2}=-\infty.$$

ZADANIE 5.10. Obliczyć granice wielomianu

$$w(x)=2x^3-10x^2+15x-18,$$

gdy $x\to-\infty$ i gdy $x\to+\infty$.

Rozwiązanie. Wyłączamy $2x^3$ przed nawias:

$$w(x)=2x^3\left(1-\frac{5}{x}+\frac{15}{2x^2}-\frac{9}{x^3}\right).$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{15}{2x^2}-\frac{9}{x^3}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{15}{2x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{x^3}=1,$$

gdyż trzy granice ułamków, jak łatwo zauważyć, równają się zeru. Natomiast, jak widać wprost z definicji w § 5.3, mamy

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$, wystarczy bowiem przyjąć $K=\max(1, M)$([1]),

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, wystarczy bowiem przyjąć $K=\min(-1, M)$([2]),

a więc ostatecznie

$$\lim_{x\to+\infty} w(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} w(x)=-\infty.$$

Uogólniając, możemy wypowiedzieć twierdzenie:

(5.4.16) *Gdy $x\to+\infty$, to wielomian $w(x)$ stopnia nieparzystego względem x dąży do nieskończoności z takim znakiem, jaki ma współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x, a gdy $x\to-\infty$, to tenże wielomian $w(x)$ dąży do nieskończoności ze znakiem przeciwnym do znaku współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x.*

ZADANIE 5.11. Obliczyć granice wielomianu

$$w(x)=-3x^4+5x^3-2x^2-x+15,$$

gdy $x\to+\infty$ i gdy $x\to-\infty$.

Rozwiązanie. Postępując jak wyżej stwierdzamy, że granica wielomianu $w(x)$ zarówno przy $x\to+\infty$, jak i przy $x\to-\infty$ zależy jedynie od granicy wyrażenia $-3x^4$. Po-

---

([1]) Symbol $\max(a, b)$ oznacza większą z liczb a i b, gdy są nierówne, a w przypadku $a=b$ przyjmujemy $\max(a, b)=a=b$.

([2]) Symbol $\min(a, b)$ oznacza mniejszą z liczb a i b, gdy są nierówne, a w przypadku $a=b$ przyjmujemy $\min(a, b)=a=b$.

nieważ, jak łatwo okazać:

$$\lim_{x\to-\infty}(-3x^4)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}(-3x^4)=-\infty,$$

więc

$$\lim_{x\to-\infty}w(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}w(x)=-\infty.$$

Uogólniając możemy wypowiedzieć twierdzenie:

(5.4.17) *Wielomian $w(x)$ stopnia parzystego względem zmiennej x zarówno przy $x\to-\infty$, jak i przy $x\to+\infty$ dąży do nieskończoności tego samego znaku co znak współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x.*

ZADANIE 5.12. Wyznaczyć granicę funkcji

$$f(x)=e^{1/x}$$

w punkcie $x=0$.

Rozwiązanie. Przy wyznaczaniu prawostronnej i lewostronnej granicy danej funkcji korzystamy z następujących wzorów dotyczących funkcji wykładniczej:

(5.4.18)
$$\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}a^x=0\quad \text{dla}\quad a>1,$$
$$\lim_{x\to+\infty}a^x=0,\quad \lim_{x\to-\infty}a^x=+\infty\quad \text{dla}\quad 0<a<1.$$

Opierając się na powyższych wzorach oraz korzystając z wyników zadania 5.4 otrzymujemy:

$$\lim_{x\to+0}e^{1/x}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}e^{1/x}=0.$$

ZADANIE 5.13. Obliczyć granicę funkcji $e^{1/(1-x^2)}$ w punkcie $x=1$.

Rozwiązanie. Opierając się na wzorach (5.4.18) oraz na wynikach zadania 5.9 otrzymujemy

$$\lim_{x\to1+0}e^{\frac{1}{1-x^2}}=0,\quad \lim_{x\to1-0}e^{\frac{1}{1-x^2}}=+\infty.$$

ZADANIE 5.14. *Znaleźć* granicę wartości L obwodu wielokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu R, gdy ilość boków dąży do nieskończoności.

Rozwiązanie. Długość obwodu foremnego wielokąta o n bokach (rys. 5.5):

$$L_n=n\cdot2\cdot R\sin\frac{\pi}{n}=2Rn\sin\frac{\pi}{n}.$$

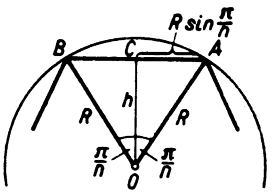
Graniczna wartość obwodu:

$$L=\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}2Rn\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}2R\pi\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=2\pi R.$$

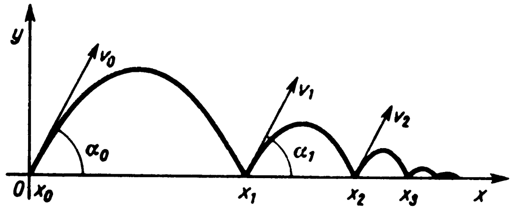
ZADANIE 5.15. Rozważmy ciąg wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu R, gdy ilość boków wielokąta dąży do nieskończoności. Znaleźć granicę S pól tych wielokątów.

Rozwiązanie. Podzielmy wielokąt na trójkąty (rys. 5.5). Przez h oznaczmy wysokość trójkąta, a przez n ilość boków wielokąta. Z trójkąta OCA otrzymujemy

$$h = R\cos\frac{\pi}{n}, \qquad CA = R\sin\frac{\pi}{n}.$$



Rys. 5.5



Rys. 5.6

Pole powierzchni wielokąta foremnego o n bokach wynosi

$$S_n = n\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{\pi}{n}\cdot R\cos\frac{\pi}{n} = R^2 n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}.$$

Graniczna wartość pola:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} R^2 n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \pi R^2\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\pi}{n}.$$

Korzystając ze wzoru (5.4.15) otrzymujemy $S = \pi R^2$.

ZADANIE 5.16. Piłka odbija się od płaszczyzny poziomej w punkcie $P_0(x_0)$ pod kątem α_0 z prędkością początkową v_0, opada i ponownie odbija się kolejno: w punkcie $P_1(x_1)$ pod kątem α_1 z prędkością v_1, w punkcie $P_2(x_2)$ pod kątem α_2 z prędkością $v_2, \ldots$, w puncie $P_n(x_n)$ pod kątem α_n z prędkością v_n. Przy każdym odbiciu część energii kinetycznej zostaje stracona, wskutek czego prędkości piłki w momentach odbicia maleją.

Zakładając, że

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \ldots = \alpha$$

oraz

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = \ldots = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \ldots = c < 1,$$

obliczyć odległość d, na jaką piłka odskoczy od punktu $P_0(x_0)$ (rys. 5.6).

Rozwiązanie. Jeżeli prędkość piłki odskakującej pod kątem α wynosi v, to składowa pozioma prędkości jest $v_x = v\cos\alpha$, a składowa pionowa $v_y = v\sin\alpha$. Czas wznoszenia

$$t = \frac{v_y}{g} = \frac{v\sin\alpha}{g}.$$

W tym czasie piłka odskoczy w kierunku poziomym na odległość

$$x = v_x t = v\cos\alpha \frac{v\sin\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{2g}.$$

Mamy więc

$$x_1 - x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad x_2 - x_1 = \frac{v_1^2\sin 2\alpha}{g}, \quad \ldots, \quad x_{n+1} - x_n = \frac{v_n^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad \ldots$$

Trzeba zsumować szereg

$$d = \frac{\sin 2\alpha}{g}(v_0^2 + v_1^2 + \ldots + v_n^2 + \ldots).$$

Podstawiając

$$v_1 = cv_0, \quad v_2 = c^2 v_0, \quad \ldots, \quad v_n = c^n v_0, \quad \ldots$$

otrzymujemy

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}(1 + c^2 + c^4 + \ldots + c^{2n} + \ldots),$$

co przy $0 < c < 1$ daje

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \cdot \frac{1}{1-c^2}.$$

Zadanie 5.17. Bryła składa się ze stosu walców leżących kolejno jeden na drugim i mających wspólną oś. Dolny walec ma promień $r = 10$ cm i wysokość $h = 1$ cm, a promień i wysokość każdego następnego walca są dwa razy mniejsze od promienia i wysokości walca poprzedzającego. Obliczyć wysokość i objętość bryły, gdy ilość walców nieskończenie wzrasta.

Rozwiązanie. Gdyby było n walców, to suma ich wysokości wynosiłaby

$$H_n = h + \frac{h}{2} + \frac{h}{2^2} + \ldots + \frac{h}{2^{n-1}} = h\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2h\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

a suma objętości wynosiłaby

$$V_n = \pi r^2 h + \frac{\pi r^2 h}{8} + \frac{\pi r^2 h}{8^2} + \ldots + \frac{\pi r^2 h}{8^{n-1}} =$$

$$= \pi r^2 h\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{8^{n-1}}\right) = \pi r^2 h \frac{1 - \frac{1}{8^n}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7}\pi r^2 h\left(1 - \frac{1}{8^n}\right).$$

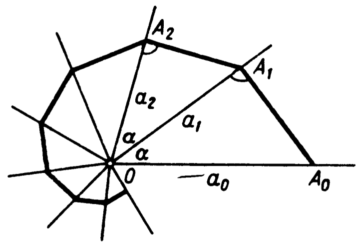
Gdy $n \to \infty$, mamy

$$H=\lim_{n\to\infty} H_n=\lim_{n\to\infty} 2h\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2h, \qquad V=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{7}\pi r^2 h\left(1-\frac{1}{8^n}\right)=\frac{8}{7}\pi r^2 h.$$

ZADANIE 5.18. Dany jest odcinek a_0 i kąt ostry α. Na płaszczyźnie dane są we współrzędnych biegunowych punkty:

$$A_0(\varphi=0,\ \rho=a),\ A_1(\varphi=\alpha,\ \rho=a\cos\alpha),\ \ldots,\ A_n(\varphi=n\alpha,\ \rho=a\cos^n\alpha),\ldots$$

Obliczyć granicę długości linii łamanej $A_0A_1A_2\ldots A_n\ldots$ (rys. 5.7).



Rys. 5.7

Rozwiązanie. Obliczmy kolejno boki łamanej:

$$A_0A_1=a_0\sin\alpha, \quad A_1A_2=a_1\sin\alpha=a_0\cos\alpha\sin\alpha, \quad \ldots,$$
$$A_{n-1}A_n=a_0\cos^n\alpha\sin\alpha, \quad \ldots$$

Trzeba znaleźć sumę szeregu

$$L=\sum_{n=0}^{\infty} a\cos^n\alpha\sin\alpha, \qquad \text{czyli} \qquad L=a\sin\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\cos^n\alpha.$$

Ponieważ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos^n\alpha=\frac{1}{1-\cos\alpha},$$

więc

$$L=\frac{a\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, \qquad \text{skąd} \qquad L=a\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Zadania

Obliczyć następujące granice (zad. 5.19 - 5.53):

5.19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x+2}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-2}$.

5.21. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

5.23. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x-3}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

5.26. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^5+32}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^3+125}{2x^2-50}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x-1}$.

5.31. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x^2-9}$.

5.32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$.

Wskazówka. W zadaniu 5.32 położyć $1+mx=t^3$.

5.33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$, n — liczba naturalna.

5.34. $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$.

5.35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$

5.36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

5.37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$.

5.38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{3\sin 2x}$.

5.39. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

5.40. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi}\dfrac{\sin x}{x}$.

5.41. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi}\dfrac{\cos x}{x-\frac{1}{2}\pi}$.

5.42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{4x}$.

5.43. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{8-x}{\sin\frac{1}{8}\pi x}$.

Wskazówka. W zadaniu 5.43 zastosować wzór $\sin x=\sin(\pi-x)$.

5.44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

5.45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$.

5.46. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}$.

5.47. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}\pi}\dfrac{\cos x-\cos\frac{1}{4}\pi}{\sin x-\sin\frac{1}{4}\pi}$.

5.48. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|\operatorname{tg}(x-1)|}{(x-1)^2}$.

5.49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Wskazówka. W zadaniu 5.49 położyć $\operatorname{arctg} x=\alpha$.

5.50. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$.

5.51. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}$.

Wskazówka. W zadaniu 5.50 położyć $\arcsin(1-2x)=\alpha$.

5.52. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

5.53. $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{n}{x}}$.

Zbadać ciągłość następujących funkcji (zad. 5.54 - 5.60):

5.54. $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$ dla $x\neq -5$ i $f(-5)=-10$.

5.55. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ dla $x\neq 0$ i $f(0)=1$.

5.56. $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ dla $x\neq 0$ i $f(0)=1$.

5.57. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

5.58. $f(x)=\dfrac{x^2-x^3}{|x-1|}$.

5.59. $f(x)=x-[x]$.

5.60. $f(x)=[x]+[-x]$.

W zadaniach 5.61 - 5.63 określić funkcję $f(x)$ w punkcie $x=0$ tak, aby była ona ciągła:

5.61. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

5.62. $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$.

5.63. $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

Znaleźć granicę lewostronną i granicę prawostronną następujących funkcji (zad. 5.64 - 5.75):

5.64. $\dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right]$ w punkcie $x=0$.

5.65. $\dfrac{b}{x}\left[\dfrac{x}{a}\right]$ w punkcie $x=0$.

5.66. $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ w punkcie $x=0$.

5.67. $e^{\frac{1}{1-x^3}}$ w punkcie $x=1$.

5.68. $xe^{\frac{1}{x}}$ w punkcie $x=0$.

5.69. $\dfrac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}}$ w punkcie $x=1$.

5.70. $\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ w punkcie $x=0$.

5.71. $2^{\frac{1}{x-a}}$ w punkcie $x=a$.

5.72. $\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+2}$ w punkcie $x=0$.

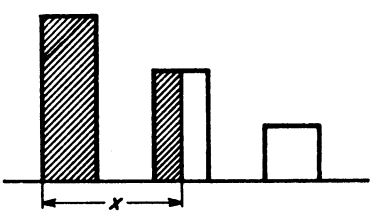
5.73. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } -\infty<x<0, \\ \sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } 0<x<\infty \end{cases}$ w punkcie $x=0$.

5.74. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|\sin x|}}$ w punkcie $x=0$.

5.75. $\dfrac{b+c}{2}+\dfrac{b-c}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{a}{x-a}$ w punkcie $x=a$.

5.76. Znaleźć graniczną wartość pierwiastków równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$ $(b\neq 0)$ przy $a\to 0$.

5.77. Dane są trzy prostokąty o jednakowych podstawach równych 1 m i o wysokościach odpowiednio równych 3, 2 i 1 m ustawione w odległości 1 m od siebie (rys. 5.8). Zakładając, że x zmienia się w sposób ciągły, wyrazić zakreślone pole jako funkcję x. Czy funkcja ta będzie ciągła?



Rys. 5.8

5.78. Wierzchołek B trójkąta ABC porusza się po prostej BE równoległej do prostej AC oddalając się nieograniczenie w prawo. Zbadać, jak się będą zmieniały boki trójkąta, kąty wewnętrzne i kąt zewnętrzny BCD.

5.79. Niech p oznacza strzałkę łuku opartego na kącie środkowym φ, p_1 natomiast oznacza strzałkę łuku opartego na kącie środkowym $\frac{1}{2}\varphi$. Obliczyć granicę stosunku strzałek p/p_1, gdy $\varphi\to 0$.

5.80. W kole poprowadzono cięciwę AB. Punkty A i B połączono ze środkiem C łuku AB. Przez punkty A i B poprowadzono następnie styczne do koła przecinające się w punkcie D. Obliczyć granicę stosunku pól trójkątów ABC i ABD, gdy kąt środkowy oparty na łuku AB dąży do 0.

5.81. Niech funkcja $f(t)$ będzie równa ilości stanów skupienia związku H_2O (lód, woda, para) w temperaturze t pod ciśnieniem 1 atm. Znaleźć granicę lewostronną i granicę prawostronną funkcji w temperaturze $t=0°$ oraz wartość funkcji dla $t=0°$. Czy funkcja w punkcie $t=0°$ jest ciągła?

Rozdział VI

POCHODNE FUNKCJI POSTACI $y=f(x)$

§ 6.1. POCHODNE RZĘDU PIERWSZEGO

Pochodną funkcji $y=f(x)$ w punkcie x nazywamy granicę, do której dąży stosunek przyrostu funkcji Δy do odpowiedniego przyrostu zmiennej niezależnej Δx, gdy przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera, czyli granicę

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

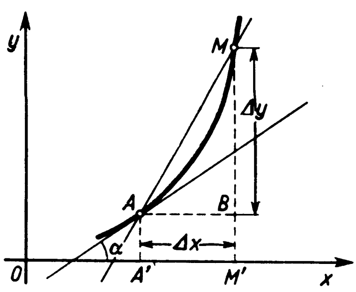
Jeżeli granica taka nie istnieje, to funkcja w tym punkcie nie ma pochodnej.

Pochodną funkcji $y=f(x)$ oznaczamy

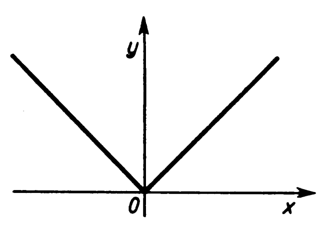
$$y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \dot{y}$$

Pierwsze dwa symbole wprowadził Lagrange, trzeci i czwarty symbol — Leibniz, ostatni — Newton; ten ostatni symbol używany jest najczęściej w mechanice.

Geometrycznie, *pochodna funkcji $y=f(x)$ w danym punkcie równa się współczynnikowi kątowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie* (rys. 6.1) ([1]).



Rys. 6.1



Rys. 6.2

Odnajdywanie pochodnej funkcji nazywa się *różniczkowaniem funkcji*. Dział matematyki traktujący o pochodnych, ich własnościach i zastosowaniach nazywamy *rachunkiem różniczkowym*.

([1]) *Współczynnik kątowy prostej* jest to tangens kąta α, który prosta tworzy z dodatnim zwrotem osi Ox.

Zachodzą twierdzenia:

(6.1.1) *Jeżeli funkcja ma w danym punkcie pochodną skończoną, czyli jest funkcją różniczkowalną, to jest w tym punkcie ciągła.*

Ale funkcja ciągła może nie mieć pochodnej, np. funkcja $y=|x|$ w punkcie $x=0$ (rys. 6.2).

(6.1.2) *Pochodna funkcji stałej równa się zeru, tzn. jeżeli $y=c$, to $y'=0$.*

(6.1.3) *Pochodna iloczynu stałej przez funkcję równa się iloczynowi stałej przez pochodną funkcji, tzn. jeżeli $y=c\cdot f(x)$, to*

$$y'=c\cdot f'(x).$$

Niech $u=f(x)$, $v=g(x)$ oznaczają funkcje różniczkowalne. Wówczas zachodzą trzy podane niżej wzory:

(6.1.4) *Pochodna sumy funkcji. Jeżeli $y=u+v$, to*

$$y'=u'+v'.$$

(6.1.5) *Pochodna iloczynu funkcji. Jeżeli $y=uv$, to*

$$y'=u'v+uv'.$$

(6.1.6) *Pochodna ilorazu funkcji. Jeżeli $y=u/v$ i $v\neq 0$, to*

$$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

(6.1.7) *Pochodna funkcji złożonej* (por. § 4.3). *Jeżeli funkcja złożona* (*superponowana*) *$y=f(g(x))$ jest określona w pewnym otoczeniu punktu $x=x_0$, funkcja $g(x)$ jest różniczkowalna w punkcie $x=x_0$, a funkcja $f(u)$ różniczkowalna w punkcie $u=u_0$, gdzie $u_0=g(x_0)$, to pochodną funkcji złożonej $y=f(g(x))$ w punkcie $x=x_0$ obliczamy podług wzoru*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\left(\frac{dy}{du}\right)_{u=u_0}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_0}$$

(6.1.8) *Pochodna funkcji odwrotnej* (por. § 4.5). *Jeżeli funkcja różniczkowalna $y=f(x)$ ma funkcję odwrotną $x=\varphi(y)$, to pochodna funkcji odwrotnej $x=\varphi(y)$ równa się odwrotności pochodnej danej funkcji $y=f(x)$:*

$$\frac{dx}{dy}=1:\frac{dy}{dx},\quad \textit{jeżeli}\quad \frac{dy}{dx}\neq 0.$$

Po prawej stronie wzoru po obliczeniu pochodnej dy/dx należy podstawić $x=\varphi(y)$.

PRZYKŁAD. Dana jest funkcja $y=\operatorname{tg} x$, której pochodna jest

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Chcemy obliczyć pochodną funkcji odwrotnej $x=\operatorname{arctg} y$. Korzystając ze wzoru (6.1.8) mamy

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\cos^2 x.$$

Prawą stronę przekształcamy na podstawie znanej tożsamości trygonometrycznej

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

i podstawiając $\operatorname{tg} x=y$ otrzymujemy

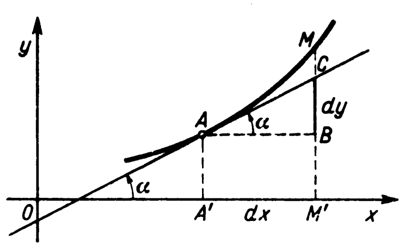
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+y^2}, \quad \text{czyli} \quad (\operatorname{arctg} y)'=\frac{1}{1+y^2}.$$

Różniczką dy funkcji $y=f(x)$ nazywamy iloczyn pochodnej tej funkcji przez dowolny przyrost dx zmiennej niezależnej:

(6.1.9) $$dy=f'(x)\,dx.$$

Różniczka funkcji przedstawia główną część przyrostu funkcji.

Na rysunku 6.3 różniczka BC przedstawia główną część przyrostu funkcji BM, odpowiadającego przyrostowi argumentu dx.



Rys. 6.3

Różniczka funkcji znajduje często zastosowanie w przypadku, gdy wielkości występujące we wzorze, pochodzące z pomiarów, nie są dokładne, lecz podane z pewnym błędem. Wówczas błąd wielkości obliczonej ze wzoru daje się wyznaczyć za pomocą różniczki.

Wymienimy ważniejsze wzory rachunku różniczkowego:

(6.1.10) $(x^a)'=ax^{a-1}$, $x>0$, a — dowolna liczba rzeczywista.

(6.1.11) $(\sin x)'=\cos x$.

(6.1.12) $(\cos x)'=-\sin x$.

(6.1.13) $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$, $\cos x\neq 0$.

(6.1.14) $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\operatorname{ctg}^2 x)$, $\sin x\neq 0$.

(6.1.15) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1, \quad -\frac{1}{2}\pi\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{1}{2}\pi.$

(6.1.16) $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1, \quad 0\leqslant\arccos x\leqslant\pi.$

(6.1.17) $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}, \qquad -\frac{1}{2}\pi<\operatorname{arctg} x<\frac{1}{2}\pi.$

(6.1.18) $(\operatorname{arcctg} x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}, \qquad 0<\operatorname{arcctg} x<\pi.$

(6.1.19) $(e^x)'=e^x.$

(6.1.20) $(a^x)'=a^x\ln a, \quad a>0.$

(6.1.21) $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}, \quad x\neq 0.$

(6.1.22) $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\ln a}=\dfrac{1}{x}\log_a e, \quad a>0, \quad a\neq 1, \quad x\neq 0.$

(6.1.23) $(\sinh x)'=\cosh x.$

(6.1.24) $(\cosh x)'=\sinh x.$

(6.1.25) $(\operatorname{tgh} x)'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}.$

(6.1.26) $(\operatorname{ctgh} x)'=\dfrac{-1}{\sinh^2 x}.$

(6.1.27) $(\operatorname{arsinh} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

(6.1.28) $(\operatorname{arcosh} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x\neq 1.$

(6.1.29) $(\operatorname{artgh} x)'=\dfrac{1}{1-x^2}, \quad -1<x<1.$

(6.1.30) $(\operatorname{arctgh} x)'=\dfrac{-1}{1-x^2}, \quad x<-1 \text{ lub } x>1.$

We wszystkich wzorach powyższych wielkości n, a oznaczają stałe: $\ln x$ oznacza logarytm naturalny, tj. logarytm obliczony przy podstawie e (por. str. 33).

Zadanie 6.1. Obliczyć pochodną funkcji

$$y=x^7-4x^5+13x^4-x+19.$$

Rozwiązanie. Mamy

$$y'=7x^6-4\cdot 5x^4+13\cdot 4x^3-1, \quad \text{czyli} \quad y'=7x^6-20x^4+52x^3-1.$$

Zadanie 6.2. Obliczyć pochodną funkcji

$$y=\frac{4x^5-2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Rozwiązanie. Wyłączamy stały czynnik $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ przed znak pochodnej:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}(4x^5-2)'=\frac{20x^4}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=20x^4\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Zadanie 6.3. Obliczyć pochodną funkcji

$$y=\frac{4x^7+3x^5-2x^4+7x-2}{3x^4}.$$

Rozwiązanie. Funkcja y jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych z wyjątkiem punktu $x=0$. Zakładając, że $x\neq 0$, dzielimy licznik przez mianownik:

$$y=\tfrac{4}{3}x^3+x-\tfrac{2}{3}+\tfrac{7}{3}x^{-3}-\tfrac{2}{3}x^{-4}.$$

Następnie obliczamy pochodną

$$y'=4x^2+1-7x^{-4}+\tfrac{8}{3}x^{-5}.$$

Możemy ją napisać w postaci

$$y'=4x^2+1-\frac{7}{x^4}+\frac{8}{3x^5}=\frac{12x^7+3x^5-21x+8}{3x^5}.$$

Zadanie 6.4. Obliczyć pochodną funkcji $y=4x^3\sqrt{x}$.

Rozwiązanie. Funkcja y jest ciągła, gdy $x\geqslant 0$. Wyrażamy y jako potęgę zmiennej x:

$$y=4x^3x^{1/2}=4x^{3+\frac{1}{2}}=4x^{7/2}.$$

Obliczamy pochodną

$$y'=4\cdot\tfrac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1}=14x^{\frac{5}{2}}=14x^2\sqrt{x}.$$

Zadanie 6.5. Obliczyć pochodną funkcji

$$y=\frac{3x^2-4x\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt{x}}.$$

Rozwiązanie. Funkcja y jest ciągła, gdy $x>0$. Dzielimy licznik przez mianownik zastępując przedtem pierwiastki odpowiednimi potęgami o wykładnikach ułamkowych:

$$y=\frac{3x^2-4x\,x^{2/3}}{2x^{1/2}}=\frac{3x^2-4x^{5/3}}{2x^{1/2}}, \quad \text{skąd} \quad y=\frac{3}{2}x^{3/2}-2x^{7/6}.$$

Obliczamy pochodną

$$y'=\tfrac{9}{4}x^{1/2}-\tfrac{7}{3}x^{1/6}=\tfrac{9}{4}\sqrt{x}-\tfrac{7}{3}\sqrt[6]{x}.$$

ZADANIE 6.6. Obliczyć pochodną funkcji

$$y=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt[4]{x^3}}}.$$

Rozwiązanie. Funkcja y jest ciągła, gdy $x\geqslant 0$. Zastępujemy pierwiastki potęgami o odpowiednich wykładnikach ułamkowych poczynając od najbardziej wewnętrznego pierwiastka:

$$y=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt[4]{x^3}}}=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^{7/4}}}=\sqrt[3]{x^{23/8}}=x^{23/24},$$

skąd

$$y'=\tfrac{23}{24}x^{-1/24}=\tfrac{23}{24}\,\frac{1}{\sqrt[24]{x}}.$$

ZADANIE 6.7. Obliczyć pochodną funkcji $y=x^3\cos x$.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór na pochodną iloczynu:

$$y'=(x^3)'\cos x+x^3(\cos x)'=3x^2\cos x-x^3\sin x.$$

ZADANIE 6.8. Obliczyć pochodną funkcji

$$y=\frac{2-x^2}{2x^3+x+3}$$

Rozwiązanie. Stosujemy wzór na pochodną ilorazu. Pochodna licznika $(2-x^2)'=-2x$, pochodna mianownika $(2x^3+x+3)'=6x^2+1$, a więc

$$y'=\frac{-2x(2x^3+x+3)-(2-x^2)(6x^2+1)}{(2x^3+x+3)^2}=\frac{2x^4-13x^2-6x-2}{(2x^3+x+3)^2}.$$

ZADANIE 6.9. Obliczyć pochodną funkcji

$$y=(4x^5-7x^3+14x^2-5)^3.$$

Rozwiązanie. Daną funkcję można uważać za funkcję złożoną:

$$y=u^3, \quad \text{gdzie} \quad u=4x^5-7x^3+14x^2-5.$$

Pochodną funkcji y względem x obliczamy podług wzoru (6.1.7):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

gdzie

$$\frac{dy}{du}=3u^2, \quad \frac{du}{dx}=20x^4-21x^2+28x.$$

Otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx}=3u^2(20x^4-21x^2+28x).$$

Podstawiając $u=4x^5-7x^3+14x^2-5$ otrzymujemy ostatecznie

$$y'=3(4x^5-7x^3+14x^2-5)^2(20x^4-21x^2+28x).$$

ZADANIE 6.10. Obliczyć pochodną funkcji $y=\sqrt{3x^2-7x+12}$.

Rozwiązanie. Wyrażenie podpierwiastkowe jest dodatnie przy wszystkich wartościach x. Oznaczamy wyrażenie podpierwiastkowe przez z i otrzymujemy funkcję złożoną określoną wzorami:

$$y=\sqrt{z}, \quad \text{gdzie} \quad z=3x^2-7x+12,$$

skąd

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{2\sqrt{z}}, \quad \frac{dz}{dx}=6x-7,$$

a więc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{z}}(6x-7)=\frac{6x-7}{2\sqrt{3x^2-7x+12}}.$$

ZADANIE 6.11. Obliczyć pochodną funkcji $y=\sin 4x$.

Rozwiązanie. Oznaczając $4x=z$ otrzymujemy

$$y=\sin z, \quad \text{gdzie} \quad z=4x,$$

skąd

$$\frac{dy}{dz}=\cos z, \quad \frac{dz}{dx}=4,$$

a więc

$$\frac{dy}{dx}=\cos z\cdot 4=4\cos 4x.$$

ZADANIE 6.12. Obliczyć pochodną funkcji $y=\cos^3 x$.

Rozwiązanie. Oznaczając $\cos x=z$ otrzymujemy

$$y=z^3, \quad \text{gdzie} \quad z=\cos x,$$

skąd

$$\frac{dy}{dz}=3z^2, \quad \frac{dz}{dx}=-\sin x,$$

a więc

$$\frac{dy}{dx}=3z^2(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x.$$

ZADANIE 6.13. Obliczyć pochodną funkcji $y=e^{-x}$.

Rozwiązanie. Oznaczając $-x=z$ otrzymujemy

$$y=e^z, \quad \text{gdzie} \quad z=-x,$$

skąd

$$\frac{dy}{dz}=e^z, \quad \frac{dz}{dx}=-1,$$

a więc

$$\frac{dy}{dx}=e^z\cdot(-1)=-e^{-x}.$$

ZADANIE 6.14. Obliczyć pochodną funkcji $y=e^{4x^3-6x+1}$.

Rozwiązanie. Oznaczając $4x^3-6x+1=z$ otrzymujemy

$$y=e^z, \quad \text{gdzie} \quad z=4x^3-6x+1,$$

skąd

$$\frac{dy}{dz}=e^z, \quad \frac{dz}{dx}=12x^2-6,$$

a więc

$$\frac{dy}{dx}=e^z(12x^2-6)=(12x^2-6)\,e^{4x^3-6x+1}.$$

ZADANIE 6.15. Obliczyć pochodną funkcji $y=\operatorname{tg}^4 2x$.

Rozwiązanie. Jest to funkcja ciągła, jeżeli $\cos 2x\neq 0$. Można ją uważać za funkcję złożoną, która powstaje z superpozycji trzech następujących funkcji prostych:

$$y=z^4, \quad z=\operatorname{tg} u, \quad u=2x,$$

skąd

$$\frac{dy}{dz}=4z^3, \quad \frac{dz}{du}=\frac{1}{\cos^2 u}, \quad \frac{du}{dx}=2.$$

Stosując wzór $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx}=4z^3\frac{1}{\cos^2 u}\cdot 2,$$

a po pozbyciu się pośrednictwa zmiennych z i u otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx}=4\operatorname{tg}^3 2x\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2=\frac{8\operatorname{tg}^3 2x}{\cos^2 2x}=\frac{8\sin^3 2x}{\cos^5 2x}.$$

ZADANIE 6.16. Obliczyć pochodną funkcji

$$y=\sin^3\sqrt{\frac{1-2x}{x}}.$$

Rozwiązanie. Funkcja ta określona jest w przedziale $0<x\leqslant\frac{1}{2}$. Można ją przedstawić za pomocą czterech funkcji prostych:

$$y=z^3,\qquad z=\sin u,\qquad u=\sqrt{t},\qquad t=\frac{1-2x}{x},$$

skąd

$$\frac{dy}{dz}=3z^2,\qquad \frac{dz}{du}=\cos u,\qquad \frac{du}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}},\qquad \frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}.$$

Stosując wzór $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx}=3z^2\cdot\cos u\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Wracając do zmiennej x mamy

$$\frac{dy}{dx}=3\sin^2\sqrt{\frac{1-2x}{x}}\cos\sqrt{\frac{1-2x}{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-2x}{x}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

i ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2x\sqrt{x(1-2x)}}\sin^2\sqrt{\frac{1-2x}{x}}\cos\sqrt{\frac{1-2x}{x}}.$$

ZADANIE 6.17. Obliczyć pochodną funkcji

$$y=\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}.$$

Rozwiązanie. Funkcja ta jest określona, gdy $x<1$. Stosujemy wzór (6.1.6) na pochodną ilorazu:

$$y'=\frac{(x+1)'\sqrt{1-x}-(x+1)(\sqrt{1-x})'}{(\sqrt{1-x})^2},$$

lecz

$$(x+1)'=1,\qquad (\sqrt{1-x})'=\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}},$$

a więc

$$y'=\frac{\sqrt{1-x}+\frac{x+1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x}=\frac{2(1-x)+x+1}{(1-x)\cdot 2\sqrt{1-x}}$$

i ostatecznie

$$y'=\frac{3-x}{2(1-x)^{3/2}}.$$

ZADANIE 6.18. Obliczyć pochodną funkcji $y=x\sqrt{x^2+1}$.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (6.1.5) na pochodną iloczynu:

$$y'=(x)'\sqrt{x^2+1}+x(\sqrt{x^2+1})'.$$

Ponieważ

$$(x)'=1, \quad (\sqrt{x^2+1})'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

więc

$$y'=\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

ZADANIE 6.19. Obliczyć pochodną funkcji $y=4^x \operatorname{arctg} x$.

Rozwiązanie. Funkcja ta jest określona dla wszystkich wartości x. Obliczamy pochodną funkcji jako iloczynu $y=uv$ stosując wzory na pochodne funkcji $u=4^x$ oraz $v=\operatorname{arctg} x$:

$$y'=4^x \ln 4 \operatorname{arctg} x+\frac{4^x}{1+x^2}.$$

ZADANIE 6.20. Obliczyć pochodną funkcji $y=x^x$, $x>0$.

Rozwiązanie. Ponieważ $e^{\ln x}=x$, więc $x^x=e^{x\ln x}$. Pochodną funkcji $y=e^{x\ln x}$ obliczamy według wzoru na pochodną funkcji złożonej:

$$y'=e^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right).$$

Ostatecznie więc mamy

$$y'=x^x(\ln x+1).$$

ZADANIE 6.21. Obliczyć pochodną funkcji $y=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ w przedziale $0<x<\frac{1}{2}\pi$.

Rozwiązanie. Ponieważ $e^{\ln u}=u$, więc $\sin x=e^{\ln\sin x}$. Podnosimy obie strony do potęgi $\operatorname{tg} x$ i otrzymujemy

$$y=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=e^{\operatorname{tg} x\ln\sin x}.$$

Jest to funkcja postaci $e^{f(x)}$, a jej pochodna równa się $e^{f(x)}f'(x)$. Pamiętając, że w tym przykładzie wykładnik jest iloczynem, z łatwością otrzymujemy

$$y'=e^{\operatorname{tg} x\ln\sin x}\left[\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x+\operatorname{tg} x\frac{1}{\sin x}\cos x\right],$$

czyli ostatecznie

$$y'=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}+1\right).$$

Zadanie 6.22. Obliczyć pochodną funkcji $y=\sin(x^{\operatorname{tg} x})$ w przedziale $0<x<\frac{1}{2}\pi$.

Rozwiązanie. Podstawiając $z=x^{\operatorname{tg} x}$ otrzymujemy funkcję złożoną, określoną wzorami:

$$y=\sin z, \quad \text{gdzie} \quad z=x^{\operatorname{tg} x}.$$

Mamy $dy/dz=\cos z$. Aby znaleźć pochodną dz/dx, wykonujemy podobne przekształcenie jak w zadaniu poprzednim:

$$x=e^{\ln x}, \quad z=x^{\operatorname{tg} x}=e^{\ln x \operatorname{tg} x}.$$

Mamy więc

$$\frac{dz}{dx}=e^{\ln x \operatorname{tg} x}\left[\frac{1}{x}\operatorname{tg} x+\ln x\frac{1}{\cos^2 x}\right], \quad \text{czyli} \quad \frac{dz}{dx}=x^{\operatorname{tg} x}\left[\frac{\operatorname{tg} x}{x}+\frac{\ln x}{\cos^2 x}\right].$$

Stosując wzór $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$ otrzymujemy

$$y'=\cos(x^{\operatorname{tg} x})\,x^{\operatorname{tg} x}\left[\frac{\operatorname{tg} x}{x}+\frac{\ln x}{\cos^2 x}\right].$$

Zadanie 6.23. Obliczyć, jaki kąt z osią Ox tworzy styczna do paraboli

$$y=x^2-3x+8$$

w punkcie $x=1$.

Rozwiązanie. Jeżeli α oznacza kąt między osią x i styczną do krzywej $y=f(x)$ w punkcie $x=x_0$, to, jak wiemy z geometrycznej interpretacji pochodnej, zachodzi związek $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$, gdzie $f'(x_0)$ oznacza wartość pochodnej y' w danym punkcie $x=x_0$.

Obliczamy pochodną $y'=f'(x)=2x-3$. W punkcie $x=1$ pochodna ta przybiera wartość $f'(1)=-1$. Po uwzględnieniu równości $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$ otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\alpha=-1, \quad \text{skąd} \quad \alpha=135^\circ \; (\alpha=\tfrac{3}{4}\pi).$$

Zadanie 6.24. Obliczyć, w jakim punkcie styczna do linii

$$y=x^3-3x^2-9x+2$$

jest równoległa do osi Ox.

Rozwiązanie. Styczna będzie równoległa do osi Ox, jeżeli będzie spełniony warunek

$$y'=\operatorname{tg}\alpha=0.$$

Obliczając pochodną i przyrównując ją do zera otrzymujemy

$$3x^2-6x-9=0.$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy $x_1=-1$, $x_2=3$, a więc w dwóch punktach $(-1, 7)$ i $(3, -25)$ styczna do danej linii jest równoległa do osi Ox.

ZADANIE 6.25. Zależność drogi s od czasu t w pewnym ruchu prostoliniowym dana jest równaniem $s=t^2-2t-8$. Wyznaczyć prędkość średnią od chwili $t_1=4$ do chwili $t_2=4+h$, a następnie prędkość w chwili $t_1=4$.

Rozwiązanie. Droga przebyta w czasie od t_1 do t_2 wynosi

$$\Delta s=s(t_2)-s(t_1)=(4+h)^2-2(4+h)-8-(4^2-2\cdot 4-8)=h^2+6h.$$

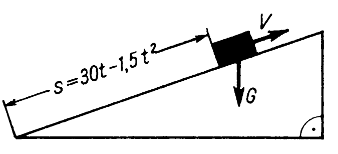
Prędkość średnia dla $4<t<4+h$ jest równa

$$v_{\acute{s}r}=\frac{\Delta s}{h}=\frac{h^2+6h}{h}=h+6,$$

zatem prędkość w chwili $t=4$ wynosi

$$v(4)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta s}{h}=\lim_{h\to 0}(h+6)=6.$$

ZADANIE 6.26. Dane jest równanie ruchu ciała wznoszącego się po równi pochyłej (rys. 6.4): $s=30t-1{,}5t^2$, gdzie s oznacza drogę przebytą w ciągu czasu t. Znaleźć: a) prędkość średnią ciała od chwili $t=t_0$ do chwili $t=t_0+\Delta t$; b) prędkość w chwili $t=t_0$; c) prędkość w chwili $t=2$ i w chwili $t=8$; d) czas t, po upływie którego ciało będzie miało prędkość równą zeru.



Rys. 6.4

Rozwiązanie. a) Prędkość średnia dla $t_0<t<t_0+\Delta t$:

$$v_{\acute{s}r}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\frac{30t_0+30\Delta t-1{,}5t_0^2-3t_0\Delta t-1{,}5\Delta t^2-30t_0+1{,}5t_0^2}{\Delta t}=$$

$$=\frac{30\Delta t-3t_0\Delta t-1{,}5\Delta t^2}{\Delta t}=30-3t_0-1{,}5\Delta t.$$

b) Prędkość w chwili $t=t_0$:

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(30-3t_0-1{,}5\Delta t)=30-3t_0.$$

c) Prędkość w chwili $t=2$:

$$v(2)=30-3\cdot 2=24$$

i w chwili $t=8$:

$$v(8)=30-3\cdot 8=6.$$

d) Prędkość spadnie do zera, gdy

$$v=30-3t=0, \quad \text{czyli} \quad t=10.$$

ZADANIE 6.27. Dla pewnego gazu, znajdującego się w gumowym zbiorniku, związek pomiędzy ciśnieniem p i objętością V wyraża się wzorem $pV=60$. Znaleźć prędkość zmian ciśnienia p w zależności od zmian objętości V dla $V=1$ i dla $V=2$.

Rozwiązanie. Zmianie objętości ΔV odpowiada zmiana ciśnienia:

$$\Delta p=p(V+\Delta V)-p(V).$$

Przyrost ciśnienia przypadający na jednostkę zmiany objętości zależy od objętości V i wyraża się wzorem

$$\lim_{\Delta v\to 0}\frac{p(V+\Delta V)-p(V)}{\Delta V}=\frac{dp}{dV}.$$

A ponieważ $p=\frac{60}{V}$, więc

$$\frac{dp}{dV}=-\frac{60}{V^2}.$$

Prędkość zmian ciśnienia p w zależności od zmian objętości V wynosi

$$\frac{dp}{dV}=-60 \text{ dla } V=1, \qquad \frac{dp}{dV}=-15 \text{ dla } V=2.$$

ZADANIE 6.28. W obwodzie prądu nieustalonego o równaniu $i=3te^{t-1}+1$ znajduje się dławik o oporze czynnym $R=0{,}2\Omega$ i indukcyjności $L=0{,}01$ H. Obliczyć wartość spadku napięcia

$$\Delta U=Ri+L\frac{di}{dt}$$

na dławiku w chwili $t=1$.

Rozwiązanie. Obliczmy pochodną

$$\frac{di}{dt}=3e^{t-1}+3te^{t-1}=3(t+1)e^{t-1},$$

a więc

$$\Delta U=R(3te^{t-1}+1)+3L(t+1)e^{t-1}.$$

Dla $t=1$ otrzymujemy $\Delta U=4R+6L=0{,}86$.

ZADANIE 6.29. Ilość elektryczności q, jaka przepłynęła przez pewne urządzenie od chwili $t=0$, wyraża się wzorem $q=2te^{-t}$. Wyznaczyć natężenie prądu $i=\frac{dq}{dt}$ w chwili $t=0$.

Rozwiązanie. Mamy

$$i=\frac{dq}{dt}=2e^{-t}-2te^{-t}=2(1-t)e^{-t}.$$

Podstawiając $t=0$ otrzymujemy $i=2$.

ZADANIE 6.30. Potencjał elektryczny V wzdłuż pewnej drogi x zmienia się według wzoru $V=x^3-(x-1)^2\sin x$. Obliczyć wartość składowej dV/dx natężenia pola elektrycznego wzdłuż drogi x w punktach $x=1$ i $x=2$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{dV}{dx}=3x^2-2(x-1)\sin x-(x-1)^2\cos x.$$

Podstawiając $x=1$ otrzymujemy $dV/dx=3$, a podstawiając $x=2$ otrzymujemy

$$\frac{dV}{dx}=12-2\sin 2-\cos 2=12-2\sin 114°35'-\cos 114°35'=$$

$$=12-2\cdot 0{,}9094+0{,}4160=10{,}6.$$

ZADANIE 6.31. Prąd przepływa przez pewne urządzenie. Ilość przepływającej elektryczności, liczonej od chwili $t=0$, określa wzór

$$Q=3e^{-2t}\left(1+\frac{1}{t+1}\right).$$

Obliczyć natężenie prądu dQ/dt w chwili początkowej $t=0$.

Rozwiązanie. Wartość natężenia prądu wynosi

$$i=\frac{dQ}{dt}=-6e^{-2t}\left(1+\frac{1}{t+1}\right)+3e^{-2t}\frac{-1}{(t+1)^2}.$$

Natężenie prądu w chwili $t=0$ wynosi $i=-15$.

ZADANIE 6.32. Strumień magnetyczny Φ obejmowany przez zwojnicę prądnicy zmienia się w zależności od kąta α obrotu twornika: $\Phi=10\sin\alpha$ Vs. Przy rozruchu twornik obraca się ruchem przyśpieszonym, określonym równaniem $\alpha=3(1-e^{-t/10})\ \mathrm{s}^{-1}$, gdzie t oznacza czas. Wyznaczyć wartość siły elektromotorycznej $E=-z\dfrac{d\Phi}{dt}$ indukowanej w zwojnicy o ilości zwojów $z=8$ po upływie czasu t_0 od chwili rozpoczęcia ruchu.

Rozwiązanie. Obliczamy według wzoru

$$E=-z\frac{d\Phi}{dt}=-z\frac{d\Phi}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}.$$

Mamy

$$E=-z\cdot 10\cos\alpha\cdot\frac{3}{10}e^{-t/10}=-3ze^{-t/10}\cos\alpha.$$

Podstawiając $z=8$, $t=t_0$ otrzymujemy $E=-24e^{-t_0/10}\cos\alpha$.

ZADANIE 6.33. Cewka o ilości zwojów $z=5$ obejmuje strumień elektromagnetyczny $\Phi=4e^{-t}\sin(2t+\frac{1}{3}\pi)$ Vs. Obliczyć siłę elektromotoryczną $E=-z\frac{d\Phi}{dt}$ dla $z=5$ i $t=0$.

Rozwiązanie. Obliczmy pochodną

$$\frac{d\Phi}{dt}=-4e^{-t}\sin(2t+\tfrac{1}{3}\pi)+8e^{-t}\cos(2t+\tfrac{1}{3}\pi),$$

a więc

$$E=4e^{-t}z\big(\sin(2t+\tfrac{1}{3}\pi)-2\cos(2t+\tfrac{1}{3}\pi)\big).$$

Dla $t=0$ i $z=5$ mamy

$$E=4\cdot 5(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-1)\approx -2{,}7\text{ V}.$$

ZADANIE 6.34. W cewce zmienia się natężenie prądu według wzoru $i=15\sin^5 3t$, gdzie t oznacza czas. Obliczyć dla chwili $t=\frac{2}{9}\pi$ siłę elektromotoryczną indukcji własnej $E=-L\frac{di}{dt}$, gdzie indukcyjność $L=0{,}03$.

Rozwiązanie. Obliczmy pochodną

$$\frac{di}{dt}=15\cdot 5\sin^4 3t\cdot 3\cos 3t=225\sin^4 3t\cos 3t.$$

Stąd

$$E=-L\frac{di}{dt}=-0{,}03\cdot 225\sin^4 3t\cos 3t=-6{,}75\sin^4 3t\cos 3t.$$

Dla $t=\frac{2}{9}\pi$ mamy

$$E=-6{,}75\sin^4\tfrac{2}{3}\pi\cos\tfrac{2}{3}\pi=-6{,}75\cdot\tfrac{9}{16}\cdot(-\tfrac{1}{2})=1{,}9.$$

ZADANIE 6.35. Przemianę adiabatyczną pewnego gazu określa równanie $pV^{1,4}=10$, gdzie p jest to ciśnienie wyrażone w atmosferach, a V jest to objętość wyznaczona w metrach sześciennych. W momencie gdy objętość gazu wynosiła $V=1$ m^3, objętość powiększała się z prędkością $dV/dt=0{,}02$ m^3/s. Z jaką prędkością opadało wówczas ciśnienie gazu?

Rozwiązanie. Ciśnienie gazu wyraża się wzorem $p=10V^{-1,4}$. Prędkość zmian ciśnienia wyraża się wzorem

$$\frac{dp}{dt}=-14V^{-2,4}\frac{dV}{dt}.$$

Podstawiając $V=1$, $dV/dt=0{,}02$ otrzymujemy $\frac{dp}{dt}=-0{,}28$ atm/s.

ZADANIE 6.36. Gaz znajdujący się w objętości V pod ciśnieniem p rozpręża się adiabatycznie według prawa $pV^{1,4}=\text{const}$ (zwanego *równaniem przemian adiabatycznych*). Wiedząc, że przy ciśnieniu $p=10$ atm i $V=3$ m^3 prędkość zmian objętości wynosi 0,3 m^3/s, obliczyć prędkość zmiany ciśnienia gazu.

Rozwiązanie. Z równania przemian adiabatycznych w postaci $pV^{1,4}=c$, gdzie $c=\text{const}$, znajdujemy $p=cV^{-1,4}$. Obliczmy pochodną względem czasu t:

$$\frac{dp}{dt}=-1{,}4cV^{-2,4}\frac{dV}{dt}.$$

Podstawiając $c=pV^{1,4}$ otrzymujemy związek

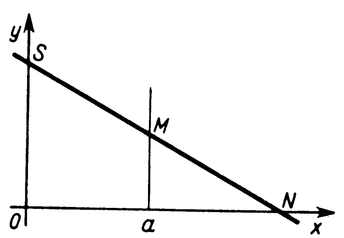
$$\frac{dp}{dt}=-1{,}4\frac{p}{V}\cdot\frac{dV}{dt}.$$

Podstawiając $p=10$, $V=3$, $dV/dt=0{,}3$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{dp}{dt}=-1{,}4\cdot\tfrac{10}{3}\cdot 0{,}3=-1{,}4.$$

Zatem w badanym momencie ciśnienie gazu zmniejsza się z prędkością 1,4 atm/s.

ZADANIE 6.37. Na płaszczyźnie dany jest układ współrzędnych Oxy. Po prostej o równaniu $x=a$, gdzie $a=3$ m, porusza się punkt M w kierunku rosnących wartości y z prędkością $V=1$ m/s. Prosta SM przechodząca przez stały punkt S o współrzędnych $x=0$, $y=4$ m przecina oś Ox w punkcie N (rys. 6.5). Wiedząc, że w momencie $t=0$ punkt M przecinał oś Ox, wyznaczyć prędkość ruchu punktu N po osi Ox w momentach $t=0{,}2$, 3, $3\frac{1}{2}$ s.



Rys. 6.5

Rozwiązanie. W momencie t punkt M ma współrzędne $x_1=3$, $y_1=t$, a punkt S ma współrzędne $x_2=0$, $y_2=4$. Wówczas prosta SM ma równanie

$$\frac{y-4}{t-4}=\frac{x}{3},$$

a ponieważ oś Ox ma równanie $y=0$, przeto dla punktu przecięcia N znajdujemy $x=\dfrac{-12}{t-4}$

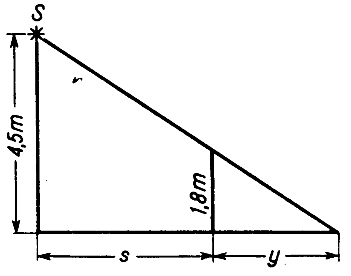
pod warunkiem, że $t \neq 4$. Obliczmy prędkość ruchu punktu N:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{12}{(t-4)^2}.$$

Układamy tabelkę

t	0	2	3	$3\frac{1}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	$\frac{3}{4}$	3	12	48

ZADANIE 6.38. Człowiek oddala się od latarni z prędkością 1,2 m/s idąc w kierunku swego cienia. Źródło światła znajduje się na wysokości 4,5 m. Wzrost człowieka wynosi 1,8 m. Z jaką prędkością wydłuża się cień człowieka?



Rys. 6.6

Rozwiązanie. Niech s oznacza odległość człowieka od latarni w momencie t, a długość cienia oznaczmy literą y (rys. 6.6). Wiemy, że $ds/dt = 1{,}2$. Na podstawie twierdzenia Talesa mamy proporcję

$$\frac{s+y}{y} = \frac{4{,}5}{1{,}8}, \quad \text{skąd} \quad y = \tfrac{2}{3}s.$$

a więc

$$\frac{dy}{dt} = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{ds}{dt} = \tfrac{2}{3} \cdot 1{,}2 = 0{,}8 \text{ m/s}.$$

Zatem cień człowieka wydłuża się z prędkością 0,8 m/s.

ZADANIE 6.39. Samolot lecący na południe z prędkością $v_2 = 200$ km/h, na wysokości $H = 0{,}5$ km znalazł się w pewnym momencie nad samochodem jadącym na wschód z prędkością $v_1 = 60$ km/h. Wyznaczyć prędkość poruszania się samolotu względem samochodu po upływie 0,1 godziny.

Rozwiązanie. Niechaj t oznacza czas liczony w godzinach od tego momentu, w którym samolot znalazł się nad samochodem. Niech x oznacza drogę przebytą przez samochód w czasie t, a y — drogę przebytą w tym czasie przez samolot. Odległość l między samochodem i samolotem wyraża się wzorem $l=\sqrt{x^2+y^2+H^2}$. Podstawiając $x=60t$, $y=200t$ i $H=0{,}5$ otrzymujemy

$$l=\sqrt{43\,600t^2+0{,}25}\,.$$

Prędkość poruszania się samolotu względem samochodu wyraża się pochodną

$$\frac{dl}{dt}=\frac{43600t}{l}\,.$$

Należy podstawić $t=0{,}1$. Otrzymujemy

$$\frac{dl}{dt}=\frac{4360}{\sqrt{436{,}25}}=209 \text{ km/h}\,.$$

Uwaga. W zadaniu tym można by dla uproszczenia przyjąć $H=0$, wówczas otrzymalibyśmy $l=\sqrt{x^2+y^2}$, skąd $l=t\sqrt{v_1^2+v_2^2}$. Prędkość względna wyraża się wzorem

$$\frac{dl}{dt}=\sqrt{v_1^2+v_2^2}\,,$$

co po podstawieniu daje $dl/dt=\sqrt{43600}=209$.

ZADANIE 6.40. Drabina o długości $s=5$ m, oparta o ścianę budynku, zaczęła się obsuwać. Przy kącie pochylenia drabiny $\alpha=60°$ względem poziomu prędkość v obsuwania się podstawy drabiny od ściany wynosiła 0,5 m/s. Obliczyć prędkość obsuwania się wzdłuż ściany drugiego końca drabiny.

Rozwiązanie. Oznaczmy wysokość punktu oparcia drabiny o ścianę budynku przez y, a odległość podstawy drabiny od ściany przez x. W momencie $t=0$ mamy dane $dx/dt=0{,}5$. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy $x^2+y^2=25$. Różniczkując względem czasu t otrzymujemy

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0\,. \tag{1}$$

Odległość podstawy drabiny od ściany przy $\alpha=60°$ wynosi

$$x=5\cos\alpha=5\cos 60°=\tfrac{5}{2}\,.$$

Wysokość punktu oparcia drabiny przy $\alpha=60°$ wynosi

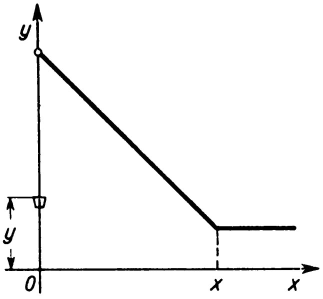
$$y=5\sin\alpha=5\sin 60°=\tfrac{5}{2}\sqrt{3}\,.$$

Otrzymane wartości wstawiamy do równania (1):

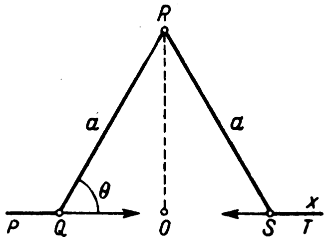
$$\frac{5}{2}\cdot 0{,}5+\frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{dy}{dt}=0\,, \quad \text{skąd} \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ m/s}\,.$$

ZADANIE 6.41. Robotnik wciąga w górę kubeł z wapnem. Kubeł wisi na linie przerzuconej przez bloczek zawieszony na wysokości 8,5 m nad ziemią. Robotnik trzymając linę na wysokości 1,5 m przesuwa ją w rękach z prędkością 0,4 m/s, a jednocześnie cofa się z prędkością 0,8 m/s. W momencie gdy kubeł stał na ziemi, robotnik był w odległości 1 m od kubła. Znaleźć prędkość kubła w chwili, gdy robotnik cofnie się o 4 m.

Rozwiązanie. Przyjmijmy układ współrzędnych jak na rysunku 6.7. Nie uwzględniając wysokości kubła przyjmujemy, że w chwili $t=0$ kubeł ma współrzędne $(0, 0)$, a lina



Rys. 6.7



Rys. 6.8

w ręku robotnika ma współrzędne $(1, 1{,}5)$. Długość liny od kubła do bloczka wynosiła 8,5 m, a od bloczka do ręki wynosiła

$$\sqrt{1^2+(8{,}5-1{,}5)^2}=\sqrt{50}=7{,}07\,.$$

Po upływie t s długość liny od bloczka do ręki wynosić będzie

$$\sqrt{(1+0{,}8t)^2+(8{,}5-1{,}5)^2}, \qquad \text{czyli} \qquad \sqrt{0{,}64t^2+1{,}6t+50}\,,$$

a więc wskutek cofania się robotnika, pionowa część liny skróci się o odcinek

$$\sqrt{0{,}64t^2+1{,}6t+50}-7{,}07\,.$$

Ponadto robotnik w ciągu t s ściągnie $0{,}4t$ m liny, więc ostatecznie

$$y=\sqrt{0{,}64t^2+1{,}6t+50}-7{,}07+0{,}4t\,.$$

Aby znaleźć prędkość ruchu kubła obliczamy pochodną

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{0{,}64t+0{,}8}{\sqrt{0{,}64t^2+1{,}6t+50}}+0{,}4\,.$$

Robotnik cofnie się o 4 m w ciągu 5 s. Podstawiając do wzoru (1) wartość $t=5$ otrzymujemy

$$\frac{dy}{dt}=\frac{0{,}64\cdot 5+0{,}8}{\sqrt{0{,}64\cdot 5^2+1{,}6\cdot 5+50}}+0{,}4=\frac{4}{\sqrt{74}}+0{,}4=0{,}86 \text{ m/s}\,.$$

ZADANIE 6.42. Mechanizm przegubowy $PQRST$, gdzie $QR=RS=a=3$ m, ustawiony w płaszczyźnie pionowej, porusza się w taki sposób, że przeguby Q i S poruszają się po linii poziomej w kierunku środka O, nad którym wznosi się przegub R (rys. 6.8), przy czym kąt nachylenia θ pręta QR do linii poziomej QS rośnie ze stałą prędkością $d\theta/dt=4,5$ radiana. W przegubie R zawieszony jest pewien ciężar. Znaleźć prędkość wznoszenia się przegubu R i obliczyć ją dla momentu, gdy $\theta=\frac{1}{3}\pi$.

Rozwiązanie. Zacznijmy rachubę czasu t od momentu, gdy $\theta=0$. Wówczas będziemy mieli $\theta=4,5t$. Niechaj w momencie t wysokość punktu R wynosi y. Mamy $y=a\sin\theta$. Chcemy znaleźć prędkość dy/dt; obliczymy ją według wzoru

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}.$$

Ponieważ $dy/d\theta=a\cos\theta=3\cos\theta$, $d\theta/dt=4,5$, więc

$$\frac{dy}{dt}=13,5\cos\theta.$$

W chwili gdy $\theta=\frac{1}{3}\pi$, prędkość wznoszenia się punktu R wynosi 6,75 m/s.

ZADANIE 6.43. Zmierzono promień r kuli i obliczono jej objętość V. Z jakim błędem została wyznaczona objętość kuli, jeśli błąd pomiaru promienia wynosi Δr?

Rozwiązanie. Wiemy że objętość kuli o promieniu r wynosi

$$V=\tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Błąd ΔV objętości V obliczony według wzoru przybliżonego $\Delta V=\dfrac{dV}{dr}\Delta r$ wynosi

$$\Delta V=4\pi r^2\Delta r.$$

Błąd obliczenia objętości kuli wskutek przyrostu promienia r o odcinek Δr można interpretować jako objętość cienkiej warstwy o grubości Δr, pokrywającej całą powierzchnię kuli (podobnie można dać interpretację w przypadku, gdy $\Delta r<0$).

ZADANIE 6.44. Pomiary blaszanego pudełka o kształcie cylindrycznym wykazały, że wysokość pudełka h i średnica dna $2r$ mają po 30,0 mm. Pomiary te były wykonane z dokładnością 0,5%. Obliczyć błąd względny objętości pudełka.

Rozwiązanie. Objętość pudełka wynosi $V=\pi r^2h$. Przyjmując $h=2r$ otrzymujemy $V=2\pi r^3$. Błędowi Δr pomiaru promienia r odpowiada błąd ΔV objętości, który obliczamy według wzoru przybliżonego:

$$\Delta V=6\pi r^2\Delta r.$$

Aby obliczyć błąd względny, dzielimy obie strony wzoru przez $V=2\pi r^3$ i otrzymujemy

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{6\pi r^2\Delta r}{2\pi r^3}=3\frac{\Delta r}{r}.$$

A ponieważ $\dfrac{\Delta r}{r}=0,5\%$, więc $\dfrac{\Delta V}{V}=1,5\%$.

Uwaga. W rozwiązaniu zadania nie występuje wynik pomiaru $2r=30{,}0$ mm. To oznacza, że jeżeli wszystkie wymiary liniowe pudełka zmierzymy z błędem względnym α, to będziemy mieli objętość z błędem względnym 3α (gdzie α jest liczbą dostatecznie małą).

Zadania

Obliczyć pochodne następujących funkcji (zad. 6.45 - 6.200):

6.45. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{13}{5}x^5-2x^6$.

6.46. $y=5x^{15}-x^2+\frac{1}{3}x-2$.

6.47. $y=ax^3+\dfrac{b}{x}+c$.

6.48. $y=\dfrac{4}{x^3}$.

6.49. $y=9x^7+3x^{-5}-3x^{-11}$.

6.50. $y=3x^{7/3}-4x^{13/4}+\frac{4}{7}x^{-1/2}+7^{3/2}$.

6.51. $y=\sqrt[5]{x^2}$.

6.52. $y=5\sqrt[3]{x^7}$.

6.53. $y=3\sqrt[3]{x}-x^3+\frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$.

6.54. $y=\sqrt{x}-\frac{5}{6}\sqrt[5]{x^3}-2\sqrt{x^3}$.

6.55. $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x}$.

6.56. $y=\dfrac{5}{\sqrt[7]{x}}-2x^7+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

6.57. $x=t^3\sqrt{t}$.

6.58. $y=\dfrac{2}{x^3\sqrt{x}}$.

6.59. $y=(2\sqrt[3]{x^2}-x)(4\sqrt[3]{x^4}+2\sqrt[3]{x^5}+x^2)$.

6.60. $y=(4x^2-2x\sqrt{x}+x)(2x+\sqrt{x})$.

6.61. $y=\dfrac{3}{3x-2}$.

6.62. $y=\dfrac{5}{2x^2-5x+1}$.

6.63. $y=\dfrac{3x^2}{7x^5-x+2}$.

6.64. $y=\dfrac{8x^3}{x^3+x-1}$.

6.65. $y=2\,\dfrac{x+1}{x-1}$.

6.66. $y=\dfrac{5x^2+x-2}{x^2+7}$.

6.67. $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$.

6.68. $y=\dfrac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$.

6.69. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

6.70. $z=\dfrac{1+\sqrt{t}}{1+\sqrt{2t}}$.

6.71. $s=(3t+1)^7$.

6.72. $v=(4z^2-5z+13)^5$.

6.73. $x=\left(\dfrac{1}{t}+4\right)^4$.

6.74. $s=\left(7t^2-\dfrac{4}{t}+6\right)^6$.

6.75. $y=\sqrt{x^2-4}$.

6.76. $z=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

6.77. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-3t}}$.

6.78. $s=\dfrac{1}{\sqrt{6t-t^2}}$.

6.79. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2-x^3)^4}}$.

6.80. $y=\dfrac{1}{\sqrt[n]{(a+bx)^p}}$.

6.81. $y=\dfrac{1}{(b-x^p)^n}$.

6.82. $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$.

6.83. $u=\dfrac{1}{v-\sqrt{a^2+v^2}}$.

6.84. $y=\dfrac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad a>0$.

6.85. $v=\dfrac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

6.86. $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{x^2+1}$.

6.87. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

6.88. $z=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}$.

6.89. $z=\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$.

6.90. $s=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}}$.

6.91. $u=\dfrac{\sqrt{1+v}-\sqrt{1-v}}{\sqrt{1+v}+\sqrt{1-v}}$

6.92. $y=uvw$, gdzie u, v, w są funkcjami różniczkowalnymi zmiennej x.

6.93. $v=\cos\dfrac{t}{a}, \quad a\neq 0$.

6.94. $x=a\sin bt$.

6.95. $y=a\sin\dfrac{a}{x}$.

6.96. $z=2x+\sin 2x$.

6.97. $s=\sin^2 3t$.

6.98. $v=4\cos^5\frac{1}{4}t$.

6.99. $s=\dfrac{1}{\cos^4 t}$.

6.100. $v=\dfrac{5}{\sin^3 2t}$.

6.101. $s=\dfrac{\sin t+\cos t}{2\sin 2t}$.

6.102. $z=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$.

6.103. $y=\dfrac{x\sin x}{1+\operatorname{tg}x}$.

6.104. $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$.

6.105. $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

6.106. $y=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x$.

6.107. $y=\operatorname{tg}^4\sqrt{x}$.

6.108. $y=3\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}^3 x$.

6.109. $y=e^{ax}(a\sin x-\cos x)$.

6.110. $y=x^2 e^{2x}\sin x$.

6.111. $y=\cos^2\sqrt{\frac{1}{x}}$.

6.112. $y=2\sin^3\sqrt{\frac{3}{x}}$.

6.113. $y=\frac{\sin^2 x}{\cos^7 x}-\frac{2}{5\cos^5 x}$.

6.114. $y=\frac{3\cos^2 x}{\sin^3 x}$.

6.115. $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{x+2\sqrt{x}}}$.

6.116. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$.

6.117. $z=\frac{3\operatorname{tg} u-\operatorname{tg}^3 u}{1-3\operatorname{tg}^2 u}$.

6.118. $z=\operatorname{tg} u-\operatorname{ctg} u-2u$.

6.119. $y=(4\sin x-8\sin^3 x)\cos x$.

6.120. $y=\operatorname{arctg} 3x$.

6.121. $y=7\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x$.

6.122. $x=\arcsin(1-t)$.

6.123. $x=\arccos\sqrt{1-t^2}$.

6.124. $x=\arcsin\sqrt{t^3}$.

6.125. $x=\arcsin\frac{1}{t}$.

6.126. $y=\arcsin x+\arcsin\sqrt{1-x^2}$, $\quad 0<x<1$.

6.127. $x=\arcsin 2t\sqrt{1-t^2}$.

6.128. $y=\operatorname{arctg}(x-\sqrt{x^2+1})$.

6.129. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

6.130. $y=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

6.131. $y=\frac{1}{5}x^5\operatorname{arctg} x-\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{10}\ln(1+x^2)$.

6.132. $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

6.133. $y=\arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

6.134. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

6.135. $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$, $\quad x\neq 1$.

6.136. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

6.137. $y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

6.138. $y=\frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{arcctg} 2x}$.

6.139. $z=\sqrt{\frac{1-\arcsin y}{1+\arcsin y}}$.

6.140. $y=x^3 \operatorname{arctg} x^3$.

6.141. $z=\dfrac{\arcsin 4y}{1-4y}$.

6.142. $y=\dfrac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[2 \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)\right]-x$.

6.143. $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin \dfrac{a \cos x+b}{a+b \cos x}$.

6.144. $y=e^{3x}$.

6.145. $y=5e^{\frac{1}{2}x}$.

6.146. $y=e^x f(x)$.

6.147. $y=3e^{-2x} g(x)$.

6.148. $y=e^{\sin x}$.

6.149. $y=5e^{\cos x}$.

6.150. $y=e^{\cos^2 x}$.

6.151. $y=3e^{2\sin^3 x}$.

6.152. $z=(v^3-3v^2+6v-6)\,e^v$.

6.153. $z=(10x^2-1)\,e^{3x}$.

6.154. $z=\dfrac{(2x-1)\,e^x}{2\sqrt{x}}$.

6.155. $y=(x+k\sqrt{1-x^2})\,e^{k \arcsin x}$.

6.156. $y=5^x+2^x$.

6.157. $y=3^x x^3$.

6.158. $y=2\cdot 7^x-1$.

6.159. $y=5\cdot 10^{3x}$.

6.160. $y=a^{2x}x^n, \quad a>0$.

6.161. $y=\ln 3x$.

6.162. $y=7\cdot 5^{10x}$.

6.163. $z=\ln \dfrac{30}{x+3}$.

6.164. $y=5 \ln 10x$.

6.165. $s=\ln(t+\sqrt{t^2+1})$.

6.166. $z=3 \ln \dfrac{5}{x-2}$.

6.167. $s=\ln \sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$.

6.168. $y=2 \ln \dfrac{3}{t+\sqrt{t^2-4}}$.

6.169. $y=\ln \left|\ln |x|\right|$.

6.170. $y=\ln\left(\dfrac{a+b \operatorname{tg} x}{a-b \operatorname{tg} x}\right)$.

6.171. $y=\ln \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x), \quad 0<x<\frac{1}{2}\pi$.

6.172. $y=\ln(\cos \frac{1}{2}x)^2$.

6.173. $y=\ln \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

6.174. $y=15 \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}x+\dfrac{\cos x}{\sin^4 x}(8\cos^4 x-25\cos^2 x+15)$.

6.175. $y=\ln(\ln(\ln x)), \quad x>e$.

6.176. $y=\ln \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

6.177. $y=\ln\sin x$.

6.178. $y=\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $0\leqslant x<1$.

6.179a. $y=\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$.

6.179b. $y=\ln(e^{mx}+e^{-mx})$.

6.180. $y=\log_x \ln x$. Wskazówka. $y=\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$.

6.181. $y=\log_x a$. Wskazówka. $\log_x a=\frac{\ln a}{\ln x}$.

6.182. $y=x^{5x}$, $x>0$.

6.183. $y=10x^{-3x}$, $x>0$.

6.184. $y=x^{\sin x}$, $x>0$.

6.185. $y=3x^{\cos x}$, $x>0$.

6.186. $y=\left(\frac{a}{x}\right)^x$, $a>0$, $x>0$.

6.187. $y=x^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

6.188. $y=a^{\ln x}$, $a>0$, $x>0$.

6.189. $y=5^{\ln 2x}$, $x>0$.

6.190. $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$, $x>0$; wyjaśnić wynik.

6.191. $y=(\sin x)^{\cos x}$, $0<x<\frac{1}{2}\pi$.

6.192. $y=(\operatorname{arctg} x)^x$, $x>0$.

6.193. $y=(\operatorname{tg} x)^{\sin x}$, $0<x<\frac{1}{2}\pi$.

6.194. $y=(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos x}}$, $0<x<\frac{1}{2}\pi$.

6.195. $y=(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$, $0<x<\frac{1}{2}\pi$.

6.196. $y=e^{e^x}$.

6.197. $y=x^{e^x}$, $x>0$.

6.198. $y=x^{x^x}$, $x>0$.

6.199. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

6.200. $y=\sqrt[x]{\frac{1}{x}}$.

Dane są równania określające ruch punktu; znaleźć prędkość ruchu w danym momencie t (zad. 6.201 - 6.204):

6.201. $s=3t^{-\frac{1}{3}}$, $t=\frac{1}{4}$.

6.202. $s=10\sqrt{t^3}$, $t=4$.

6.203. $s=8\sqrt[3]{2t^5}$, $t=2$.

6.204. $s=\sqrt{3t}$, $t=2$.

6.205. Obliczyć kąt, który tworzy z osią Ox styczna do linii $y=\sin x$ w początku współrzędnych.

6.206. Jaki kąt z osią Ox tworzy linia $y=\operatorname{ctg} x$ w punkcie $x=\frac{1}{2}\pi$?

6.207. W jakim punkcie styczna do linii $y=(x-8)/(x+1)$ tworzy z osią Ox kąt równy połowie kąta prostego?

6.208. Znaleźć na linii $y=e^x$ punkt, w którym styczna jest równoległa do prostej $x-y+7=0$.

6.209. Wykazać, że styczna do hiperboli równoosiowej $xy=C$ ogranicza z osiami współrzędnych trójkąt o stałym polu.

6.210. W dowolnym punkcie asteroidy

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

poprowadzono do niej styczną. Wykazać, że długość odcinka stycznej zawartego pomiędzy osiami współrzędnych jest stała.

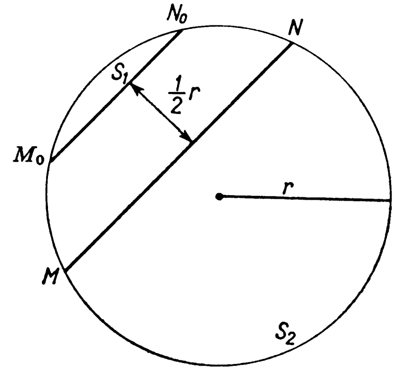
6.211. Jaki związek powinien zachodzić pomiędzy współczynnikami równania paraboli $y=x^2+px+q$, żeby ta parabola była styczna do osi odciętych?

6.212. Jaki związek powinny spełniać współczynniki p i q w równaniu $y=x^3+px+q$, aby linia przedstawiona tym równaniem (parabola stopnia trzeciego) była styczna do osi Ox?

6.213. W jakim punkcie krzywej logarytmicznej $y=\ln x$ styczna jest równoległa do prostej $y=2x$?

6.214. Pod jakim kątem przecinają się krzywe $y=\sin x$ i $y=\cos x$?

6.215. Dwie proste przecinają się pod kątem 60°. Z punktu O ich przecięcia wyruszają dwa ciała. Pierwsze ciało porusza się ruchem jednostajnym z prędkością 5 km/h, drugie porusza się zgodnie z prawem $S=2t^2+t$, gdzie S oznacza drogę w kilometrach, a t czas w godzinach. Określić, z jaką prędkością oddalają się one od siebie w chwili, gdy ciało pierwsze znajduje się w odległości 10 km od punktu O.



Rys. 6.9

6.216. Dwa boki trójkąta powiększają się jednostajnie z prędkością 4 cm/s i 6 cm/s, natomiast kąt zawarty między nimi zmniejsza się z prędkością $\frac{1}{10}\sqrt{3}\ \mathrm{s}^{-1}$. Określić prędkość zmiany pola tego trójkąta w chwili, gdy jego boki i kąt odpowiednio równe są 20 cm, 50 cm i 30°.

6.217. W okręgu o promieniu r cięciwa MN z położenia M_0N_0 przesuwa się równolegle ze stałą prędkością $v=2$. Z jaką prędkością zmieniają się pola S_1 i S_2 dwóch obszarów, na jakie cięciwa MN dzieli okrąg, w chwili gdy znajduje się ona w odległości równej $\frac{1}{2}r$ od położenia początkowego (rys. 6.9).

§ 6.2. POCHODNE WYŻSZYCH RZĘDÓW

Pochodną rzędu drugiego lub *drugą pochodną funkcji* $y=f(x)$ nazywamy pochodną pierwszej pochodnej tej funkcji, podobnie, *pochodną rzędu trzeciego* lub *trzecią pochodną funkcji* $y=f(x)$ nazywamy pochodną drugiej pochodnej, itd.

Drugą pochodną funkcji $y=f(x)$ oznaczamy symbolami:

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ddot{y}.$$

Rząd pochodnej od czwartego wzwyż oznaczamy arabskimi cyframi, biorąc w nawias, albo rzymskimi znakami bez nawiasów. Tak więc np. piątą pochodną oznaczyć możemy symbolami:

$$y^{(5)}, \quad y^{\mathrm{V}}, \quad f^{(5)}(x), \quad f^{\mathrm{V}}(x), \quad \frac{d^5y}{dx^5}.$$

ZADANIE 6.218. Obliczyć sześć pochodnych wyższych rzędów funkcji

$$y=x^5-2x^4+4x^2-16x+15.$$

Rozwiązanie. Różniczkując otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} y' &=5x^4-8x^3+8x-16, \\ y'' &=20x^3-24x^2+8, \\ y''' &=60x^2-48x, \\ y^{(4)} &=120x-48, \\ y^{(5)} &=120, \\ y^{(6)} &=0. \end{aligned}$$

(6.2.1) *Wszystkie pochodne wielomianu rzędu wyższego niż jego stopień są równe zeru.*

ZADANIE 6.219. Obliczyć pochodną rzędu n funkcji $y=\sin x$.

Rozwiązanie. Mamy kolejno

$$y=\sin x, \quad y'=\cos x, \quad y''=-\sin x, \quad y'''=-\cos x, \quad y^{(4)}=\sin x=y.$$

Dalsze pochodne będą się powtarzały: $y^{(5)}=y'$, $y^{(6)}=y''$ itd.

Zwróćmy uwagę na następujące związki trygonometryczne:

$$y' =\cos x=\sin(x+\tfrac{1}{2}\pi), \qquad y'' =-\sin x=\sin(x+2\cdot\tfrac{1}{2}\pi),$$
$$y'''=-\cos x=\sin(x+3\cdot\tfrac{1}{2}\pi), \qquad y^{(4)}=\sin x=\sin(x+4\cdot\tfrac{1}{2}\pi),$$

gdyż $4\cdot\frac{1}{2}\pi=2\pi$ jest okresem funkcji $\sin x$, zatem wzór ogólny na pochodną rzędu n funkcji $y=\sin x$ ma postać

(6.2.2) $$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\tfrac{1}{2}\pi).$$

Wyprowadzenie ogólnych wzorów na pochodną dowolnego rzędu danej funkcji jest na ogół zagadnieniem trudnym. Jeżeli funkcja ma postać lub daje się przedstawić w postaci iloczynu dwóch prostszych funkcji, dla których można znaleźć łatwo ogólne wzory na pochodną rzędu n, to pochodną rzędu n danej funkcji wyznaczamy ze wzoru Leibniza.

Niech będą dane funkcje $u=f(x)$ i $v=g(x)$ mające pochodne aż do rzędu n włącznie. Wówczas funkcja $y=uv$ ma pochodną rzędu n wyrażającą się wzorem

$$y^{(n)}=u^{(n)}v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v''+\ldots+\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}. \tag{6.2.3}$$

Jest to wspomniany *wzór Leibniza*; występujący we wzorze tym symbol Newtona $\binom{n}{k}$ został określony w § 1.9.

Zadanie 6.220. Obliczyć czwartą pochodną funkcji $y=x^5\cos x$.

Rozwiązanie. Niech $u=x^5$, $v=\cos x$. Stosując wzór Leibniza dla $n=4$ otrzymujemy

$$y^{(4)}=u^{(4)}v+4u'''v'+6u''v''+4u'v'''+uv^{(4)}.$$

Należy tu podstawić;

$$u=x^5,\quad u'=5x^4,\quad u''=20x^3,\quad u'''=60x^2,\quad u^{(4)}=120x,$$

$$v=\cos x,\quad v'=-\sin x,\quad v''=-\cos x,\quad v'''=\sin x,\quad v^{(4)}=\cos x.$$

Otrzymujemy wówczas

$$y^{(4)}=120x\cos x-240x^2\sin x-120x^3\cos x+20x^4\sin x+x^5\cos x.$$

Zadanie 6.221. Znaleźć pochodną rzędu n funkcji $y=e^{-x}\sin x$.

Rozwiązanie. Niech $u=e^{-x}$, $v=\sin x$. Wówczas

$$u'=-e^{-x},\quad u''=e^{-x},\quad u'''=-e^{-x},\quad u^{(4)}=e^{-x},\quad \ldots$$

i ogólnie

$$u^{(n)}=(-1)^n e^{-x}.$$

Prócz tego wiemy (zad. 6.219), że pochodna rzędu n funkcji $v=\sin x$ wyraża się wzorem $v^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{1}{2}\pi)$. Stosując wzór Leibniza otrzymujemy

$$\begin{aligned}y^{(n)}=(-1)^n e^{-x}\sin x+(-1)^{n-1}ne^{-x}\sin(x+\tfrac{1}{2}\pi)+&\\ +(-1)^{n-2}\cdot\tfrac{1}{2}n(n-1)e^{-x}\sin(x+2\cdot\tfrac{1}{2}\pi)+\ldots+&\\ +(-1)^{n-k}\binom{n}{k}e^{-x}\sin(x+k\cdot\tfrac{1}{2}\pi)+\ldots-&\\ -ne^{-x}\sin\left(x+(n-1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+e^{-x}\sin(x+n\cdot\tfrac{1}{2}\pi).&\end{aligned}$$

Oczywiście, po prawej stronie można wyłączyć przed nawias e^{-x}.

Zadanie 6.222. Dane jest równanie $s=\frac{1}{6}t^3-2t$ ruchu prostoliniowego. Wyznaczyć moment t, w którym prędkość ruchu będzie równa zeru. Znaleźć przyśpieszenie ruchu.

Rozwiązanie. Prędkość

$$v=\frac{ds}{dt}=\tfrac{1}{2}t^2-2,$$

zatem $v=0$, gdy $t=2$, a przyśpieszenie

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}=t.$$

Zadanie 6.223. Korba k umieszczona na obwodzie obracającego się koła c wprowadza w ruch suwadło s (rys. 6.10). Prędkość kątowa koła jest stała i wynosi ω, odległość korby od osi obrotu jest równa a. Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie suwadła w danym momencie czasu t.

Rozwiązanie. Suwadło porusza się ruchem harmonicznym o amplitudzie a i pulsacji ω:

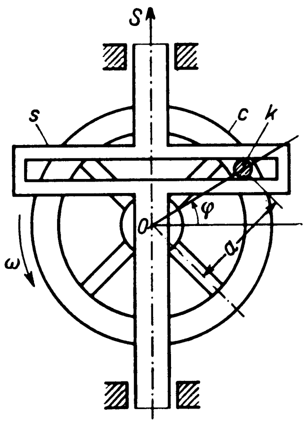
$$l=a\sin\varphi=a\sin\omega t.$$

Prędkość chwilowa suwadła:

$$\frac{dl}{dt}=a\omega\cos\omega t,$$

a przyśpieszenie chwilowe suwadła:

$$\frac{d^2l}{dt^2}=-a\omega^2\sin\omega t.$$



Rys. 6.10

Zadanie 6.224. Droga przebyta przez ciało przy swobodnym spadku, z uwzględnieniem oporu powietrza, wyraża się wzorem

$$s=\frac{v_1^2}{g}\ln\cosh\frac{gt}{v_1},$$

gdzie $v_1=\sqrt{g}/a$, g jest przyśpieszenie ziemskie, a – współczynnik uwzględniający opór powietrza. Wyznaczyć przyśpieszenie ruchu spadającego ciała w zależności od czasu t.

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{ds}{dt}=v_1\operatorname{tgh}\frac{gt}{v_1},\qquad \frac{d^2s}{dt^2}=g\frac{1}{\cosh^2\frac{gt}{v_1}}.$$

Gdy $t\to\infty$, wówczas $\frac{d^2s}{dt^2}\to 0$, a więc po dostatecznie długim czasie ruch odbywa się praktycznie bez przyśpieszenia, czyli jest ruchem jednostajnym z prędkością v_1.

Zadanie 6.225. Wyznaczyć dla chwili $t=\frac{1}{30}\pi$ s wartość siły, pod wpływem której ciało o masie $m=10$ g porusza się ruchem określonym przez równanie $y=3\sin^3 5t$ (w cm).

Rozwiązanie. Siła działająca na ciało o masie m wyraża się wzorem $F=m\dfrac{d^2y}{dt^2}$. Obliczmy pierwszą i drugą pochodną:

$$\frac{dy}{dt}=3\cdot 3\cdot 5\sin^2 5t\cos 5t=45\sin^2 5t\cos 5t,$$

oraz

$$\frac{d^2y}{dt^2}=45(2\cdot 5\sin 5t\cos^2 5t-5\sin^3 5t)=225\sin 5t(2\cos^2 5t-\sin^2 5t)=$$
$$=225\sin 5t(2-3\sin^2 5t).$$

Siła działająca na ciało wynosi

$$F=m\frac{d^2y}{dt^2}=2250\sin 5t(2-3\sin^2 5t).$$

Dla $t=\frac{1}{30}\pi$ mamy $F=2250\sin\frac{1}{6}\pi(2-3\sin^2\frac{1}{6}\pi)=2250\cdot\frac{1}{2}(2-\frac{3}{4})=\frac{11250}{8}=1406$ dyn.

Zadania

Obliczyć drugą pochodną następujących funkcji (zad. 6.226 - 6.232):

6.226. $y=\arccos x$.

6.227. $y=\operatorname{arctg} 2x$.

6.228. $y=(\arcsin x)^2$.

6.229. $y=\ln(1+x^2)$.

6.230. $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$.

6.231. $y=xe^{\sin x}$.

6.232. $y=e^{\varphi(x)}$, gdzie $\varphi(x)$ jest funkcją różniczkowalną zmiennej x.

Znaleźć trzecią pochodną funkcji (zad. 6.233 - 6.235):

6.233. $y=\sqrt[5]{x^3}$.

6.234. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

6.235. $y=\sin(1-3x)$.

Obliczyć wartość drugiej pochodnej funkcji (zad. 6.236 - 6.239):

6.236. $y=\arcsin x$ w punkcie $x=0$.

6.237. $y=\dfrac{x+2}{x^2-3x}$ w punkcie $x=2$.

Wskazówka. Przedstawić y jako sumę ułamków prostych:

$$y=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}.$$

6.238. $y=\operatorname{tg}^2 x$ w punkcie $x=0$.

6.239. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ w punkcie $x=0$.

Obliczyć wartości trzeciej pochodnej funkcji (zad. 6.240 - 6.243):

6.240. $y=\arcsin x$ w punkcie $x=0$.

6.241. $y=\sin x\cos x$ w punkcie $x=0$.

Wskazówka. Zastosować wzór $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

6.242. $y=\operatorname{tg} x$ w punkcie $x=0$.

6.243. $y=\operatorname{arctg} x$ w punkcie $x=0$.

6.244. Obliczyć wartość czwartej pochodnej funkcji $y=\sin^2 x$ w punkcie $x=0$.

Dane są równania ruchu prostoliniowego $s=f(t)$. Znaleźć wartości prędkości i przyspieszeń w podanych odpowiednio momentach t (zad. 6.245 - 6.250):

6.245. $s=3t-t^4$ dla $t=1$.

6.246. $s=t^3+8t^2+5$ dla $t=-2$.

6.247. $s=(t+1)^4-3(t+1)^3$ dla $t=-1$.

6.248. $s=16t-\dfrac{1}{t^3}$ dla $t=-\frac{1}{2}$.

6.249. $s=t^2+t^{-1}+3$ dla $t=\frac{1}{2}$.

6.250. $s=\sqrt[3]{3t^2}-\sqrt{3t}$ dla $t=4$.

Podać wzór ogólny na pochodną rzędu n następujących funkcji:

6.251. $y=\cos x$.

6.252. $y=x^n$.

6.253. $y=\ln x$.

6.254. $y=\sqrt{x}$.

6.255. $y=\sqrt[3]{x}$.

6.256. $y=\dfrac{1}{ax+b}$.

6.257. Wykazać, że funkcja $y=\ln|C_1e^x+C_2e^{-x}|$, gdzie C_1, C_2 oznaczają stałe dowolne, spełnia równanie różniczkowe $y''=1-(y')^2$ (por. cz. II).

6.258. Wykazać, że funkcja $y=C_1x^2+2C_1x+C_2$, gdzie C_1, C_2 oznaczają stałe dowolne, spełnia równanie różniczkowe $(1+x)y''=y'$.

6.259. Po okręgu $x^2+y^2=a^2$ porusza się punkt M ze stałą prędkością kątową ω. Podać prawo, według którego porusza się rzut M_1 tego punktu na oś Ox, jeżeli w chwili $t=0$ punkt M zajmował położenie $(r, 0)$. Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie punktu M_1 w chwili t. Obliczyć prędkość i przyśpieszenie w chwili początkowej i w chwili przechodzenia przez początek układu współrzędnych.

6.260. Koło rozpędowe puszczono w ruch. Po upływie czasu t obróciło się ono o kąt $\varphi=a+bt-ct^2$, gdzie $a, b, c>0$ są stałe. Określić prędkość i przyśpieszenie kątowe. Po jakim czasie koło przestanie się obracać?

6.261. Wykazać, że funkcja $x=a\sin(\omega t+\varphi_0)$ przy a, ω, φ_0 stałych spełnia związek (równanie różniczkowe) $\ddot{x}=-\omega^2x$.

§ 6.3. RÓŻNICZKOWANIE GRAFICZNE

Dany jest wykres funkcji $y=f(x)$ różniczkowalnej dla $a \leqslant x \leqslant b$. Znaleźć konstrukcyjnie wykres pochodnej $y'=f'(x)$. Korzystamy z geometrycznej interpretacji pochodnej (por. § 6.1, str. 93).

Metoda wykreślania jest następująca (rys. 6.11):

1° Dzielimy wykres danej funkcji na łuki możliwie zbliżone do odcinków; otrzymujemy na osi Ox przedziały częściowe (niekoniecznie równe) o kolejnych końcach $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2° Kreślimy rzędne $A_i M_i$ punktów M_i, których odcięte są środkami przedziałów częściowych (a_i, a_{i+1}).

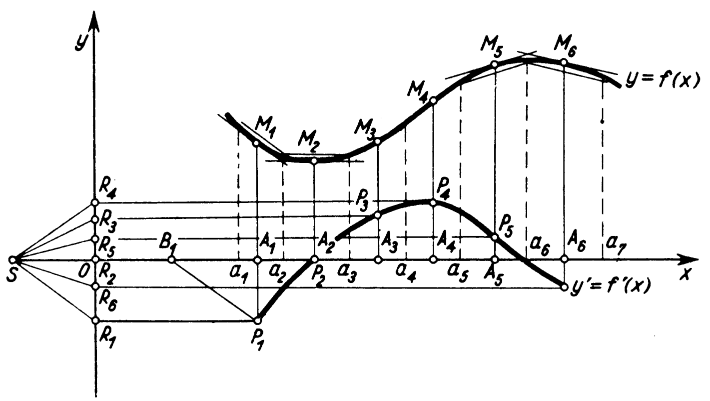
3° W punktach M_i prowadzimy styczne do odpowiednich łuków; będą one w przybliżeniu równoległe do cięciw.

4° Z punktu $S(-1, 0)$, zwanego *biegunem*, wykreślamy równoległe do stycznych w punktach M_i wykresu danej funkcji $y=f(x)$.

5° Otrzymane na osi Oy rzędne OR_i punktów przecięcia tych prostych z osią Oy wyznaczają odpowiednie wartości pochodnej.

6° Każdy z odcinków OR_i przenosimy równolegle wzdłuż osi Ox w ten sposób, aby punkt O pokrył się z punktem A_i. Wówczas drugi koniec R_i przesuniętego odcinka wyznaczy nam punkt P_i, należący do wykresu funkcji pochodnej.

7° Za pomocą krzywika łączymy otrzymane punkty P_i.



Rys. 6.11

Istotnie, otrzymana krzywa przedstawia wykres pochodnej $y'=f'(x)$ funkcji $y=f(x)$, gdyż każde

$$A_i P_i = OR_i = SO \operatorname{tg} \alpha_i = 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_i = y'_i,$$

gdzie α_i jest kątem, jaki tworzy styczna do wykresu funkcji w punkcie M_i z dodatnim zwrotem osi Ox.

Rozdział VII

POCHODNE FUNKCJI OKREŚLONEJ RÓWNANIAMI PARAMETRYCZNYMI

§ 7.1. POCHODNA RZĘDU PIERWSZEGO

Jeżeli x i y są funkcjami ciągłymi tej samej zmiennej t:

$$x=f(t), \quad y=g(t), \tag{1}$$

gdzie t przybiera wartości z pewnego przedziału, to mówimy, że funkcje te określają *krzywą na płaszczyźnie*. Zmienna t nazywa się *parametrem*. Na przykład gdy t oznacza czas, to równania (1) są równaniami ruchu punktu zakreślającego pewną krzywą. O krzywej tej mówimy, że równania (1) są *równaniami parametrycznymi* tej krzywej.

Różne równania parametryczne mogą przedstawiać tę samą krzywą (tzn. punkt ruchomy może poruszać się po tej samej krzywej w różny sposób). Parametr można rozumieć niekoniecznie jako czas, np. w niektórych zadaniach parametr ma znaczenie geometryczne (kąt, odcinek).

Krzywa (lub jej łuk) może być traktowana jako wykres pewnej funkcji $y=h(x)$, gdy każda prosta równoległa do osi Oy ma z nią co najwyżej jeden punkt wspólny. W takim przypadku równania $x=f(t)$, $y=g(t)$ określają również y jako *funkcję zmiennej* x. Ma to miejsce np., gdy funkcja $x=f(t)$ jest w przedziale $a\leqslant t\leqslant b$ rosnąca lub malejąca, a tym samym i odwracalna (por. § 4.5). Wtedy $t=F(x)$, gdzie F oznacza funkcję odwrotną względem funkcji f, i równania (1) dają

$$y=g\big(F(x)\big).$$

W przypadku gdy istnieją pochodne $f'(t)$ i $g'(t)$, mamy wzory na obliczenie pochodnej dy/dx tej funkcji bez potrzeby znajdowania funkcji odwrotnej F, mianowicie:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}, \quad \text{jeśli} \quad \frac{dx}{dt}\neq 0. \tag{7.1.1}$$

ZADANIE 7.1. Obliczyć pochodną dy/dx funkcji określonej równaniami parametrycznymi

$$x=\sin t-t\cos t, \qquad y=\cos t+t\sin t.$$

Rozwiązanie. Różniczkując te funkcje względem t otrzymujemy

$$\frac{dx}{dt}=\cos t+t\sin t-\cos t=t\sin t, \quad \frac{dy}{dt}=-\sin t+t\cos t+\sin t=t\cos t.$$

Dzielimy teraz dy/dt przez dx/dt i otrzymujemy wynik w postaci

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t\cos t}{t\sin t}=\operatorname{ctg} t.$$

ZADANIE 7.2. Ruch punktu na płaszczyźnie określony jest równaniami parametrycznymi

$$x=5(\cos 2t+2t\sin 2t-1), \quad y=5(\sin 2t-2t\cos 2t),$$

gdzie t oznacza czas, a x i y są to współrzędne punktu na płaszczyźnie. Wyznaczyć prędkość v punktu w zależności od czasu t.

Rozwiązanie. Obliczmy składowe prędkości:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=5(-2\sin 2t+2\sin 2t+4t\cos 2t)=20t\cos 2t,$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=5(2\cos 2t-2\cos 2t+4t\sin 2t)=20t\sin 2t.$$

Mając te składowe obliczamy prędkość v według wzoru

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

a więc

$$v=\sqrt{400t^2(\cos^2 2t+\sin^2 2t)}=20t.$$

ZADANIE 7.3. Wyznaczyć prędkość kątową $d\theta/dt$ i składową prędkości dr/dt wzdłuż promienia r oraz prędkość ds/dt w ruchu danym równaniami parametrycznymi we współrzędnych biegunowych:

$$\theta=at, \quad r=ce^{-t}.$$

Rozwiązanie. Prędkość kątowa wynosi $\dfrac{d\theta}{dt}=a$, natomiast składowa prędkości wzdłuż promienia r wynosi $\dfrac{dr}{dt}=-ce^{-t}$.

Obliczmy teraz prędkość ds/dt ze wzoru

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}.$$

Otrzymujemy

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{c^2e^{-2t}+a^2c^2e^{-2t}}=ce^{-t}\sqrt{1+a^2}.$$

ZADANIE 7.4. Ruch punktu wyznaczają równania parametryczne

$$x=4\sin^2 t, \qquad y=5\sin 2t.$$

Znaleźć moment t, w którym styczna do toru punktu jest nachylona pod kątem 45° do osi Ox.

Rozwiązanie. Obliczmy współczynnik kątowy stycznej:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{10\cos 2t}{8\sin t\cos t}=\frac{10\cos 2t}{4\sin 2t}=\tfrac{5}{2}\operatorname{ctg} 2t.$$

Gdy styczna jest nachylona pod kątem 45°, to ma współczynnik kątowy 1, a więc trzeba rozwiązać równanie $\frac{5}{2}\operatorname{ctg} 2t=1$, czyli $\operatorname{ctg} 2t=0{,}4$. Z tablic widzimy, że $0{,}4=\operatorname{ctg} 68°02'$, a więc w mierze łukowej mamy $2t=1{,}1974+k\pi$, skąd

$$t=0{,}5987+k\cdot\tfrac{1}{2}\pi, \qquad \text{gdzie} \qquad k=0,1,2,\ldots$$

ZADANIE 7.5. Ruch pewnego punktu wyznaczają równania parametryczne

$$x=5t+3, \qquad y=t\ln t.$$

Wyznaczyć moment, w którym styczna do toru punktu tworzy z osią Ox kąt 60°.

Rozwiązanie. Obliczmy współczynnik kierunkowy stycznej dy/dx. Mamy

$$\frac{dy}{dt}=\ln t+1, \qquad \frac{dx}{dt}=5,$$

skąd

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{1+\ln t}{5}.$$

Aby nachylenie toru tego punktu względem dodatniego kierunku osi Ox wynosiło 60°, musi być spełniony warunek

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg} 60°, \qquad \text{czyli} \qquad \tfrac{1}{5}(\ln t+1)=\sqrt{3}.$$

Ostatecznie mamy $t=e^{5\sqrt{3}-1}\approx e^{7{,}66}\approx 2120$.

ZADANIE 7.6. Ruch punktu na płaszczyźnie określony jest równaniami parametrycznymi

$$x=10\cosh 2t, \qquad y=10\sinh 2t,$$

gdzie t oznacza czas, a x i y są to współrzędne punktu na płaszczyźnie. Wyznaczyć kąt α, jaki styczna do toru punktu tworzy z osią Ox w chwili $t=0{,}25$ s.

Rozwiązanie. Obliczmy pochodne

$$\frac{dx}{dt}=20\sinh 2t, \qquad \frac{dy}{dt}=20\cosh 2t.$$

Mając pochodne dx/dt i dy/dt możemy obliczyć tangens kąta α według wzoru

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}, \quad \text{skąd} \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\cosh 2t}{\sinh 2t}=\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{e^{2t}-e^{-2t}}=\frac{e^{4t}+1}{e^{4t}-1}.$$

Dla $t=0{,}25$ mamy

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{e+1}{e-1}\approx\frac{3{,}718}{1{,}718}\approx 2{,}164,$$

ostatecznie więc otrzymujemy $\alpha=65°12'$.

§ 7.2. POCHODNA RZĘDU DRUGIEGO

Drugą pochodną d^2y/dx^2 funkcji danej w postaci parametrycznej obliczamy w sposób następujący:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}, \tag{7.2.1}$$

co możemy przekształcić dalej uwzględniając związek (7.1.1). Obliczmy licznik:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right)=\frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}\cdot\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{d^2x}{dt^2}\cdot\dfrac{dy}{dt}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Podstawiając powyższą wartość do (7.2.1) otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}\cdot\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{d^2x}{dt^2}\cdot\dfrac{dy}{dt}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}. \tag{7.2.2}$$

ZADANIE 7.7. Obliczyć drugą pochodną d^2y/dx^2 funkcji określonej równaniami parametrycznymi

$$x=\sin t-t\cos t, \qquad y=\cos t+t\sin t.$$

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru (7.2.1) oraz wartości dy/dx i dx/dt obliczonych w zadaniu 7.1 mamy

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}(\operatorname{ctg} t)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{-1}{\sin^2 t}}{t\sin t}=\frac{-1}{t\sin^3 t}.$$

ZADANIE 7.8. Ruch pocisku jest określony równaniami parametrycznymi

$$x=30000(1-e^{-0{,}02t}), \qquad y=45000(1-e^{-0{,}02t})-500t,$$

gdzie t oznacza czas w sekundach, a x i y są to współrzędne pocisku w płaszczyźnie pionowej wyrażone w metrach. Wyznaczyć prędkość oraz przyśpieszenie w chwili $t=0$ i $t=50$.

Rozwiązanie. Obliczamy składowe prędkosci

$$v_x=\frac{dx}{dt}=600e^{-0{,}02t}, \qquad v_y=\frac{dy}{dt}=900e^{-0{,}02t}-500$$

oraz składowe przyśpieszenia

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=-12e^{-0{,}02t}, \qquad a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=-18e^{-0{,}02t}.$$

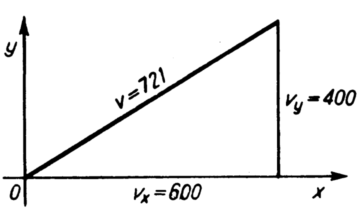
Mając te składowe, obliczamy prędkość v i przyśpieszenie a według wzorów

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}, \qquad a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}.$$

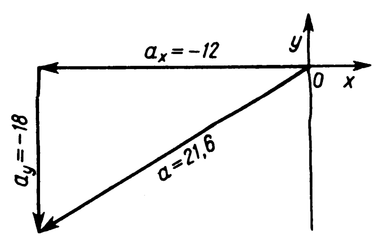
W momencie $t=0$ mamy (rys. 7.1 i rys. 7.2)

$$v_x=600, \qquad v_y=400, \qquad v=721,$$

$$a_x=-12, \qquad a_y=-18, \qquad a=21{,}6;$$



Rys. 7.1



Rys. 7.2

natomiast w momencie $t=50$ mamy

$$v_x=\frac{600}{e}=222, \qquad v_y=\frac{900}{e}-500=-169, \qquad v=279,$$

$$a_x=-\frac{12}{e}=-4{,}42, \qquad a_y=-\frac{18}{e}=-6{,}63, \qquad a=796.$$

ZADANIE 7.9. Ruch punktu na płaszczyźnie określony jest równaniami parametrycznymi

$$x=5\sin 5t^2, \qquad y=5\cos 5t^2,$$

gdzie t oznacza czas. Znaleźć równanie toru, położenie początkowe punktu, prędkość v i przyśpieszenie a w chwili t.

Rozwiązanie. Z postaci równań ruchu widać, że łatwo wyrugować czas t, by otrzymać związek między x i y, czyli równanie toru. Mianowicie podnosząc stronami do kwadratu obie równości otrzymujemy

$$x^2+y^2=25\sin^2 5t^2+25\cos^2 5t^2, \quad \text{skąd} \quad x^2+y^2=25.$$

Jak widzimy, jest to równanie okręgu, którego środkiem jest początek współrzędnych, a promień jest równy 5.

Podstawiając do danych równań wartość $t=0$ otrzymujemy położenie początkowe punktu:

$$x=0, \quad y=5.$$

Ruch rozpoczyna się więc z punktu (0, 5), to znaczy, z punktu przecięcia okręgu z dodatnim zwrotem osi Oy.

Prędkość v punktu poruszającego się po okręgu obliczmy według wzoru

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}, \tag{1}$$

gdzie v_x, v_y są składowymi prędkości wzdłuż osi współrzędnych Ox i Oy i wyrażają się wzorami

$$v_x=\frac{dx}{dt}, \quad v_y=\frac{dy}{dt}.$$

Obliczamy składowe prędkości

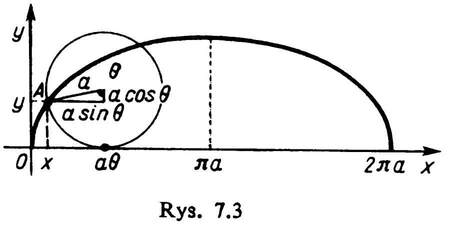
$$v_x=\frac{dx}{dt}=50t\cos 5t^2, \quad v_y=\frac{dy}{dt}=-50t\sin 5t^2.$$

Podstawiając v_x i v_y do wzoru (1) otrzymujemy

$$v=\sqrt{2500t^2(\cos^2 5t^2+\sin^2 5t^2)}, \quad \text{skąd} \quad v=50t.$$

Okazuje się, że prędkość poruszającego się punktu jest proporcjonalna do czasu, a więc ruch jest jednostajnie przyśpieszony. Aby obliczyć przyśpieszenie a, należy zróżniczkować prędkość v, wyrażoną jako funkcję czasu t; otrzymujemy

$$a=\frac{dv}{dt}=50.$$



Rys. 7.3

Zadanie 7.10. Punkt leżący na obwodzie koła toczącego się po prostej opisuje krzywą zwaną *cykloidą* (rys. 7.3). Promień koła oznaczmy przez a, a kąt obrotu przez θ. Równania parametryczne cykloidy mają postać

(7.2.3) $$x=a(\theta-\sin\theta), \quad y=a(1-\cos\theta).$$

Wyznaczyć dy/dx, d^2y/dx^2 oraz d^3y/dx^3 i obliczyć te pochodne dla wartości $x=\pi a$.

Rozwiązanie. Obliczamy pierwszą pochodną dy/dx. Ponieważ

$$\frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta, \quad \frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta),$$

więc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

przy założeniu, że $\cos\theta\neq 1$.

Obliczamy drugą pochodną d^2y/dx^2. Ponieważ

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\theta}=\frac{-1}{1-\cos\theta}, \quad \frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta),$$

więc

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{a(1-\cos\theta)^2}.$$

Trzecią pochodną d^3y/dx^3 obliczamy według wzoru

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{d\theta}:\frac{dx}{d\theta}.$$

Otrzymujemy

$$\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{d\theta}=\frac{2\sin\theta}{a(1-\cos\theta)^3}, \quad \frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta),$$

więc

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2\sin\theta}{a^2(1-\cos\theta)^4}.$$

Stosując podstawienia $\sin\theta=2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$, $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{1}{2}\theta$, możemy powyższe wzory napisać w postaci

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\theta, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{4a\sin^4\frac{1}{2}\theta}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{4a^2\sin^7\frac{1}{2}\theta}.$$

Pozostaje obliczyć wartości tych pochodnych dla $x=\pi a$. Wówczas mamy równanie

$$\pi a=a(\theta-\sin\theta), \quad \text{czyli} \quad \theta-\sin\theta-\pi=0.$$

Równanie to ma oczywiste rozwiązanie $\theta=\pi$. Po lewej stronie równania występuje funkcja ciągła $f(\theta)=\theta-\sin\theta-\pi$, której pochodna $f'(\theta)=1-\cos\theta$ jest nieujemna; a więc funkcja

$f(\theta)$ jest niemalejąca, zatem przybiera wartość zerową tylko jeden raz. Stąd wniosek, że $x=\pi a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta=\pi$. Punkt ten odpowiada wierzchołkowi cykloidy ($x=\pi a$, $y=2a$). W punkcie tym mamy

$$\frac{dy}{dx}=0, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4a}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}=0.$$

Zadania

Obliczyć pochodną dy/dx funkcji określonej równaniami parametrycznymi (zad. 7.11 - 7.34):

7.11. $x=4t$, $y=8(1-t)$ (linia prosta).

7.12. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ (elipsa).

7.13. $x=\dfrac{t^2}{t-1}$, $y=\dfrac{t}{t^2-1}$.

7.14. $x=\dfrac{1}{t+1}$, $y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$.

7.15. $x=\dfrac{b}{b-t}$, $y=\dfrac{a}{a-t}$.

7.16. $x=\sqrt{t^2+1}$, $y=\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}$.

7.17. $x=t^2$, $y=\frac{1}{3}t^3-t$.

7.18. $x=t^2+2t$, $y=\ln(t+1)$.

7.19. $x=\dfrac{2at}{1+t^2}$, $y=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}$.

7.20. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (cykloida).

7.21. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (asteroida).

7.22. $x=\cos 2t$, $y=\sin^2 t$.

7.23. $x=\cos\varphi+\varphi\sin\varphi$, $y=\sin\varphi-\varphi\cos\varphi$.

7.24. $x=\alpha\sin t+\sin\alpha t$, $y=\alpha\cos t+\cos\alpha t$ przy $t=0$.

7.25. $x=\cos t(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}$, $y=\sin t(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}$.

7.26. $x=\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$, $y=\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$.

7.27. $x=\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}t+\cos t-\sin t$, $y=\sin t+\cos t$.

7.28. $x=a\ln t$, $y=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$ (łańcuchowa).

7.29. $x=\dfrac{at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{at^2}{1+t^3}$ (liść Kartezjusza).

7.30. $x=(R+r)\cos t-R\cos\left(\frac{R+r}{R}t\right)$, $y=(R+r)\sin t-R\sin\left(\frac{R+r}{R}t\right)$ (epicykloida).

7.31. $x=1+e^{a\varphi}$, $y=a\varphi+e^{-a\varphi}$.

7.32. $x=e^{at}$, $y=e^{-at}$.

7.33. $x=(e^{at}-1)^2$, $y=(e^{at}-1)^2$.

7.34. $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Układ współrzędnych Oxy leży w płaszczyźnie pionowej, przy czym oś Ox jest pozioma. Wyznaczyć tangens kąta nachylenia wektora prędkości względem osi Ox w ruchu określonym równaniami parametrycznymi (zad. 7.35 - 7.40):

7.35. $x=2-\sin 2t$, $y=\cos^2 t$ dla $t=\frac{1}{8}\pi$.

7.36. $x=3\sin^2 3t$, $y=\sin t-2\cos t$ dla $t=\frac{1}{4}\pi$.

7.37. $x=2\,\mathrm{tg}\,5t-2t$, $y=t-\sin 5t$ dla $t=\frac{1}{20}\pi$.

7.38. $x=5\,\mathrm{arctg}\,t$, $y=2t^2-1$ dla $t=2$.

7.39. $x=t\ln t-3t^2$, $y=(t+1)^5$ dla $t=1$.

7.40. $x=2t^t-3t$, $y=2t^3-t+1$ dla $t=1$.

W ruchach określonych równaniami parametrycznymi znaleźć prędkość ruchu ds/dt oraz równanie toru w postaci $y=f(x)$ (zad. 7.41 - 7.43):

7.41. $x=t^3$, $y=2t^2$.

7.42. $x=a\cos kt$, $y=b\sin kt$.

7.43. $x=a\sin^3 t$, $y=a\cos^3 t$.

Obliczyć drugą pochodną d^2y/dx^2 funkcji określonej równaniami parametrycznymi (zad. 7.44 - 7.53):

7.44. $x=\cos^2 t$, $y=\sin^2 t$ (jaka to linia?)

7.45. $x=e^{-3t}$, $y=e^{3t}$ (jaka to linia?).

7.46. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $a>0$, $b>0$.

7.47. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(t-\cos t)$, $a>0$.

7.48. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $a>0$.

7.49. $x=a\ln t$, $y=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $a>0$.

7.50. $x=\ln t$, $y=\frac{1}{1-t}$.

7.51. $x=\mathrm{arctg}\,t$, $y=\ln(1+t^2)$.

7.52. $x=\arcsin t$, $y=\sqrt{1-t^2}$.

7.53. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$.

7.54. Ruch punktu materialnego wyrzuconego w płaszczyźnie Oxy pod kątem α do osi poziomej Ox określony jest równaniami

$$x=v_0 t\cos\alpha,\qquad y=v_0 t\sin\alpha-\tfrac{1}{2}gt^2,$$

gdzie t oznacza czas, g przyśpieszenie ziemskie, a v_0 prędkość początkową. Znaleźć równanie toru, długość rzutu oraz prędkość v i tangens kąta nachylenia wektora prędkości względem osi Ox w chwili t.

7.55. Napisać równanie stycznej do cykloidy

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t)$$

w punkcie $t=\frac{1}{2}\pi$.

7.56. Napisać równanie stycznej w punkcie (2, 2) do krzywej

$$x=\frac{1+t}{t^3}, \quad y=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}.$$

7.57. Krzywa określona jest równaniami parametrycznymi $x=t^2$, $y=2t$. Znaleźć kąt nachylenia stycznej do krzywej przy $t=1$.

7.58. Krzywa określona jest równaniami parametrycznymi $x=\cos t$, $y=t+\sin t$. Znaleźć kąt nachylenia stycznej do krzywej przy $t=\frac{1}{3}\pi$ i $t=\frac{1}{2}\pi$.

Rozdział VIII

ALGEBRA

§ 8.1. LICZBY ZESPOLONE

Symbol i oznacza tzw. *jednostkę urojoną*, spełniającą warunek

(8.1.1) $$i^2 = -1.$$

Wprowadzamy *liczby zespolone* z mające postać sumy

$$z = x + iy,$$

gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi. Część rzeczywistą liczby zespolonej z oznacza się symbolem $\mathrm{Re}\, z$, a część urojoną – symbolem $\mathrm{Im}\, z$, zatem

$$\mathrm{Re}\, z = x, \quad \mathrm{Im}\, z = y.$$

Reguły dodawania odejmowania i mnożenia na tych liczbach są takie, jak dla liczb rzeczywistych, przy czym w iloczynie zamiast i^2 podstawia się -1.

PRZYKŁAD. Przy mnożeniu liczb zespolonych $z_1 = a + bi$ oraz $z_2 = c + di$ iloczyn

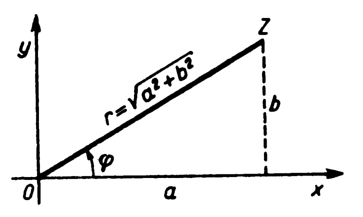
$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di),$$

otrzymujemy mnożąc $a + bi$ przez $c + di$ jak wielomiany:

$$z_1 z_2 = ac + adi + bci + bdi^2.$$

Następnie zastępujemy w iloczynie i^2 przez -1 i ostatecznie otrzymujemy

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$



Rys. 8.1

Liczbę zespoloną różniącą się od liczby $z = a + bi$ tylko znakiem współczynnika przy i nazywamy *liczbą sprzężoną* z liczbą z i oznaczamy przez $\bar{z}$:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Liczbę zespoloną $a + bi$ sprowadzamy do *postaci trygonometrycznej*

(8.1.2) $$a + bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

gdzie liczba dodatnia r jest *modułem*, a φ – *argumentem* danej liczby zespolonej.

Przyrównując części rzeczywiste i urojone otrzymujemy

(8.1.3) $$r=\sqrt{a^2+b^2},$$

(8.1.4) $$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

(8.1.5) $$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Aby podnieść liczbę zespoloną do potęgi naturalnej, posługujemy się tzw. *wzorem Moivre'a*:

(8.1.6) $$\big(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\big)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

ZADANIE 8.1. Obliczyć $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$.

Rozwiązanie. Liczbę zespoloną $\sqrt{3}-i$ sprowadzamy do postaci trygonometrycznej (8.1.2):

(1) $$\sqrt{3}-i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Przyrównując części rzeczywiste i części urojone otrzymujemy układ dwóch równań:

$$r\cos\varphi=\sqrt{3},\qquad r\sin\varphi=-1.$$

Podnosząc te równości stronami do kwadratu i dodając otrzymujemy

$$r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=3+1,$$

czyli $r^2=4$, skąd $r=2$. Mamy więc

$$\cos\varphi=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\qquad \sin\varphi=-\tfrac{1}{2}.$$

Układ ten jest spełniony dla $\varphi=\frac{11}{6}\pi$. Równanie (1) przybierze postać:

(2) $$\sqrt{3}-i=2(\cos\tfrac{11}{6}\pi+i\sin\tfrac{11}{6}\pi).$$

Oznaczmy

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Podnosząc stronami do trzeciej potęgi otrzymujemy

$$\sqrt{3}-i=\big(\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\big)^3.$$

Stosując teraz wzór (8.1.6) Moivre'a otrzymujemy

(3) $$\sqrt{3}-i=\rho^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta).$$

Równości (2) i (3) będą jednocześnie spełnione, jeżeli $\rho^3=2$, czyli $\rho=\sqrt[3]{2}$, oraz $3\theta=$ $=\frac{11}{6}\pi+2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Stąd odpowiednio dla $k=0, 1, 2$ otrzymujemy

$$\theta_1=\tfrac{11}{18}\pi,\qquad \theta_2=\tfrac{23}{18}\pi,\qquad \theta_3=\tfrac{35}{18}\pi.$$

Dla innych całkowitych wartości k otrzymalibyśmy, po odrzuceniu okresu 2π, te same wartości θ_1, θ_2, θ_3. Ostatecznie otrzymujemy trzy wartości wyrażenia $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$:

$$x_1=\sqrt[3]{2}(\cos\tfrac{11}{18}\pi+i\sin\tfrac{1}{18}\pi),\qquad x_2=\sqrt[3]{2}(\cos\tfrac{23}{18}\pi+i\sin\tfrac{23}{18}\pi),\qquad x_3=\sqrt[3]{2}(\cos\tfrac{35}{18}\pi+i\sin\tfrac{35}{18}\pi).$$

ZADANIE 8.2. Obliczyć $z=\sqrt[4]{-i}$.

Rozwiązanie. Sprowadzamy $-i$ do postaci trygonometrycznej

$$-i=1(\cos\tfrac{3}{2}\pi+i\sin\tfrac{3}{2}\pi). \tag{1}$$

Oznaczmy $\sqrt[4]{-i}=\rho(\cos\theta+\sin\theta)$. Podnosząc tę równość do czwartej potęgi mamy

$$-i=\rho^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta). \tag{2}$$

Z zestawienia równości (1) i (2) otrzymujemy $\rho^4=1$, czyli $\rho=1$, oraz $4\theta=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, gdzie $k=0,1,2,3$. Podstawiając kolejno $k=0,1,2,3$ otrzymujemy według wzoru (2) cztery różne wartości $\sqrt[4]{-i}$:

$$z_1=\cos\tfrac{3}{8}\pi+i\sin\tfrac{3}{8}\pi,\qquad z_2=\cos\tfrac{7}{8}\pi+i\sin\tfrac{7}{8}\pi,$$
$$z_3=\cos\tfrac{11}{8}\pi+i\sin\tfrac{11}{8}\pi,\qquad z_4=\cos\tfrac{15}{8}\pi+i\sin\tfrac{15}{8}\pi.$$

Zadania

Znaleźć miejsce geometryczne punktów spełniających nierówności (zad. 8.3 - 8.5):

8.3. $|z|<4$. **8.4.** $|z|<2$ i $0<\varphi<\frac{1}{2}\pi$. **8.5.** $|z-3+4i|<5$.

8.6. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, których a) moduł równa się 3, b) argument równa się $\frac{1}{4}\pi$.

Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby (zad. 8.7 - 8.10):

8.7. -5. **8.8.** $2i$.

8.9. $1+i$. **8.10.** $\sqrt{3}+i$.

Wykonać działania (zad. 8.11 - 8.13):

8.11. $\dfrac{1+i}{1-i}$. **8.12.** $\dfrac{2i}{1+i}$. **8.13.** $\dfrac{4-3i}{4+3i}$.

Obliczyć (zad. 8.14 - 8.21):

8.14. $\sqrt{-3-4i}$. **8.15.** $\sqrt{8+6i}$.

8.16. $(1+i)^{10}$. **8.17.** $(2+i\sqrt{12})^5$.

8.18. $(1+\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi)^6$.

8.19. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{26}$

8.20. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12}$

8.21. $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, gdzie n jest liczbą naturalną.

8.22. Obliczyć następujące pierwiastki z jedności: $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[8]{1}$.

8.23. Uprościć wyrażenie $(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ i podać wynik w postaci trygonometrycznej.

Obliczyć wszystkie wartości poniżej podanych pierwiastków. Wartości te na ogół łatwiej jest podać w postaci trygonometrycznej; w odpowiedziach podajemy je często dla porównania także w postaci algebraicznej (zad. 8.24 - 8.31):

8.24. $\sqrt{i}$.

8.25. $\sqrt[3]{1}$.

8.26. $\sqrt[3]{i}$.

8.27. $\sqrt[4]{-1}$.

8.28. $\sqrt[3]{-1+i}$.

8.29. $\sqrt{3+4i}$.

8.30. $\sqrt[3]{2-2i}$.

8.31. $\sqrt[6]{-27}$.

Znaleźć wszystkie pierwiastki równań (zad. 8.32 - 8.38):

8.32. $x^4-1=0$.

8.33. $x^4-i=0$.

8.34. $x^6+64=0$.

8.35. $x^5-1024=0$.

8.36. $x^4+4=0$.

8.37. $x^6-1=0$.

8.38. $x^3+8=0$.

Wyrazić przez $\sin x$ i $\cos x$ (zad. 8.39 - 8.42):

8.39. $\cos 5x$.

8.40. $\sin 6x$.

8.41. $\sin 7x$.

8.42. $\cos 8x$.

8.43. Korzystając ze wzoru Moivre'a wykazać, że (por. zad. 1.58 i 1.64):

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\sin\frac{1}{2}nx}{\sin\frac{1}{2}x},$$

$$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\cos\frac{1}{2}(n+1)\sin\frac{1}{2}nx}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

§ 8.2. PIERWIASTKI WYMIERNE RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH

Każde *równanie stopnia n* o współczynnikach całkowitych postaci

(8.2.1) $$b_n y^n+b_{n-1}y^{n-1}+\ldots+b_1 y+b_0=0, \quad \text{gdzie} \quad b_n\neq 0,$$

można przez podstawienie

(8.2.2) $$y=\frac{x}{b_n}$$

i pomnożenie przez b_n^{n-1} doprowadzić do równania postaci

(8.2.3) $$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

o współczynnikach całkowitych. Pierwiastki wymierne równania (8.2.3) możemy obliczyć na podstawie twierdzenia:

(8.2.4) *Jeżeli równanie* (8.2.3) *o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny, to jest on liczbą całkowitą będącą dzielnikiem wyrazu wolnego* a_0.

Zadanie 8.44. Rozwiązać równanie

(1) $$2y^4+7y^3-2y^2+7y-4=0.$$

Rozwiązanie. Zgodnie z (8.2.2) dokonujemy podstawienia $y=\frac{1}{2}x$ i po pomnożeniu stronami przez 8 otrzymujemy równanie

(2) $$x^4+7x^3-4x^2+28x-32=0.$$

Jeżeli równanie to ma pierwiastki wymierne, to są one liczbami całkowitymi będącymi dzielnikami liczby -32, a więc zawierają się wśród liczb:

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm8,\ \pm16,\ \pm32.$$

Oznaczamy lewą stronę równania (2) przez $f(x)$ i kolejno obliczamy:

$$f(-1)=1-7-4-28-32\neq0,$$

$$f(1)=1+7-4+28-32=0,$$

a więc $x=1$ jest pierwiastkiem równania (2).

Powołujemy się teraz na *twierdzenie Bézout*:

(8.2.5) *Jeżeli wielomian $f(x)$ jest równy zeru przy $x=a$, to wielomian ten jest podzielny przez $x-a$.*

Dzielimy lewą stronę równania (2) przez $x-1$. Otrzymamy rozkład:

$$x^4+7x^3-4x^2+28x-32\equiv(x-1)(x^3+8x^2+4x+32)=0.$$

Aby znaleźć ewentualne dalsze pierwiastki całkowite równania (2), rozwiązujemy równanie

(3) $$x^3+8x^2+4x+32=0.$$

Ponieważ wszystkie współczynniki tego równania są dodatnie, więc równanie to nie może mieć dodatnich pierwiastków. Oznaczamy lewą stronę równania (3) przez $\varphi(x)$ i podstawiamy kolejno ujemne dzielniki wyrazu wolnego równania (3):

$$\varphi(-1)=-1+8-4+32\neq0,$$

$$\varphi(-2)=-8+32-8-32\neq 0,$$

$$\varphi(-4)=-64+128-16+32\neq 0,$$

$$\varphi(-8)=-8^3+8\cdot 8^2-4\cdot 8+32=0.$$

Wobec ostatniej równości $x=-8$ jest pierwiastkiem równania (3), a tym samym i równania (2). Następnie lewą stronę równania (3) dzielimy przez $x+8$ i otrzymujemy w ilorazie x^2+4. Równanie $x^2+4=0$ ma pierwiastki zespolone $x=-2i$, $x=2i$.

Zanotujmy twierdzenie:

(8.2.6) *Każdy wielomian ma tyle pierwiastków, ile wynosi jego stopień, przy czym każdy pierwiastek liczony jest tyle razy, ile wynosi jego krotność.*

Na podstawie tego twierdzenia wnioskujemy, że $x=1$, $x=-8$, $x=-2i$, $x=2i$ są wszystkimi pierwiastkami równania (2). Ostatecznie więc pierwiastkami równania (1) są

$$y=\tfrac{1}{2},\quad y=-4,\quad y=-i,\quad y=i.$$

Zadania

Rozwiązać równania (zad. 8.45 - 8.57):

8.45. $x^3-6x+4=0.$

8.46. $x^3-6x-9=0.$

8.47. $x^3+18x-19=0.$

8.48. $x^3-12x-16=0.$

8.49. $x^3-3x-18=0.$

8.50. $x^3-5x^2+3x+9=0.$

8.51. $x^5-3x^4-2x^3-6x^2+x-3=0.$

8.52. $x^4-10x^2-20x-16=0.$

8.53. $x^6+9x^4-16x^2-144=0.$

8.54. $x^3-5x^2-2x+24=0.$

8.55. $4x^3-4x^2+x-1=0.$

8.56. $x^3-6x-4=0.$

8.57. $6x^4-83x^3+272x^2+76x-96=0.$

§ 8.3. RÓWNANIE STOPNIA TRZECIEGO

Ogólna postać *równania stopnia trzeciego* jest następująca:

(8.3.1) $$b_3y^3+b_2y^2+b_1y+b_0=0,\quad \text{gdzie}\quad b_3\neq 0.$$

Jeżeli współczynniki b_3, b_2, b_1, b_0 są liczbami wymiernymi, to przede wszystkim badamy metodą podaną w paragrafie poprzednim, czy równanie nie ma pierwiastków wymiernych. Jeżeli tym sposobem nie znajdziemy żadnego pierwiastka, to dzielimy obie strony równania (8.3.1) przez b_3 i otrzymujemy równanie postaci

(8.3.2) $$y^3+a_2y^2+a_1y+a_0=0.$$

Następnie dokonujemy podstawienia

(8.3.3) $$y=x-\tfrac{1}{3}a_2$$

i otrzymujemy równanie postaci

(8.3.4) $$x^3+px+q=0.$$

Za pomocą podstawienia (8.3.3) otrzymaliśmy równanie (8.3.4), w którym współczynnik przy x^2 jest równy zeru.

Wyróżnikiem równania (8.3.4) nazywamy wyrażenie

(8.3.5) $$\Delta=(\tfrac{1}{3}p)^3+(\tfrac{1}{2}q)^2.$$

Wprowadźmy jeszcze dla wygody następujące oznaczenia:

(8.3.6) $$U=-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\Delta} \quad \text{oraz} \quad V=-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\Delta}.$$

Sposób znajdowania pierwiastków równania (8.3.1), które nie są liczbami wymiernymi, zależy od znaku wyróżnika Δ.

Przypadek 1: $\Delta>0$. W tym przypadku równanie (8.3.4) ma jeden pierwiastek x_1 rzeczywisty, a dwa pozostałe pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone.

Oznaczmy (por. § 8.1):

(8.3.7) $$u=\operatorname{Re}\sqrt[3]{U}, \quad v=\operatorname{Re}\sqrt[3]{V}.$$

Rozważmy teraz równanie

$$x^2+x+1=0.$$

Łatwo sprawdzić, że jeden pierwiastek tego równania jest kwadratem drugiego — i nawzajem. Wprowadźmy oznaczenia jego pierwiastków:

$$\varepsilon=\tfrac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}), \quad \varepsilon^2=\tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$$

(lub odwrotnie). Wtedy wzory na pierwiastki równania (8.3.4) są następujące.

(8.3.8) $$x_1=u+v, \quad x_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v, \quad x_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v.$$

Są to tzw. *wzory Cardano.*

Przypadek 2: $\Delta<0$. W tym przypadku w równaniu (8.3.4) musi być $p<0$ i równanie to ma trzy pierwiastki rzeczywiste różne, które znajdujemy ze wzoru

(8.3.9) $$x_{k+1}=2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\cos\tfrac{1}{3}(\alpha+2k\pi) \quad \text{dla} \quad k=0,1,2,$$

gdzie α wyznacza się ze związku:

(8.3.10) $$\cos\alpha=\frac{3q}{2p\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}}.$$

Przypadek 3: $\Delta=0$. W tym przypadku równanie (8.3.4) ma trzy pierwiastki rzeczywiste, z których dwa są równe. Pierwiastki te znajdujemy ze wzorów:

(8.3.11) $$x_1=x_2=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}, \quad x_3=-2x_1=-2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}.$$

ZADANIE 8.58. Znaleźć pierwiastki równania $x^3+12x+12=0$.

Rozwiązanie. Po stwierdzeniu, że dane równanie nie ma pierwiastków wymiernych, obliczamy wyróżnik

$$\Delta=(\tfrac{12}{3})^3+(\tfrac{12}{2})^2=4^3+6^2=100>0.$$

Dalej, obliczamy

$$U=-6-10=-16,\qquad V=-6+10=4,$$

skąd

$$u=\sqrt[3]{-16}=-2\sqrt[3]{2},\qquad v=\sqrt[3]{4},$$

a więc

$$x_1=-2(\sqrt[3]{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}),$$

$$x_2=(\sqrt[3]{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4})+i\sqrt{3}(\sqrt[3]{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}),\qquad x_3=(\sqrt[3]{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4})-i\sqrt{3}(\sqrt[3]{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}).$$

ZADANIE 8.59. Znaleźć pierwiastki równania $x^3+3x^2-(2-\sqrt{2})=0$.

Rozwiązanie. Nie wszystkie współczynniki danego równania są liczbami wymiernymi; odpada więc metoda podana w § 8.2. Dokonujemy więc podstawienia według wzoru (8.3.3):

(1) $$x=y-1.$$

Po redukcji otrzymujemy równanie $y^3-3y+\sqrt{2}=0$, w którym już nie występuje niewiadoma y w drugiej potędze. Obliczamy wyróżnik

$$\Delta=(-\tfrac{3}{3})^3+(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2=-\tfrac{1}{2}<0.$$

A więc na podstawie wzoru (8.3.9) mamy

$$y_{k+1}=2\cos\tfrac{1}{3}(\alpha+2k\pi)\quad\text{dla}\quad k=0,1,2,$$

gdzie α wyznaczamy ze związku

$$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{-6\sqrt{1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad\text{skąd}\quad \alpha=\frac{3}{4}\pi\ (^1).$$

Mamy więc odpowiednio dla $k=0$, 1, 2:

$$y_1=2\cos\tfrac{1}{4}\pi=\sqrt{2},$$

$$y_2=2\cos\tfrac{11}{12}\pi=-2\cos\tfrac{1}{12}\pi=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),\qquad y_3=2\cos\tfrac{19}{12}\pi=2\cos\tfrac{5}{12}\pi=\tfrac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

Ostatecznie, na podstawie wzoru (1), mamy

$$x_1=\sqrt{2}-1,$$

$$x_2=-2\cos\tfrac{1}{12}\pi-1=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}+2),\qquad x_3=2\cos\tfrac{5}{12}\pi-1=\tfrac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2).$$

ZADANIE 8.60. Rozwiązać równanie $x^3-6x+4\sqrt{2}=0$.

---

(1) Gdybyśmy przyjęli $a=\frac{5}{4}\pi$, otrzymalibyśmy te same wartości y, tylko w innej kolejności.

Rozwiązanie. Równanie, jak widać z jego postaci, nie może mieć pierwiastków wymiernych(¹). Obliczamy wyróżnik $\Delta=(-2)^3+(2\sqrt{2})^2=0$. Wobec tego obliczamy pierwiastki według wzoru (8.3.11):

$$x_1=x_2=\sqrt{2}, \quad x_3=-2\sqrt{2}.$$

ZADANIE 8.61. Do kuli o promieniu wewnętrznym $r=10$ cm nalano $\frac{1}{4}$ litra wody. Obliczyć wysokość h poziomu wody.

Rozwiązanie. Objętość wody wynosi

$$V=\tfrac{1}{3}\pi h^2(3r-h).$$

Po podstawieniu $V=250$, $r=10$ i uporządkowaniu otrzymujemy równanie

$$h^3-30h^2+238{,}8=0.$$

Aby doprowadzić równanie do postaci $x^3+px+q=0$, podstawiamy $h=x+10$ i otrzymujemy

$$x^3-300x+1761{,}2=0.$$

Stosując wzór (8.3.10) otrzymujemy

$$\cos\alpha=\frac{-5283{,}6}{-600\sqrt{100}}=0{,}8805, \quad \text{skąd} \quad \alpha=28°42'.$$

Według wzorów (8.3.9) otrzymujemy:

1) $x_1=20\cos 9°34'=20(0{,}9865)=19{,}73$, co daje $h>2r$. Rozwiązanie to nie nadaje się.

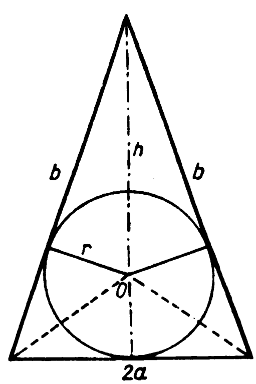
2) $x_2=20\cos 129°34'=20(-0{,}6369)=-12{,}74$, co daje $h<0$. Rozwiązanie to również nie nadaje się.

3) $x_3=20\cos 249°34'=20(-0{,}3491)=-6{,}98$, skąd $h=3$ cm.

Sprawdzamy według wzoru

$$V=\tfrac{1}{3}\pi h^2(3r-h);$$

podstawiając $r=10$ i $h=3$ otrzymujemy $V=255\text{ cm}^3$, czyli około $\frac{1}{4}$ litra.



Rys. 8.2

ZADANIE 8.62. Okrąg wpisany w trójkąt równoramienny o polu $S=12\text{ cm}^2$ ma promień $r=1$ cm. Obliczyć długości boków trójkąta (rys. 8.2).

Rozwiązanie. Oznaczmy podstawę trójkąta równoramiennego przez $2a$, ramię przez b i obwód przez $2p=2a+2b$. Wówczas wysokość trójkąta jest $h=\sqrt{b^2-a^2}$. Stąd równanie

$$a\sqrt{b^2-a^2}=S.$$

(¹) Dla x wymiernego wyrażenie x^3-6x jest liczbą wymierną, a więc różną od $-4\sqrt{2}$.

Z drugiej strony, łatwo otrzymać równanie

$$(a+b)r=S.$$

Mamy układ dwóch równań z niewiadomymi a i b. Podnosząc pierwsze równanie do kwadratu: $a^2(b^2-a^2)=S^2$, i podstawiając $b=S/r-a$, po uporządkowaniu otrzymujemy równanie stopnia trzeciego:

$$a^3-\frac{S}{2r}a^2+\frac{Sr}{2}=0.$$

Po podstawieniu $S=12$ i $r=1$ mamy równanie

$$a^3-6a^2+6=0.$$

Po sprawdzeniu, że równanie to nie ma pierwiastków całkowitych, sprowadzamy je do postaci $x^3+px+q=0$ przez podstawienie $a=x+2$ i otrzymujemy równanie

$$x^3-12x-10=0.$$

Obliczamy wyróżnik

$$\Delta=(-\tfrac{12}{3})^3+(-\tfrac{10}{2})^2=-39.$$

Wzór (8.3.10) daje

$$\cos\alpha=0{,}625, \quad \text{skąd} \quad \alpha=51°18'.$$

Ze wzorów (8.3.9) obliczamy:
1) $x_1=4\cos 17°06'=4(0{,}9557)=3{,}823$, skąd $a=5{,}823$ i $b=6{,}177$.
2) $x_2=4\cos 137°06'=4(-0{,}6032)=-2{,}413$, skąd wypada $a<0$.
3) $x_3=4\cos 257°06'=4(-0{,}2232)=-0{,}893$, skąd $a=1{,}107$ i $b=10{,}893$.
Zadanie ma dwa rozwiązania.

ZADANIE 8.63. Obliczyć, jak głęboko zanurza się w wodzie drewniana kula o promieniu $r=12$ cm i ciężarze właściwym $\gamma=0{,}6$ G/cm^3 (dla wody przyjąć ciężar właściwy 1 G/cm^3).

Rozwiązanie. Zgodnie z prawem Archimedesa zanurzona część pływającej kuli wypiera taką ilość wody, której ciężar równa się ciężarowi całej kuli. Ciężar kuli wynosi $\frac{4}{3}\pi r^3\gamma$ i tyleż ma wynosić ciężar wypartej wody.

Przypuśćmy, że kula jest zanurzona na głębokość h, tzn. zanurzona część kuli jest odcinkiem kulistym o strzałce h. Objętość takiego odcinka kuli wynosi $\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$, a ponieważ ciężar właściwy wody jest 1 G/cm^3, przeto musi być spełnione równanie

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3\gamma=\tfrac{1}{3}\pi h^2(3r-h),$$

gdzie h jest niewiadomą. Równanie to można napisać w postaci

$$h^3-3rh^2+4r^3\gamma=0.$$

Otrzymaliśmy równanie stopnia trzeciego. Aby doprowadzić je do postaci $x^3+px+q=0$, dokonujemy podstawienia $h=x+r$ i otrzymujemy równanie

$$x^3-3r^2x+2r^3(2\gamma-1)=0.$$

Wyróżnik jest równy $\Delta=4\gamma r^6(\gamma-1)$, a ponieważ $\gamma=0{,}6$, przeto $\Delta=-0{,}36r^6$. Mamy przypadek, gdy $\Delta<0$.

Zastosujemy trygonometryczną metodę rozwiązania równania. Według wzoru (8.3.10) mamy

$$\cos\alpha=\frac{6r^3\cdot 0{,}2}{-6r^2\sqrt{r^2}}=-0{,}2, \quad \text{skąd} \quad \alpha=101°32'.$$

Na podstawie wzoru (8.3.9) otrzymujemy

1) $x_1=2r\cos 33°51'=1{,}6610r$ i $h_1=2{,}6610r$; rozwiązanie to nie nadaje się.

2) $x_2=2r\cos 153°51'=-1{,}7952r$, skąd $h_2=-0{,}7952r$; rozwiązanie to również nie nadaje się.

3) $x_3=3r\cos 273°51'=0{,}1332$, skąd $h_3=1{,}1332\,r$. Podstawiając $r=12$ cm otrzymujemy głębokość zanurzenia $h=13{,}6$.

Zadania

Rozwiązać równania (zad. 8.64 - 8.70):

8.64. $x^3-12x+8=0$. **8.65.** $x^3+3x-2=0$.

8.66. $x^3-71x+219=0$. **8.67.** $x^3-9x-6\sqrt{3}=0$.

8.68. $x^3+6x+4=0$. **8.69.** $x^3-588x-2744=0$.

Wskazówka. Zauważmy, że $588=3\cdot 14^2$, $2744=14^3$.

8.70. $x^3-5x+6\sqrt{2}=0$.

Rozdział IX

MACIERZE, WYZNACZNIKI, RÓWNANIA LINIOWE

§ 9.1. MACIERZE. WYZNACZNIKI

Macierzą (*prostokątną*) **A** nazywamy prostokątną tablicę liczb; poniższa macierz **A** ma *n wierszy* i *m kolumn* i oznacza się

(9.1.1)
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Tablicę prostokątną liczb oznaczającą macierz ujmujemy w nawias kwadratowy jak w (9.1.1) albo w nawias półokrągły ( ). Zapis a_{ik} oznacza, że element ten znajduje się w i-tym wierszu i k-tej kolumnie macierzy, np. element a_{23} znajduje się w drugim wierszu (pierwszy wskaźnik) i trzeciej kolumnie (drugi wskaźnik); mówi się również, że element a_{23} leży na przecięciu drugiego wiersza i trzeciej kolumny.

Mówimy, że macierz (9.1.1) jest *wymiaru* (*typu*) $n\times m$ (czytaj *n na m* albo *n razy m*) i w skróconej postaci zapisujemy w postaci

$$[a_{ik}]_{n\times m} \quad \text{lub} \quad [a_{ik}] \ (i=1,2,\dots,n,\ k=1,2,\dots,m).$$

Gdy $n=m$, tzn. gdy liczba wierszy równa jest liczbie kolumn, macierz (9.1.1) nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n*, a liczbę n — jej *stopniem.*

Każdej macierzy kwadratowej

(9.1.2)
$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

przyporządkowujemy liczbę zwaną *wyznacznikiem*, którą oznaczamy jednym z następujących symboli: det **W**, |**W**|, W lub

(9.1.3)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

zauważmy, że tablicę kwadratową liczb oznaczającą wyznacznik — w odróżnieniu od macierzy — ujmujemy dwiema równoległymi kreskami po lewej i prawej stronie tablicy. Mówimy, że wyznacznik (9.1.3) jest *stopnia n*, podobnie jak macierz (9.1.2).

Wyznacznik jest więc liczbą określoną przez tablicę kwadratową. Ogólną regułę obliczania wyznacznika dowolnego stopnia n, ze względu na konieczność uprzedniego wprowadzenia pewnych pojęć, podamy później. Obecnie podamy kolejno reguły obliczania wyznaczników stopnia $n=1$, 2 i 3.

Gdy wyznacznik jest stopnia pierwszego, tzn. $n=1$, definiujemy wyznacznik wzorem

$$|a| = a \text{ (}^1\text{)}.$$

Gdy wyznacznik jest stopnia drugiego, tzn. $n=2$, obliczamy go z pomocą następującego wzoru:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Gdy wyznacznik jest stopnia trzeciego, tzn. $n=3$, do obliczenia wyznacznika często stosuje się tzw. *regułę* (*metodę*) *Sarrusa* Polega ona na tym, że poniżej wyznacznika stopnia trzeciego dopisujemy jego pierwszy wiersz, pod nim drugi wiersz, a następnie tworzymy sześć iloczynów (po trzy czynniki w każdym), z których trzy bierzemy nie zmieniając ich znaków, a w trzech pozostałych iloczynach zmieniamy ich znaki (tak jak pokazuje poniższy schemat), a następnie wszystkie sześć iloczynów sumujemy:

(9.1.4)
$$\begin{array}{ccccc} & a_1 & b_1 & c_1 & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ - & a_1 & b_1 & c_1 & + \\ - & a_2 & b_2 & c_2 & + \\ - & & & & + \end{array} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 .$$

W dalszych rozważaniach słowo *wyznacznik* będzie oznaczało często określającą go tablicę liczb.

Minorem (*podwyznacznikiem*) danej macierzy (danego wyznacznika) nazywamy każdy wyznacznik określony tablicą kwadratową powstałą z danej macierzy (wyznacznika) przez skreślenie pewnej liczby wierszy oraz kolumn.

Minorem odpowiadającym elementowi a_{ik} danej macierzy kwadratowej albo danego wyznacznika nazywamy wyznacznik, który powstaje przez skreślenie (pominięcie) i-tego wiersza i k-tej kolumny. Oznaczamy go symbolem M_{ik}.

Dopełnieniem algebraicznym A_{ik} *elementu* a_{ik} nazywamy liczbę równą iloczynowi minora M_{ik} odpowiadającego temu elementowi przez $(-1)^{i+k}$:

(9.1.5)
$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

---

(1) Nie mylić z wartością bezwzględną liczby a.

Bardzo ważne w zastosowaniach jest następujące twierdzenie:

(9.1.6) *Dla danego wyznacznika sumy iloczynów elementów dowolnego wiersza (lub kolumny) wyznacznika przez ich dopełnienia algebraiczne mają tę samą wartość*:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \text{const} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Podamy obecnie ogólną definicję wyznacznika.

Przez *wyznacznik stopnia* n ($n \geqslant 2$) rozumiemy sumę iloczynów elementów dowolnego wiersza (kolumny) przez ich dopełnienia algebraiczne.

Niechaj dany będzie wyznacznik stopnia n:

(9.1.7)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = A.$$

Wypiszmy kilka rozwinięć tego wyznacznika:

1) według elementów pierwszego wiersza:

$$A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j};$$

2) według elementów i-tego wiersza:

$$A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{ik}A_{ik} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

gdzie i może być równe $1, 2, \ldots, n$;

3) według elementów pierwszej kolumny:

$$A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{k1}A_{k1} + \ldots + a_{n1}A_{n1} = \sum_{r=1}^{n} a_{r1}A_{r1};$$

4) według elementów k-tej kolumny:

$$A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{ik}A_{ik} + \ldots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{r=1}^{n} a_{rk}A_{rk},$$

gdzie k może być równe $1, 2, \ldots, n$.

Wszystkie te rozwinięcia prowadzą do tego samego wyniku.

ZADANIE 9.1. Obliczyć wartość wyznacznika

$$W = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & -2 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie. Najdogodniejsze rozwinięcie tego wyznacznika spośród ośmiu możliwych (według każdego z czterech wierszy i każdej z czterech kolumn) będzie według elementów drugiej kolumny, bo występują tam dwa elementy równe zeru:

$$W=3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix}+0\cdot A_{22}+6\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix}+0\cdot A_{42}.$$

Oba wyznaczniki stopnia trzeciego obliczamy metodą Sarrusa (9.1.4); z pierwszego otrzymujemy

$$-8+45+0-24-0-24=-11,$$

a z drugiego

$$-40-20-12-32+75-4=-33.$$

Tak więc $W=-3\cdot(-11)-6\cdot(-33)=33+198=231$.

Oczywiście, że wszystkie pozostałe rozwinięcia tego wyznacznika doprowadzą do tego samego wyniku.

§ 9.2. WŁASNOŚCI WYZNACZNIKÓW

Przy obliczaniu i stosowaniu wyznaczników przydatne są następujące twierdzenia:

(9.2.1) *Przestawienie wszystkich wierszy wyznacznika na miejsce jego kolumn i odwrotnie, bez zmiany ich porządku, nie zmienia wartości wyznacznika.*

(9.2.2) *Przestawienie dwóch dowolnych wierszy (lub kolumn) zmienia wartość wyznacznika na przeciwną.*

(9.2.3) *Jeżeli wyznacznik ma dwa wiersze (lub kolumny) identyczne, to jego wartość równa się zeru.*

(9.2.4) *Jeżeli wyznacznik ma jakiś wiersz (lub kolumnę) złożony z samych zer, to jego wartość równa się zeru.*

(9.2.5) *Jeżeli wszystkie elementy dowolnego wiersza (lub kolumny) wyznacznika pomnożymy przez pewną liczbę, to wartość wyznacznika zostanie pomnożona przez tę liczbę.*

(9.2.6) *Jeżeli do elementów dowolnego wiersza (lub kolumny) dodamy albo odejmiemy:*

1. *elementy innego wiersza,*
2. *elementy innego wiersza pomnożone przez tę samą liczbę,*
3. *dowolną kombinację liniową*(1) *innych wierszy (lub kolumn),*

to wartość wyznacznika nie zmieni się.

(9.2.7) *Suma iloczynów elementów dowolnego wiersza (lub kolumny) przez dopełnienia algebraiczne odpowiednich elementów innego wiersza (lub kolumny) równa się zeru.*

---

(1) *Kombinacją liniową* wielkości $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (mogą to być np. stałe, zmienne, funkcje) nazywamy wyrażenie postaci

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_m a_m,$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ są liczbami nie równymi jednocześnie zeru.

Przypominamy, że *suma iloczynów elementów dowolnego wiersza (lub kolumny) przez ich dopełnienia algebraiczne równa się wartości danego wyznacznika.*

Tak więc dla wyznacznika (9.1.7) będzie

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases}A & \text{dla} \quad i=k,\\ 0 & \text{dla} \quad i\neq k,\end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1l}+a_{2j}A_{2l}+\ldots+a_{nj}A_{nl}=\begin{cases}A & \text{dla} \quad j=l,\\ 0 & \text{dla} \quad j\neq l.\end{cases}$$

ZADANIE 9.2. Obliczyć wartość wyznacznika

$$A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4\\ 7 & 6 & -3 & -7 & 12\\ -9 & -6 & 4 & 3 & -2\\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1\\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4\end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie. Bezpośrednie rozwijanie wyznacznika według elementów pewnego wiersza albo kolumny doprowadziłoby do pięciu wyznaczników stopnia czwartego. Starajmy się zastosować te własności wyznaczników, które spowodują powstanie zer w jakimś wierszu lub kolumnie.

Mnożąc elementy pierwszego wiersza przez 3 i odejmując od elementów drugiego wiersza otrzymujemy

$$A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4\\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0\\ -9 & -6 & 4 & 3 & -2\\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1\\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4\end{vmatrix}.$$

Następnie do trzeciego wiersza dodajmy podwojony czwarty wiersz

$$A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4\\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1\\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4\end{vmatrix}.$$

Rozwińmy teraz otrzymany wyznacznik według elementów trzeciego wiersza; mamy

$$A=-1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 8 & 0\\ 3 & -2 & -2 & 1\\ -2 & 6 & -3 & 4\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 3 & -2 & 1\\ 5 & -2 & 6 & 4\end{vmatrix}.$$

Z kolei rozwijamy pierwszy i drugi wyznacznik według elementów drugiego wiersza:

$$A=-1\cdot 8\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ -2 & 6 & 4\end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ -2 & 6 & 4\end{vmatrix}.$$

Wyznaczniki stopnia trzeciego obliczamy metodą Sarrusa. Pierwszy z nich jest równy

$$-16+72+2-16-12+12=42,$$

a drugi również 42. Ostatecznie więc

$$A=8\cdot 42+2\cdot 42=10\cdot 42=420.$$

§ 9.3. RÓWNANIE LINIOWE. UKŁAD DWÓCH RÓWNAŃ LINIOWYCH Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

Równanie postaci

(9.3.1) $$a_1 x_1+a_2 x_2+\ldots+a_n x_n=b \quad (n=1,2,\ldots)$$

nazywamy *równaniem liniowym o n niewiadomych* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Równanie liniowe o dwóch niewiadomych zapisuje się często w postaci równoważnej

(9.3.2) $$Ax+By+C=0.$$

Gdy A i B nie są jednocześnie równe zeru (tzn. $A^2+B^2>0$), wykresem równania (9.3.2) na płaszczyźnie jest linia prosta, więc równanie (9.3.2) ma nieskończenie wiele rozwiązań, którymi są dowolne pary (x, y) współrzędnych punktów tej prostej. Gdy $A=0$ oraz $B=0$, ale $C\neq 0$, to równanie (9.3.2) nie ma rozwiązań (jest *sprzeczne*). Gdy $A=0$, $B=0$, $C=0$ otrzymujemy $0\cdot x+0\cdot y=0$, więc rozwiązań jest nieskończenie wiele (każda para liczb spełnia równanie).

Układ dwóch równań liniowych o dwóch niewiadomych ma postać

(9.3.3) $$\begin{aligned} a_1 x+b_1 y&=c_1,\\ a_2 x+b_2 y&=c_2. \end{aligned}$$

Wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych oznaczamy przez W, zatem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=W.$$

Podobnie oznaczamy wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=W_x, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=W_y,$$

a sposób ich tworzenia objaśnimy w zadaniu 9.3 (por. też § 9.4).

Mogą zajść trzy przypadki:

Przypadek 1: $W\neq 0$. Wtedy istnieje jedyne rozwiązanie układu (9.3.3), które można zapisać w postaci (por. też § 9.4):

(9.3.4) $$x=\frac{W_x}{W}, \qquad y=\frac{W_y}{W}.$$

Mówimy wówczas, że układ (9.3.3) jest *oznaczony* (por. zad. 9.3). Geometrycznie oznacza to, że proste o równaniach (9.3.3) mają dokładnie jeden punkt wspólny (przecinają się w jednym punkcie).

Przypadek 2: $W=0$, a W_x, W_y nie są jednocześnie równe zeru. Wówczas układ (9.3.3) jest *sprzeczny* (por. zad. 9.4, przypadek b). Geometrycznie oznacza to, że proste o równaniach (9.3.3) są równoległe.

Przypadek 3: $W=0$, $W_x=0$, $W_y=0$. Wówczas układ (9.3.3) jest równoważny jednemu z równań układu, może więc być sprzeczny albo *nieoznaczony*; w drugim przypadku układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (interpretacja geometryczna jest taka, że proste o równaniach (9.3.3) pokrywają się (por. zad. 9.5)).

Zadanie 9.3. Rozwiązać za pomocą wyznaczników układ równań

(1) $$3x-7y=1, \quad 2x+9y=28.$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych:

(2) $$\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3\cdot 9-(-7)\cdot 2=41.$$

Ponieważ wyznacznik ten jest różny od zera, więc układ równań (1) jest oznaczony, tzn. ma dokładnie jedno rozwiązanie, które znajdujemy ze wzorów (9.3.4):

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 28 & 9 \end{vmatrix}}{41}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 28 \end{vmatrix}}{41}.$$

Oba wyznaczniki (w licznikach) zostały utworzone według reguły (por. też § 9.4):

(9.3.5) *Wyznacznik w liczniku tworzymy z wyznacznika ze współczynników przy niewiadomych (wyznacznika (2)) zastępując w nim kolumnę współczynników przy tej niewiadomej, którą obliczamy, przez kolumnę wyrazów wolnych (stałych).*

Ostatecznie otrzymujemy

$$x=\frac{9+196}{41}, \quad y=\frac{84-2}{41}, \quad \text{tzn.} \quad x=5, \; y=2.$$

Geometrycznie oznacza to, że dwie proste o równaniach (1) przecinają się w punkcie o współrzędnych $x=5$, $y=2$.

Zadanie 9.4. Rozwiązać układ równań

(1) $$2x-6y=10, \quad 5x-15y=k$$

i przeprowadzić dyskusję w zależności od parametru k.

Rozwiązanie. Obliczmy wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych

$$W=\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & -15 \end{vmatrix}=2\cdot(-15)-(-6)\cdot 5=-30-(-30)=0.$$

Wyznacznik ten jest równy zeru, więc układ (1) na pewno nie ma jednoznacznego rozwiązania (proste o równaniach (1) nie przecinają się). Teraz zajść mogą dwa przypadki.

Przypadek a. Oba wyznaczniki utworzone jak w zadaniu 9.3 są równe zeru:

$$W_y=\begin{vmatrix}2 & 10\\ 5 & k\end{vmatrix}=2k-50=0\,, \quad W_x=\begin{vmatrix}10 & -6\\ k & -15\end{vmatrix}=-150+6k=0\,, \tag{2}$$

co zachodzi dla $k=25$. Wówczas układ (1) przyjmuje postać

$$2x-6y=10\,, \quad 5x-15y=25 \tag{3}$$

i widzimy, że ten układ sprowadza się do jednego równania (np. drugie równanie otrzymujemy z pierwszego mnożąc obie jego strony przez 2,5); każda para liczb spełniając jedno z tych równań spełnia zarazem drugie (każdy punkt leżący na jednej z tych prostych leży jednocześnie na drugiej, bo obie proste w tym przypadku pokrywają się). Zatem gdy $k=25$, układ równań jest nieoznaczony, tzn. ma nieskończenie wiele rozwiązań; otrzymać je możemy podstawiając za x dowolne liczby. Podstawiając np. $x=0,\ 1,\ \frac{5}{2},\ 11,\ \sqrt{2},\ \pi$ i obliczając z któregokolwiek równania układu (3) odpowiadające wartości y, otrzymujemy jako rozwiązania

$$x=0\,,\ y=-\tfrac{5}{3}\,, \quad x=1\,,\ y=-\tfrac{4}{3}\,, \quad x=\tfrac{5}{2}\,,\ y=-\tfrac{5}{6}\,,$$

$$x=11\,,\ y=2\,, \quad x=\sqrt{2}\,,\ y=\tfrac{1}{3}(\sqrt{2}-5)\,, \quad x=\pi\,,\ y=\tfrac{1}{6}(2\pi-10)\,.$$

Przypadek b. Oba wymienione wyznaczniki (2) są różne od zera. Odpowiada to przypadkowi $k\neq 25$. Obierzmy na k dowolną inną liczbę, np. $k=20$; układ przyjmie wtedy postać

$$2x-6y=10\,, \quad 5x-15y=20\,. \tag{4}$$

Układ równań (1) dla $k\neq 25$ jest układem sprzecznym. Łatwo to stwierdzimy mnożąc obie strony pierwszego równania układu (4) przez 5, a drugiego równania przez (-2) i dodając stronami, otrzymujemy wówczas sprzeczność $0=10$. W tym przypadku dwie proste o równaniach (1) są równoległe, nie mają więc punktu wspólnego.

Zadanie 9.5. Rozwiązać układ równań

$$2kx-4ky=6\,, \quad 5kx-10ky=15 \tag{1}$$

i przeprowadzić dyskusję w zależności od parametru k.

Rozwiązanie. Obliczamy wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych:

$$W=\begin{vmatrix}2k & -4k\\ 5k & -10k\end{vmatrix}=-20k^2-(-20k^2)=0$$

oraz obliczamy wyznaczniki

$$W_x=\begin{vmatrix}6 & -4k\\ 15 & -10k\end{vmatrix}=-60k-(-60k)=0\,, \quad W_y=\begin{vmatrix}2k & 6\\ 5k & 15\end{vmatrix}=30k-30k=0\,.$$

Widzimy, że zarówno $W=0$ jak i $W_x=0$, $W_y=0$. Układ równań (1) jest w tym przypadku równoważny jednemu z tych równań, gdyż np. drugie równanie otrzymuje się przez pomnożenie obu stron pierwszego równania przez $\frac{5}{2}$. Tak więc zamiast układu (1) wystarczy rozważyć jedno z nich np. pierwsze

$$2kx-4ky=6\,. \tag{2}$$

Gdy $k\neq 0$, równanie to jest nieoznaczone, wówczas bowiem

$$x=2y+\frac{3}{k} \tag{3}$$

i podstawiając za y dowolne liczby rzeczywiste otrzymujemy nieskończenie wiele rozwiązań. Zatem tym samym układ (1) jest nieoznaczony, a wzór (3) podaje wszystkie jego rozwiązania.

Gdy $k=0$, równanie (2) przyjmuje postać

$$0\cdot x-0\cdot y=6\,, \quad \text{tzn.} \quad 0=6\,,$$

a więc jest to równanie sprzeczne, czyli układ (1) jest sprzeczny.

§ 9.4. UKŁAD n RÓWNAŃ LINIOWYCH O n NIEWIADOMYCH. WZORY CRAMERA

Układ n równań liniowych o n niewiadomych ma postać

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\,,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n\,. \end{aligned} \tag{9.4.1}$$

Wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy *wyznacznikiem charakterystycznym* (lub *głównym*) *układu*, lub krócej: *wyznacznikiem układu*, i oznaczać będziemy symbolem W, zatem

$$W=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{9.4.2}$$

Utwórzmy następnie z wyznacznika W n wyznaczników $W_1, W_2, \ldots, W_n$ zastępując odpowiednio kolejno pierwszą, drugą, ..., ostatnią jego kolumnę kolumną wyrazów wolnych (stałych) (por. regułę (9.3.5)):

$$W_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad W_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad W_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Mogą zachodzić trzy przypadki:

P r z y p a d e k 1: $W \neq 0$. Wówczas stosujemy tzw. *twierdzenie Cramera*:

(9.4.3) *Jeżeli wyznacznik charakterystyczny W układu równań* (9.4.1) *nie jest równy zeru, to układ n równań liniowych z tą samą liczbą niewiadomych ma dokładnie jedno rozwiązanie*

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \quad x_2 = \frac{W_2}{W}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{W_n}{W}.$$

Wzory te nazywamy *wzorami Cramera.*

Zatem w tym przypadku układ jest *oznaczony.*

P r z y p a d e k 2: $W=0$, ale nie wszystkie wyznaczniki $W_1, W_2, \ldots, W_n$ jednocześnie są równe zeru. Wówczas układ równań (9.4.1) jest *sprzeczny.*

P r z y p a d e k 3: $W=0$, $W_1 = W_2 = \ldots = W_n = 0$. W tym przypadku przynajmniej jedno z równań układu (9.4.1) wynika z pozostałych równań, czyli jest ich kombinacją liniową (por. notkę na str. 149). Odrzucając równanie (albo równania) będące kombinacją liniową pozostałych równań otrzymujemy nowy układ równań równoważny (tzn. mający dokładnie takie same rozwiązania) układowi pierwotnemu, ale zawierający wówczas mniej równań niż niewiadomych (patrz zad. 9.7, przypadek gdy $k=1$). Omówienie metody rozwiązywania takiego układu znajdzie czytelnik w § 9.6 (układ może być sprzeczny lub *nieoznaczony*).

Zadanie 9.6. Rozwiązać układ trzech równań z trzema niewiadomymi

$$(1) \qquad \begin{aligned} 5x+3y+4z &= -18, \\ 3x \qquad +z &= -7, \\ 6x+3y+6z &= -27. \end{aligned}$$

R o z w i ą z a n i e. Obliczamy wartość wyznacznika charakterystycznego układu

$$W = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 36+18-15-54 = -15.$$

Ponieważ $W \neq 0$, więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, które otrzymamy stosując wzory Cramera. Obliczamy wartości wyznaczników

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \end{array}$$

$$W_x = \begin{vmatrix} -18 & 3 & 4 \\ -7 & 0 & 1 \\ -27 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -84-81+54+126 = 15,$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 5 & -18 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 6 & -27 & 6 \end{vmatrix} = -210-324-108+168+135+324 = -15,$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -18 \\ 3 & 0 & -7 \\ 6 & 3 & -27 \end{vmatrix} = -162-126+105+243 = 60,$$

a następnie

$$x=\frac{W_x}{W}\,,\ \text{skąd}\ x=-1\,,\qquad y=\frac{W_y}{W}\,,\ \text{skąd}\ y=1\,,\qquad z=\frac{W_z}{W}\,,\ \text{skąd}\ z=-4\,.$$

Jedynym rozwiązaniem układu (1) jest $x=-1$, $y=1$, $z=-4$. Geometrycznie oznacza to, że trzy płaszczyzny dane równaniami (1) przecinają się w jednym punkcie $(-1, 1, -4)$.

ZADANIE 9.7. Rozwiązać układ równań

$$(1)\qquad 2x-y+3z=7\,,\quad 3x+2y-5z=4\,,\quad 4x+5y-13z=k$$

i przedyskutować ze względu na parametr k.

Rozwiązanie. Obliczamy wyznacznik charakterystyczny układu

$$W=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -5\\ 4 & 5 & -13\end{vmatrix}=-52+45+20-24+50-39=0\,.$$

Widzimy, że układ na pewno nie ma dokładnie jednego rozwiązania bez względu na to, jakie wartości przyjmować będzie parametr k (trzy płaszczyzny dane równaniami (1) przy żadnej wartości parametru k nie przetną się w jednym punkcie). Obliczmy kolejno wartości wyznaczników W_x, W_y, W_z; mamy

$$W_x=\begin{vmatrix}7 & -1 & 3\\ 4 & 2 & -5\\ k & 5 & -13\end{vmatrix}=-182+60+5k-6k+175-52=-k+1\,,$$

$$W_y=\begin{vmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 4 & -5\\ 4 & k & -13\end{vmatrix}=-104+9\ -140-48+10k+273=19k-19=19(k-1)\,,$$

$$W_z=\begin{vmatrix}2 & -1 & 7\\ 3 & 2 & 4\\ 4 & 5 & k\end{vmatrix}=4k+105-16-56-40+3k=7k-7=7(k-1)\,.$$

Rozpatrzymy dwa przypadki:

Przypadek a: $k=1$. Wówczas wszystkie trzy wyznaczniki W_x, W_y, W_z są równe zeru. Zgodnie z teorią, w układzie tym co najmniej jedno równanie można odrzucić.

Wynik ten wyjaśnimy jeszcze inaczej. Łatwo sprawdzić, że lewa strona trzeciego równania powstaje z pomnożenia lewej strony drugiego równania przez 2 i odjęcia od otrzymanego wyniku lewej strony pierwszego równania układu. Oznaczając

$$L_1=2x-y+3z\,,\qquad L_2=3x+2y-5z\,,\qquad L_3=4x+5y-13z$$

mamy

$$2L_2-L_1=2(3x+2y-5z)-(2x-y+3z)=4x+5y-13z=L_3\,.$$

Tak więc L_3 jest kombinacją liniową L_1 i L_2 i to jest właśnie przyczyną, z powodu której wyznacznik charakterystyczny układu (1) jest równy zeru.

Zwróćmy następnie uwagę na prawe strony trzech równań układu: $P_1=7$, $P_2=4$, $P_3=k$, gdzie prawa strona trzeciego równania może przybierać różne wartości. Jeśli P_3 byłoby taką samą kombinacją liniową P_1 i P_2, tzn. jeśli

$$P_3=2P_2-P_1\,,$$

tzn. jeśli $k=2\cdot 4-7$, czyli $k=1$, to trzecie równanie nie wnosi nic nowego do dwóch pierwszych równań, gdyż jest spełnione przez każdą trójkę liczb (x, y, z), która spełnia dwa pierwsze równania, i dlatego może być odrzucone (skreślone). Przy $k=1$ układ (1) trzech równań z trzema niewiadomymi jest równoważny dwom pierwszym równaniom.

Podobnie można obliczyć, że $L_1=2L_2-L_3$, $P_1=2P_2-P_3$, z czego wynika, że układ (1) jest równoważny także układowi równań drugiego i trzeciego.

Przypadek ten w postaci ogólnej (układ m równań liniowych z n niewiadomymi) omówiony jest w § 9.6.

Przypadek b: $k\neq 1$. Wówczas wszystkie trzy wyznaczniki W_x, W_y, W_z są różne od zera, a układ jest sprzeczny.

W świetle rozważań przy rozpatrywaniu poprzedniego przypadku rozumiemy teraz, że tylko przy $k=1$ trzecie równanie nie przeczy dwom pierwszym. Jeśli więc $k\neq 1$, to układ (1) nie posiada żadnych rozwiązań.

§ 9.5. RÓWNANIE LINIOWE JEDNORODNE. UKŁAD RÓWNAŃ LINIOWYCH JEDNORODNYCH

Równanie liniowe postaci

(9.5.1) $$a_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+a_nx_n=0 \quad (n=1, 2, \ldots)$$

nazywamy *równaniem liniowym jednorodnym* lub w skrócie *równaniem jednorodnym*.

Skrót ten nie jest dokładny, ponieważ są równania jednorodne stopnia wyższego niż jeden, ale takimi równaniami w niniejszej książce nie będziemy się zajmowali. Oczywiście każde równanie jednorodne o dowolnej liczbie niewiadomych ma tzw. *rozwiązanie zerowe*

(9.5.2) $$x_1=0\,, \quad x_2=0\,, \quad \ldots, \quad x_n=0$$

oraz przy $n>1$ ma nieskończenie wiele *rozwiązań niezerowych*, tzn. takich, w których co najmniej jedna niewiadoma nie równa się zeru.

ZADANIE 9.8. Rozwiązać równanie

(1) $$2x-6y+3z=0\,.$$

Rozwiązanie. Oczywiście, że równanie to, jako jednorodne, ma rozwiązanie zerowe $x=0$, $y=0$, $z=0$. Ale równanie to ma również rozwiązania niezerowe. Łatwo je znajdziemy, wyznaczając jedną z niewiadomych, np.

$$x=3y-1{,}5z\;;$$

podstawiając na y i z zupełnie dowolne i niezależne od siebie liczby otrzymujemy nieskończenie wiele rozwiązań równania jednorodnego (1). A oto przykłady kilku rozwiązań:

y	0	0	-3	2	-1	$\frac{1}{3}$	...
z	0	4	0	4	3	2	...
x	0	-6	-9	0	$-7,5$	-2	...

Podobnie postępujemy, gdy liczba niewiadomych jest większa. Interpretacja geometryczna tego faktu jest niezmiernie prosta: równanie (1) jest równaniem płaszczyzny przechodzącej przez początek układu (stąd rozwiązanie zerowe), inne rozwiązania zaś tego równania są współrzędnymi x, y, z dowolnego punktu tej płaszczyzny.

Układ równań liniowych nazywamy *układem liniowym jednorodnym*, lub po prostu: *układem jednorodnym*, jeśli każde równanie układu jest liniowe jednorodne, tzn. jest postaci (9.5.1). W przypadku przeciwnym układ równań liniowych nazywamy *układem liniowym niejednorodnym*.

Każdy układ liniowy jednorodny z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bez względu na liczbę równań i na liczbę niewiadomych ma *rozwiązanie zerowe*, tzn. składające się z samych zer:

(9.5.3) $$x_1=0\,, \quad x_2=0\,, \quad \ldots, \quad x_n=0\,.$$

Układy liniowe jednorodne mogą oprócz rozwiązania zerowego mieć również rozwiązania niezerowe.

Rozpatrzmy *układ liniowy jednorodny n równań z n niewiadomymi*

(9.5.4) $$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0\,,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=0\,. \end{aligned}$$

Zgodnie z powiedzianym przedtem, układ ten ma rozwiązanie zerowe (9.5.3). Nasuwa się jednak pytanie, czy jest to jedyne rozwiązanie układu (9.5.4), tzn. czy układ taki może mieć również rozwiązania niezerowe. Sprawę tę rozstrzygają twierdzenia (9.5.5) i (9.5.6).

(9.5.5) *Jeżeli wyznacznik charakterystyczny W układu równań* (9.5.4) *jest różny od zera, to układ ten ma tylko rozwiązanie zerowe* (9.5.3).

ZADANIE 9.9. Rozwiązać układ równań liniowych jednorodnych

(1) $$\begin{aligned} 3x-y+2z&=0\,,\\ 4x+2y-5z&=0\,,\\ 2x-7y+11z&=0\,. \end{aligned}$$

R o z w i ą z a n i e. Obliczamy wyznacznik charakterystyczny W układu:

$$W=\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & -5\\ 2 & -7 & 11\end{vmatrix}=66-56+10-8-105-(-44)=-49\neq 0\,.$$

Z twierdzenia (9.5.5) wynika, że jedynym rozwiązaniem układu (1) jest rozwiązanie zerowe, tzn. $x=0$, $y=0$, $z=0$. Interpretacja geometryczna tego wyniku jest następująca: w układzie współrzędnych $Oxyz$ każde z równań układu (1) przedstawia płaszczyznę przechodzącą przez początek układu współrzędnych (0, 0, 0) i początek układu jest jedynym punktem wspólnym wszystkich trzech płaszczyzn.

(9.5.6) *Jeżeli wyznacznik charakterystyczny* W *układu* (9.5.4) n *równań liniowych jednorodnych z* n *niewiadomymi jest równy zeru, tzn.* $W=0$, *to układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań w tym również rozwiązanie zerowe* (9.5.3).

ZADANIE 9. 10. Rozwiązać układ równań liniowych jednorodnych

$$\begin{aligned}3x+2y-z&=0\,,\\ x+3y-4z&=0\,,\\ x-4y+7z&=0\,.\end{aligned}\tag{1}$$

R o z w i ą z a n i e. Obliczamy wyznacznik charakterystyczny W tego układu:

$$W=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4\\ 1 & -4 & 7\end{vmatrix}.$$

Wartość jego równa się zeru (co można wykazać stosując metodę Sarrusa albo zwrócić uwagę na to, że dodając do elementów trzeciego wiersza elementy drugiego wiersza pomnożonego przez 2 otrzymamy wyznacznik, którego trzeci wiersz jest identyczny z pierwszym wierszem). Ponieważ $W=0$, więc na podstawie twierdzenia (9.5.6) wnioskujemy, że układ (1) oprócz rozwiązania zerowego ma nieskończenie wiele rozwiązań niezerowych. Wyznaczymy te rozwiązania.

Zbadajmy, czy istnieje chociaż jeden minor wyznacznika W stopnia drugiego różny od zera. Taki minor istnieje, gdyż np. minor utworzony ze współczynników przy x i y w dwóch pierwszych równaniach

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=9-2=7\neq 0\,.$$

Zatem trzecie równanie (tj. nie zawierające elementów tego minora), możemy pominąć a niewiadomą z (przy której współczynniki nie weszły do minora) przenieść na prawą stronę i traktować jako *parametr*, tzn. jako wielkość wiadomą, której wartość może być różnie ustalona. Otrzymujemy następujący układ dwóch równań:

$$\begin{aligned}3x+2y&=z\,,\\ x+3y&=4z\,,\end{aligned}$$

którego rozwiązaniami są

$$x=\frac{\begin{vmatrix} z & 2 \\ 4z & 3 \end{vmatrix}}{7}, \; y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & z \\ 1 & 4z \end{vmatrix}}{7}, \quad \text{skąd} \quad x=-\frac{5z}{7}, \; y=\frac{11z}{7}.$$

Podstawiając za z dowolne wartości otrzymujemy nieskończenie wiele rozwiązań, w tym oczywiście rozwiązanie zerowe. Oto przykładowo kilka rozwiązań:

z	1	-2	$\sqrt{2}$	7	...
x	$-\frac{5}{7}$	$\frac{10}{7}$	$-\frac{5}{7}\sqrt{2}$	-5	...
y	$\frac{11}{7}$	$-\frac{22}{7}$	$\frac{11}{7}\sqrt{2}$	11	...

W tym przypadku trzy płaszczyzny, których równania tworzą układ (1) nie tylko przechodzą przez początek układu, ale przecinają się (wszystkie trzy) wzdłuż pewnej prostej.

§ 9.6. UKŁAD m RÓWNAŃ LINIOWYCH O n NIEWIADOMYCH. TWIERDZENIE KRONECKERA-CAPELLI'EGO

Rozpatrzmy teraz *układ m równań liniowych o n niewiadomych*:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{aligned} \tag{9.6.1}$$

przy czym równania mogą być jednorodne albo niejednorodne (wszystkie albo niektóre), liczba równań może być mniejsza od liczby niewiadomych ($m<n$), może być równa liczbie niewiadomych ($m=n$) i może być większa od liczby niewiadomych ($m>n$).

Utwórzmy macierz powstałą ze współczynników przy niewiadomych układu (9.6.1):

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{9.6.2}$$

Rzędem $\mathrm{r}(\mathbf{W})$ macierzy $\mathbf{W}$ nazywamy największy stopień wyjętego z niej różnego od zera minora, przy czym jeżeli wszystkie elementy macierzy są równe zero, to przyjmujemy, że rząd jej jest równy zero. *Macierzą uzupełnioną* $\mathbf{U}$ macierzy $\mathbf{W}$ nazywamy macierz powstałą przez dopisanie do macierzy $\mathbf{W}$ kolumny utworzonej z wyrazów wolnych układu (9.6.1):

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}. \tag{9.6.3}$$

Sformułujemy teraz *twierdzenie Kroneckera-Capelliego*, które mówi o rozwiązalności układu równań (9.6.1):

(9.6.4) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym rozwiązalności ogólnego układu równań liniowych* (9.6.1) *jest równość rzędu macierzy* **W** *współczynników układu i rzędu macierzy uzupełnionej* **U**:

$$r = \mathrm{r}(\mathbf{W}) = \mathrm{r}(\mathbf{U}) .$$

Gdy wspólny rząd r tych macierzy równa się liczbie niewiadomych n, to układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy zaś wspólny rząd r jest mniejszy od liczby niewiadomych n, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które zależą od n−r dowolnych parametrów.

Zauważmy, że zawsze jest $\mathrm{r}(\mathbf{W}) \leqslant n$.

Zadanie 9.11. Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} x+3y-4z&=4 , \\ 3x+2y-z&=1 , \\ x-4y+7z&=5 . \end{aligned} \tag{1}$$

Rozwiązanie. Budujemy macierz współczynników **W** i macierz uzupełnioną **U**:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix} .$$

Łatwo obliczamy, że $\det \mathbf{W} = 0$, czyli nie możemy stosować twierdzenia Cramera. Rząd macierzy **W** jest niższy niż 3, ale ponieważ minor stopnia drugiego utworzony ze współczynników przy x i y w dwóch pierwszych równaniach

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2-9 = -7 \neq 0 ,$$

więc rząd $\mathrm{r}(\mathbf{W}) = 2$.

Zbadajmy następnie rząd macierzy uzupełnionej **U**, obliczając wartości wyznaczników, które możemy utworzyć z macierzy **U**, zaczynając od wyznaczników możliwie najwyższego stopnia, tj. od stopnia 3. Skreślając trzecią kolumnę otrzymujemy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 10-48+3-8+4-45 \neq 0 ,$$

zatem $\mathrm{r}(\mathbf{U}) = 3$.

Ponieważ rzędy macierzy **W** i **U** są różne, czyli $\mathrm{r}(\mathbf{W}) \neq \mathrm{r}(\mathbf{U})$, więc nie jest spełniony warunek rozwiązalności układu, tzn. układ ten nie ma rozwiązania, czyli jest sprzeczny.

W interpretacji geometrycznej płaszczyzny o równaniach (1) nie mają żadnego punktu wspólnego, chociaż przecinają się każda z każdą.

ZADANIE 9.12. Rozwiązać układ równań

$$(1)\qquad \begin{aligned} 2x-\ 4y+\ 8z-6u&=7\,,\\ 5x-10y+20z\qquad &=12{,}5\,. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Rząd macierzy współczynników

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 8 & -6\\ 5 & -10 & 20 & 0\end{bmatrix}$$

wynosi $\mathrm{r}(\mathbf{W})=2$, gdyż np. minor utworzony ze współczynników przy x i u

$$\begin{vmatrix}2 & -6\\ 5 & 0\end{vmatrix}=30\neq 0\,,$$

oraz rząd macierzy uzupełnionej $\mathbf{U}$ wynosi $\mathrm{r}(\mathbf{U})=2$, gdyż ten sam minor występuje w macierzy $\mathbf{U}$. Zatem $\mathrm{r}(\mathbf{W})=\mathrm{r}(\mathbf{U})$.

Układ jest więc rozwiązalny. Przenosimy niewiadome nie objęte obliczonym minorem, tzn. niewiadome y, z, na prawą stronę:

$$(2)\qquad \begin{aligned} 2x-6u&=7\ \ \ +\ 4y-\ 8z\,,\\ 5x\qquad &=12{,}5+10y-20z \end{aligned}$$

i rozwiązujemy ten układ traktując y i z jako parametry. Z twierdzenia Kroneckera--Capelliego wiemy, że rozwiązania będą zależne od $n-r=4-2=2$ parametrów y i z.

Układ (2) można rozwiązać prościej bez pomocy wzorów Cramera. Mianowicie z drugiego równania obliczamy

$$(3)\qquad x=2{,}5+2y-4z\,,$$

a następnie z pierwszego równania obliczamy

$$u=-\tfrac{1}{3}\,.$$

Tak więc w naszym układzie y, z mogą przybierać wartości zupełnie dowolne niezależnie od siebie, u przyjmuje tylko jedną wartość $-\frac{1}{3}$, a wartości x są ściśle uzależnione wzorem (3) od nadanych wartości zmiennym y, z.

ZADANIE 9.13. Rozwiązać układ czterech równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{aligned} 5x+3y-\ z&=3\,,\\ 2x+\ y-\ z&=1\,,\\ 3x-2y+2z&=-4\,,\\ x-\ y+2z&=-2\,. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Macierz współczynników

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}5 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

może być co najwyżej rzędu 3, natomiast macierz uzupełniona

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}5 & 3 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 2 & -4\\ 1 & -1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

może być rzędu co najwyżej 4. Gdyby okazało się, że $r(\mathbf{U})=4$, od razu wnioskowalibyśmy, wobec $r(\mathbf{W})\neq r(\mathbf{U})$, że układ jest sprzeczny. Ustalmy więc najpierw rząd macierzy **U**. Aby obliczyć wartość wyznacznika $\det \mathbf{U}$, do wyrazów drugiej kolumny dodajmy wyrazy trzeciej kolumny:

$$\det \mathbf{U}=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 2 & -4\\ 1 & 1 & 2 & -2\end{vmatrix},$$

a następnie do wyrazów czwartej kolumny dodajmy wyrazy trzeciej kolumny:

$$\det \mathbf{U}=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Następnie rozwińmy otrzymany wyznacznik według elementów drugiej kolumny:

$$\det \mathbf{U}=(-1)^{1+2}\cdot 2\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{4+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}5 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot(-1)^{2+3}\cdot(-2)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot 2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot(-2)\begin{vmatrix}5 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=-4(4+1)+2\cdot(4+3)-2(-5+2)=-20+14+6=0.$$

A więc rząd $r(\mathbf{U})<4$.

Badamy dalej rzędy macierzy **W** i **U**. Celowe jest badanie rzędu macierzy **W**, gdyż jeśli okazałoby się, że $r(\mathbf{W})=3$, to również $r(\mathbf{U})=3$, ponieważ każdy minor macierzy **W** jest jednocześnie minorem macierzy **U**.

Obliczamy wartość jednego z minorów macierzy **W**, np. utworzonego z trzech pierwszych wierszy; mamy

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4-3) = -14 \neq 0 .$$

Zatem $r(\mathbf{W})=3$, a tym samym $r(\mathbf{U})=3$, więc układ jest rozwiązalny. Pomijamy więc równanie nie objęte obliczonym minorem, tzn. czwarte i rozwiązujemy równoważny układ trzech pierwszych równań układu pierwotnego:

$$\begin{aligned} 5x+3y-z &= 3 , \\ 2x+y-z &= 1 , \\ 3x-2y+2z &= -4 . \end{aligned}$$

Ponieważ wyznacznik utworzony ze współczynników ma wartość -14 różną od zera, więc układ ten, a więc i układ pierwotny, ma jedno rozwiązanie, które znajdujemy, stosując wzory Cramera. Otrzymujemy

$$x=-\tfrac{2}{7}, \quad y=\tfrac{10}{7}, \quad z=-\tfrac{1}{7} .$$

Geometrycznie oznacza to, że cztery płaszczyzny dane równaniami pierwotnego układu przecinają się w punkcie $(-\frac{2}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{1}{7})$.

Zadanie 9.14. Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} 4x-y &= 7 , \\ 3x+y &= 14 , \\ 2x+3y &= 0 . \end{aligned} \tag{1}$$

Rozwiązanie. Wypiszmy macierze współczynników **W** i macierz uzupełnioną **U**:

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} .$$

W tym przypadku rząd macierzy współczynników **W** może być co najwyżej równy 2 (bo żadnego wyznacznika stopnia wyższego niż 2 nie możemy utworzyć), gdy tymczasem rząd macierzy **U** może być co najwyżej równy 3. Ustalmy więc jej rząd. Rozwińmy w tym celu wyznacznik według elementów trzeciego wiersza:

$$\det\mathbf{U}=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\cdot 2\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 3\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = -42-105 \neq 0 .$$

A więc $r(\mathbf{U})=3$, a ponieważ $r(\mathbf{W})<3$, więc warunek rozwiązalności układu nie jest spełniony, tzn. układ (1) nie ma rozwiązań (jest sprzeczny).

Geometrycznie oznacza to, że trzy proste dane równaniami (1) nie mają wspólnego punktu (w tym przypadku przecinają się parami).

§ 9.7. MACIERZE

Definicję macierzy podaliśmy w § 9.1. Dwie macierze $\mathbf{A}=[a_{ik}]$, $\mathbf{B}=[b_{ik}]$ tego samego wymiaru (typu) $n\times m$ nazywamy *równymi*, jeśli wszystkie odpowiednie elementy obu macierzy położone na tych samych miejscach są równe, tzn.

$$a_{ik}=b_{ik} \quad \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,n,\ k=1,2,\ldots,m..$$

Relacja równości macierzy jest

a) zwrotna, tzn. $\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

b) symetryczna, tzn. jeżeli $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, to $\mathbf{B}=\mathbf{A}$.

c) przechodnia, tzn. jeżeli $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}=\mathbf{C}$, to $\mathbf{A}=\mathbf{C}$.

Dwie macierze różnych wymiarów nie mogą więc być równe.

Macierzą przestawioną (lub *transponowaną*) nazywamy macierz, która powstaje z danej macierzy przez zamianę wierszy na kolumny, nie zmieniając ich kolejności. Macierz przestawioną względem macierzy $\mathbf{A}$ oznacza się symbolem $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ albo $\mathbf{A}'$. Jeżeli więc $\mathbf{A}=[a_{ik}]_{n\times m}$, to $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=[b_{ik}]_{m\times n}$, gdzie $b_{ik}=a_{ki}$. Na przykład jeżeli

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

to

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}.$$

Macierzą zerową nazywamy dowolnego wymiaru macierz, której wszystkie elementy są równe zeru, tzn. $a_{ik}=0$ dla $i=1, 2, \ldots, n$, $k=1, 2, \ldots, m$. Macierz zerową wymiaru $n\times m$ oznacza się symbolem $\mathbf{O}_{n\times m}$ lub jeżeli nie prowadzi to do nieporozumień wprost symbolem $\mathbf{O}$. Na przykład mamy

$$\mathbf{O}_{3\times 1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O}_{2\times 4}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O}_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wśród macierzy prostokątnych (tzn. takich, że liczba wierszy jest różna od liczby kolumn, por. § 9.1) wyróżniamy w szczególności tzw. *macierz wierszową* (o jednym wierszu):

$$[a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n]$$

oraz *macierz kolumnową* (o jednej kolumnie)

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Wśród macierzy kwadratowych rozróżniamy pewne ich rodzaje:

Macierzą symetryczną nazywamy macierz kwadratową, której elementy położone symetrycznie względem przekątnej głównej są równe, czyli $a_{ik}=a_{ki}$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$. Na przykład

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & k & r & s \\ c & r & l & p \\ d & s & p & m \end{bmatrix}.$$

Macierzą diagonalną (lub *przekątną*) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy położone poza przekątną główną są równe zeru, czyli $a_{ik}=0$ przy $i\neq k$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$. Na przykład

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}.$$

W szczególności, *macierzą jednostkową* nazywamy macierz diagonalną, której elementy położone na przekątnej głównej są równe 1, czyli

$$a_{ik}=\begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i=k, \\ 0 & \text{dla} \quad i\neq k \end{cases}$$

$(i, k=1, 2, \ldots, n)$. Macierz jednostkową stopnia n oznacza się symbolem $\mathbf{I}_n$ lub po prostu $\mathbf{I}$. Na przykład

$$\mathbf{I}_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz jednostkową oznacza się też często $[\delta_{ik}]_n$ (lub $[\delta_{ik}]$), gdzie tzw. *symbol Kroneckera* δ_{ik} jest zdefiniowany wzorem

$$\delta_{ik}=\begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i=k, \\ 0 & \text{dla} \quad i\neq k. \end{cases}$$

Macierzą osobliwą nazywamy macierz kwadratową, której wyznacznik równa się zeru. Na przykład macierze

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

są osobliwe, gdyż $\det \mathbf{A}=0$ i $\det \mathbf{B}=0$.

Natomiast *macierzą nieosobliwą* nazywamy macierz kwadratową, której wyznacznik jest różny od zera.

Dodawanie macierzy określa się tylko dla macierzy tego samego wymiaru. *Sumę dwóch macierzy* $\mathbf{A}=[a_{ik}]$ i $\mathbf{B}=[b_{ik}]$ tego samego wymiaru $n\times m$ tworzymy w ten sposób, że dodajemy do siebie elementy o tych samych wskaźnikach wiersza i kolumny, tzn.

(9.7.1) $$[a_{ik}]_{n\times m}+[b_{ik}]_{n\times m}=[a_{ik}+b_{ik}]_{n\times m}.$$

Dodawanie macierzy tego samego wymiaru ma *własność łączności*, tzn.

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C},$$

oraz *własność przemienności*, tzn.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}.$$

Odejmowanie macierzy jest wykonalne również tylko dla macierzy tego samego wymiaru. *Różnicę dwóch macierzy* $\mathbf{A}=[a_{ik}]$ i $\mathbf{B}=[b_{ik}]$ określa się za pomocą wzoru

(9.7.2) $$[a_{ik}]_{n\times m}-[b_{ik}]_{n\times m}=[a_{ik}-b_{ik}]_{n\times m}.$$

Iloczyn liczby α przez macierz $\mathbf{A}=[a_{ik}]$ określamy jako macierz $[\alpha a_{ik}]$, którą otrzymujemy z macierzy $\mathbf{A}$ przez pomnożenie każdego jej elementu przez liczbę α, tzn.

(9.7.3) $$\alpha[a_{ik}]=[\alpha a_{ik}].$$

Na przykład

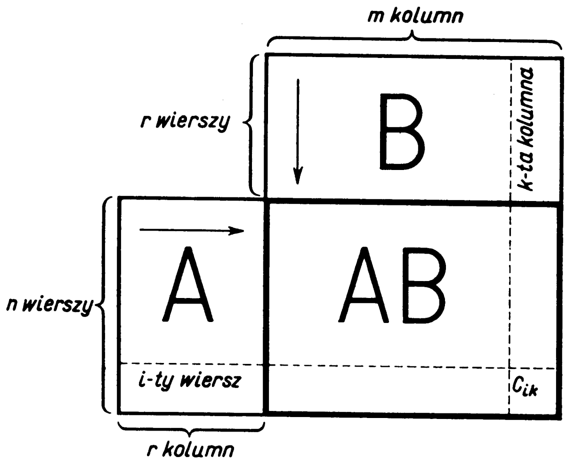
$$3\cdot\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 12 & -3 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mnożenie macierzy przez macierz określa się tylko wtedy, gdy liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy. *Iloczynem macierzy* $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ wymiaru $n\times r$ przez macierz $\mathbf{B}=[b_{jk}]$ wymiaru $r\times m$ nazywamy macierz $\mathbf{C}=[c_{ik}]$ wymiaru $n\times m$, w której element c_{ik} położony w i-tym wierszu i k-tej kolumnie równy jest sumie iloczynów odpowiednich elementów i-tego wiersza pierwszej macierzy przez elementy k-tej kolumny drugiej macierzy, tzn.

(9.7.4) $$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{ir}b_{rk}=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}b_{jk}.$$

Uwaga. Przy mnożeniu macierzy wygodnie jest stosować tzw. *schemat Falka*:

(9.7.5)



Zwróćmy uwagę na miejsca, w których zapisujemy pierwszy czynnik **A** iloczynu i drugi czynnik **B** iloczynu. Wyraz c_{ik} iloczynu położony w i-tym wierszu i k-tej kolumnie obliczamy tworząc sumę iloczynów elementów właśnie tego i-tego wiersza i tej k-tej kolumny jak to przejrzyście widać na schemacie.

Zadanie 9.15. Obliczyć iloczyn macierzy

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Pierwsza macierz jest wymiaru 3×2, a druga wymiaru 2×4, mnożenie jest więc wykonalne. Wypisujemy macierze zgodnie ze schematem Falka, a następnie obliczamy poszczególne wyrazy iloczynu:

$$\begin{array}{rr|rrrr} & & 3 & -1 & 2 & 0 \\ & & -2 & -3 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 0 & -11 & 7 & 12 \\ -1 & 4 & -11 & -11 & 2 & 16 \\ 5 & 1 & 13 & -8 & 11 & 4 \end{array}$$

a więc

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} 0 & -11 & 7 & 12 \\ -11 & -11 & 2 & 16 \\ 13 & -8 & 11 & 4 \end{bmatrix}.$$

Na przykład

$$c_{11}=2\cdot 3+3\cdot(-2)=0, \qquad c_{12}=2\cdot(-1)+3\cdot(-3)=-11, \qquad \ldots$$

Natomiast iloczyn **BA** nie istnieje, gdyż pierwszy czynnik ma 4 kolumny, a drugi czynnik ma 3 wiersze.

ZADANIE 9.16. Obliczyć iloczyn macierzy

$$\mathbf{A}=[2 \quad -3], \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Mnożenie **AB** jest wykonalne, bo **A** jest wymiaru 1×2, a **B** wymiaru 2×1. Mamy

$$\begin{array}{cc|c} & & 4 \\ & & 1 \\ \hline 2 & -3 & 5 \end{array}$$

a więc $\mathbf{AB}=[5]$.

Zauważmy, że w tym przypadku mnożenie **BA** jest również wykonalne, bo liczba kolumn pierwszego czynnika jest 1 i równa jest liczbie wierszy drugiego czynnika. Schemat Falka daje

$$\begin{array}{c|cc} & 2 & -3 \\ \hline 4 & 8 & -12 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}$$

a więc

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}8 & -12\\2 & -3\end{bmatrix}.$$

Widzimy więc, że $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$.

Z powyższych przykładów wnioskujemy, że mnożenie macierzy nie jest przemienne, przy czym jeśli iloczyn **AB** istnieje, to iloczyn **BA** może nie istnieć, a jeśli istnieje, to na ogół $\mathbf{BA}\neq\mathbf{AB}$.

ZADANIE 9.17. Obliczyć iloczyn macierzy **A** i macierzy jednostkowej **I**, gdzie

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\\e & f\end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Macierz **A** jest wymiaru 3×2, więc aby iloczyn **AI** istniał, musimy jako macierz jednostkową wziąć macierz stopnia drugiego, tzn. wymiaru 2×2. Mamy

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \hline a & b & a & b \\ c & d & c & d \\ e & f & e & f \end{array}$$

a więc $\mathbf{AI}=\mathbf{A}$.

Obliczmy jeszcze **IA**. Zauważmy, że aby ten iloczyn był wykonalny, jako macierz jednostkową musimy teraz wziąć macierz stopnia trzeciego, tzn. wymiaru 3×3. Stosując schemat Falka otrzymujemy

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & a & b \\ & & & c & d \\ & & & e & f \\ \hline 1 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & e & f \end{array}$$

a więc $\mathbf{IA}=\mathbf{A}$.

Można wykazać ogólnie, że *dla dowolnej macierzy* $\mathbf{A}$ *zachodzą związki*

(9.7.6) $$\mathbf{AI}=\mathbf{A} \quad \textit{oraz} \quad \mathbf{IA}=\mathbf{A}.$$

W obu równościach $\mathbf{I}$ oznacza macierz jednostkową, ale w każdej z tych dwóch równości $\mathbf{I}$ może być macierzą innego stopnia.

Uwaga. Macierz jednostkowa przy mnożeniu macierzy spełnia więc analogiczną rolę jak liczba jeden przy mnożeniu liczb:

$$a\cdot 1=a \quad \text{oraz} \quad 1\cdot a=a.$$

ZADANIE 9.18. Znaleźć iloczyn macierzy

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -12 & 6 & -3 \end{bmatrix}\neq \mathbf{O}, \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}\neq \mathbf{O}.$$

Rozwiązanie. Macierz $\mathbf{A}$ jest wymiaru 2×3, a macierz $\mathbf{B}$ wymiaru 3×2, więc iloczyn jest wykonalny; w wyniku otrzymamy macierz typu 2×2, tzn. macierz kwadratową. Stosujemy schemat Falka

$$\begin{array}{rrr|rr} & & & 1 & 2 \\ & & & 5 & 10 \\ & & & 6 & 12 \\ \hline 2 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & -3 & 0 & 0 \end{array}$$

a więc $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$.

Otrzymaliśmy interesujący wynik, mianowicie, że iloczyn dwóch macierzy niezerowych może być równy macierzy zerowej.

Uwaga. Analogiczna własność dla iloczynu dwóch liczb nie zachodzi, mianowicie iloczyn dwóch liczb, z których żadna nie jest zerem, nie może się równać zeru.

Natomiast inną własność analogiczną do własności iloczynu liczb ma iloczyn dwóch macierzy:

(9.7.7) *Iloczyn dwóch macierzy, z których przynajmniej jedna jest macierzą zerową, równa się macierzy zerowej*:

$$\mathbf{AO}=\mathbf{O} \quad \textit{oraz} \quad \mathbf{OA}=\mathbf{O}.$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że każdy z czterech symboli $\mathbf{O}$ macierzy zerowej może oznaczać inną macierz zerową.

ZADANIE 9.19. Pomnożyć macierz $\mathbf{A}$ przez macierz zerową $\mathbf{O}$, gdzie

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Ponieważ macierz $\mathbf{A}$ jest wymiaru 2×3, więc aby mnożenie było wykonalne, jako macierz zerową trzeba przyjąć macierz wymiaru $3\times k$, gdzie k (liczba kolumn) może być dowolna: $k=1, 2, \dots$ Mamy

$$\begin{array}{c|c}
 & k \text{ kolumn} \\
 & 0\ 0\ \dots\ 0 \\
 & 0\ 0\ \dots\ 0 \\
 & 0\ 0\ \dots\ 0 \\
\hline
a\ b\ c & 0\ 0\ \dots\ 0 \\
d\ e\ f & 0\ 0\ \dots\ 0
\end{array}$$

a więc $\mathbf{AO}=\mathbf{O}$, ale macierz $\mathbf{O}$ z lewej strony tej równości jest typu $3\times k$, a macierz $\mathbf{O}$ z prawej strony jest typu $2\times k$.

Iloczyn macierzy przez macierz, przy założeniu, że wszystkie działania poniżej użyte są wykonalne, ma *własność łączności*, tzn.

(9.7.8) $$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})=\mathbf{ABC},$$

oraz *własność rozdzielności* (zarówno względem dodawania jak i odejmowania), tzn.

(9.7.9) $$(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}\pm\mathbf{BC}, \qquad \mathbf{C}(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=\mathbf{CA}\pm\mathbf{CB}.$$

Weźmy macierz kwadratową $\mathbf{A}=[a_{ik}]$ $(i, k=1, 2, \dots, n)$; jeśli dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ik} (patrz § 9.1) jest A_{ik} $(i, k=1, 2, \dots, n)$ i zamiast każdego elementu macierzy $\mathbf{A}$ umieścimy jego dopełnienie algebraiczne A_{ik}, a następnie z powstałej macierzy utworzymy macierz przestawioną (transponowaną), to otrzymaną macierz nazywamy *macierzą dołączoną*. Krócej: *macierz dołączona* jest to przestawiona macierz dopełnień algebraicznych. Macierz dołączoną oznaczamy symbolem $\mathbf{A}^{\mathrm{D}}$, tzn.

$$\mathbf{A}^{\mathrm{D}}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierzą odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$ macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ nazywamy macierz, która spełnia równości

(9.7.10) $$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{I}, \qquad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I},$$

gdzie $\mathbf{I}$ oznacza macierz jednostkową odpowiedniego wymiaru.

Uwaga. Jak wiemy, odwrotnością różnej od zera liczby a nazywamy liczbę $1/a=a^{-1}$; spełnia ona warunek $a\cdot a^{-1}=1$. Widzimy, że macierz odwrotna spełnia podobną rolę.

Następujące twierdzenie podaje warunek wystarczający istnienia macierzy odwrotnej:

Jeżeli macierz kwadratowa $\mathbf{A}=[a_{ik}]$ *jest macierzą nieosobliwą, tzn.* $\det \mathbf{A}\neq 0$, *to istnieje do niej dokładnie jedna macierz odwrotna* $\mathbf{A}^{-1}$, *która jest równa macierzy dołączonej po-*

mnożonej przez odwrotność wyznacznika danej macierzy, tzn.

(9.7.11)
$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{A}\mathbf{A}^{\mathrm{D}}=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A} & \frac{A_{21}}{A} & \dots & \frac{A_{n1}}{A} \\ \frac{A_{12}}{A} & \frac{A_{22}}{A} & \dots & \frac{A_{n2}}{A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{A} & \frac{A_{2n}}{A} & \dots & \frac{A_{nn}}{A} \end{bmatrix}.$$

Natomiast *wyznacznik macierzy odwrotnej jest równy odwrotności wyznacznika macierzy danej*, tzn.

(9.7.12)
$$\det\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}.$$

ZADANIE 9.20. Wyznaczyć macierz odwrotną macierzy

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Obliczmy najpierw wartość wyznacznika macierzy $\mathbf{A}$, aby przekonać się czy macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$ istnieje. Otrzymujemy

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}=54+45+28-27-40-63=-3.$$

Ponieważ $\det\mathbf{A}=-3\neq 0$, więc macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą nieosobliwą, a więc macierz odwrotna istnieje.

Tworzymy więc macierz minorów $[M_{ik}]$ danej macierzy $\mathbf{A}$, wpisując na miejsce każdego elementu odpowiadający mu minor:

$$[M_{ik}]=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Stąd otrzymujemy macierz dopełnień algebraicznych $[A_{ik}]$, mnożąc wszystkie minory przez $(-1)^{i+k}$, gdzie i jest wskaźnikiem wiersza, a k jest wskaźnikiem kolumny. Otrzymujemy macierz

$$[A_{ij}]=\begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Transponując tę macierz otrzymujemy macierz dołączoną $\mathbf{A}^{\mathrm{D}}$ macierzy $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{D}}=[A_{ij}]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$ macierzy $\mathbf{A}$ otrzymujemy mnożąc macierz dołączoną przez odwrotność wyznacznika macierzy $\mathbf{A}$, tj. przez $-\frac{1}{3}$, czyli mnożąc każdy jej element przez $-\frac{1}{3}$. Ostatecznie więc

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{A}\mathbf{A}^{\mathrm{D}}=\begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jako ćwiczenie zaleca się czytelnikowi sprawdzenie iloczynu

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uwaga. Weźmy teraz pod uwagę zbiór wszystkich macierzy pewnego ustalonego wymiaru $m\times n$. W zbiorze tym określiliśmy operację dodawania za pomocą wzoru (9.7.1) oraz operację mnożenia przez liczbę za pomocą wzoru (9.7.3). Przy tak określonych działaniach zbiór macierzy jest *zbiorem liniowym*. Podamy ogólnie definicję *przestrzeni liniowej* (inna nazwa zbioru liniowego), która w nowoczesnej matematyce odgrywa coraz to większą rolę.

Przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych R nazywamy zbiór X, w którym określone są dwie operacje:

a) *dodawanie elementów* zbioru X,

b) *mnożenie elementu zbioru X przez liczbę rzeczywistą* w taki sposób, że są spełnione następujące aksjomaty:

1° $(a+b)+c=a+(b+c)$, czyli dodawanie jest łączne,

2° $a+b=b+a$, czyli dodawanie jest przemienne,

3° $(a+b=a+c)\Rightarrow(b=c)$, czyli zachodzi tzw. *prawo redukcji*,

4° $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$,

5° $\alpha(a+b)=\alpha a+\beta b$,

6° $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$,

7° $1\cdot a=a$;

przy zapisie tych siedmiu aksjomatów litery łacińskie oznaczają elementy przestrzeni liniowej X, a litery greckie – liczby rzeczywiste.

Nietrudno jest wyprowadzić następujące wnioski z podanych aksjomatów:

1. Jakiekolwiek weźmiemy dwa elementy przestrzeni liniowej a i b, to zawsze $0\cdot a = 0\cdot b$. Ten element przestrzeni liniowej X równy $0\cdot a$, gdzie a jest dowolnym elementem przestrzeni X, nazywamy *elementem zerowym* przestrzeni X (lub krótko: *zerem* przestrzeni X) i oznaczamy symbolem θ. Łatwo wykazać, że dla każdego elementu b przestrzeni X zachodzi równość $b+\theta=b$.

2. Jakikolwiek weźmiemy element a przestrzeni X, to mamy $a+(-1)a=\theta$. Element $(-1)a$ nazywamy *elementem przeciwnym* do elementu a i oznaczamy symbolem $-a$.

3. Równanie $a+x=b$, gdzie a i b oznaczają dane elementy przestrzeni X, natomiast x oznacza taki poszukiwany element przestrzeni X, dla którego zachodzi podana równość, ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie: $x=b+(-1)a$. Stąd wynika, że w przestrzeni liniowej można zawsze określić w sposób jednoznaczny operację odwrotną do operacji dodawania, którą nazywamy *operacją odejmowania*, a którą określamy w następujący sposób: $a-b=a+(-1)b$.

W analogiczny sposób jak przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych definiuje się *przestrzeń liniową nad ciałem liczb zespolonych*.

Czytelnik może sam łatwo udowodnić, że zbiór wszystkich macierzy ustalonego wymiaru $m\times n$ przy działaniach określonych wzorami (9.7.1) i (9.7.3) jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych.

Weźmy teraz z kolei pod uwagę zbiór wszystkich macierzy kwadratowych pewnego ustalonego stopnia n. W zbiorze tym oprócz działań dodawania elementów i mnożenia elementu przez liczbę możemy wykonywać działanie mnożenia elementów tego zbioru przy użyciu wzoru (9.7.4). Przy tak określonych działaniach zbiór wszystkich macierzy kwadratowych ustalonego stopnia n jest *pierścieniem liniowym*. Podajmy ogólnie definicję pierścienia liniowego.

Pierścieniem liniowym nad ciałem liczb rzeczywistych (*zespolonych*) nazywamy zbiór P, który jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych (zespolonych) i w którym jest określona dodatkowo

c) *operacja mnożenia* elementów zbioru P w ten sposób, że oprócz siedmiu aksjomatów przestrzeni liniowej są spełnione następujące dodatkowe aksjomaty:

8° $(ab)c=a(bc)$, czyli mnożenie elementów jest łączne,

9° $a(b+c)=ab+ac$, czyli mnożenie jest rozdzielne względem dodawania lewostronnie,

10° $(a+b)c=ac+bc$, czyli mnożenie jest rozdzielne względem dodawania prawostronnie.

Natomiast mnożenie elementów pierścienia jest na ogół nieprzemienne, tzn. na ogół jest $ab\neq ba$.

Jednością pierścienia nazywamy taki element pierścienia e, że dla dowolnego elementu pierścienia a zachodzi równość $ae=ea=a$. Pierścień liniowy może (ale nie musi) posiadać jedność.

Czytelnik sam udowodni, że zbiór wszystkich macierzy kwadratowych ustalonego stopnia n przy działaniach określonych za pomocą wzorów (9.7.1), (9.7.3) i (9.7.4) jest pierścieniem liniowym nad ciałem liczb zespolonych z jednością, którą jest macierz jednostkowa $\mathbf{I}_n$ (patrz str. 166).

§ 9.8. ZAPIS MACIERZOWY UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH

Wykorzystamy obecnie nasze wiadomości o macierzach do układów równań liniowych. Zauważmy, że układ n równań liniowych (jednorodnych albo niejednorodnych) z n niewiadomymi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ &\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n, \end{aligned} \tag{9.8.1}$$

może być zapisany w tzw. *postaci macierzowej*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}. \tag{9.8.2}$$

Oznaczając macierz współczynników przez $\mathbf{W}$, macierz kolumnową niewiadomych przez $\mathbf{X}$, a macierz kolumnową wyrazów wolnych przez $\mathbf{B}$, możemy zapis układu (9.8.1) lub równoważny mu zapis macierzowy (9.8.2) ująć krótko:

$$\mathbf{WX}=\mathbf{B}. \tag{9.8.3}$$

Pomnóżmy równanie (9.8.3) lewostronnie przez macierz $\mathbf{W}^{-1}$ (przy założeniu, że macierz $\mathbf{W}$ jest nieosobliwa, tzn. $\det \mathbf{W}\neq 0$), tzn. przez macierz odwrotną względem macierzy współczynników $\mathbf{W}$, obie strony tego równania macierzowego; otrzymujemy

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{WX}=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}. \tag{9.8.4}$$

Ale według (9.7.10) $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}=\mathbf{I}$, a według (9.7.6) $\mathbf{IX}=\mathbf{X}$, więc

$$\mathbf{X}=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}. \tag{9.8.5}$$

Jest to rozwiązanie układu (9.8.1) (przy założeniu, że wyznacznik współczynników $\det \mathbf{W}\neq 0$) w postaci macierzowej.

Otrzymane rozwiązanie (9.8.5) jest oczywiście identyczne z rozwiązaniem za pomocą wzorów Cramera (9.4.3), ale w znacznie prostszej postaci.

§ 9.9. PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE

Powróćmy do układu n równań liniowych (9.8.1) z n niewiadomymi z tą różnicą, że prawe strony tych równań będziemy traktowali jako zmienne, dlatego oznaczmy je przez $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=y_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=y_2,\\ &\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=y_n. \end{aligned} \tag{9.9.1}$$

Gdy zmieniać się będą wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wówczas w zależności od nich zmieniać się będą wartości $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Przekształcenie postaci (9.9.1) wyrażające zmienne $y_1, y_2, \ldots, y_n$ za pomocą zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy *przekształceniem liniowym* punktów o współrzędnych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (tzw. *przestrzeni n-wymiarowej*) w punkty o współrzędnych $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ (tejże przestrzeni).

Przekształcenie to da się zapisać w postaci jednej równości macierzowej

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

albo jeszcze krócej:

$$\mathbf{WX} = \mathbf{Y},$$

gdzie $\mathbf{W}$ jest macierzą współczynników, $\mathbf{X}$ jest macierzą kolumnową zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a $\mathbf{Y}$ – macierzą kolumnową zmiennych $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Załóżmy teraz, że przekształcenie liniowe (9.9.1) jest nieosobliwe, tzn. że macierz $\mathbf{W}$ tego przekształcenia jest nieosobliwa, i pomnóżmy lewostronnie obie strony ostatniej równości macierzowej przez macierz odwrotną $\mathbf{W}^{-1}$; wówczas otrzymamy po zastosowaniu własności (9.7.10) i (9.7.6):

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Y}.$$

Ponieważ macierz $\mathbf{W}^{-1}$ jest wymiaru $n \times n$, a macierz $\mathbf{Y}$ wymiaru $n \times 1$, więc prawa strona jest macierzą wymiaru $n \times 1$, tzn. kolumnową. Ostatnia równość po zastosowaniu wzoru (9.7.11) i pomnożeniu macierzy przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W_{11}}{W} y_1 + \frac{W_{21}}{W} y_2 + \ldots + \frac{W_{n1}}{W} y_n \\ \frac{W_{12}}{W} y_1 + \frac{W_{22}}{W} y_2 + \ldots + \frac{W_{n2}}{W} y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{W_{1n}}{W} y_1 + \frac{W_{2n}}{W} y_2 + \ldots + \frac{W_{nn}}{W} y_n \end{bmatrix}.$$

Ale z równości dwóch macierzy wynika n następujących równości:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{W_{11}}{W} y_1 + \frac{W_{21}}{W} y_2 + \ldots + \frac{W_{n1}}{W} y_n, \\ x_2 &= \frac{W_{12}}{W} y_1 + \frac{W_{22}}{W} y_2 + \ldots + \frac{W_{n2}}{W} y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \frac{W_{1n}}{W} y_1 + \frac{W_{2n}}{W} y_2 + \ldots + \frac{W_{nn}}{W} y_n. \end{aligned} \tag{9.9.2}$$

Przekształcenie to nazywamy *przekształceniem liniowym odwrotnym* względem przekształcenia liniowego (9.9.1).

Z postaci (9.9.2) wnioskujemy, że macierz przekształcenia liniowego odwrotnego jest macierzą odwrotną względem macierzy danego przekształcenia liniowego.

9.10. MACIERZ ORTOGONALNA

Zacznijmy od przykładu. Z geometrii analitycznej płaskiej wiemy, że współrzędne punktu (x, y) po obróceniu go dookoła początku układu współrzędnych o kąt α w dodatnim zwrocie zmienią się na (x_1, y_1), przy czym

$$x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$

$$y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Jest to przekształcenie liniowe punktów płaszczyzny (x, y) na punkty tejże płaszczyzny o współrzędnych (x_1, y_1) (por. § 9.9). Macierz tego przekształcenia liniowego

(9.10.1)
$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

jest macierzą nieosobliwą, gdyż

$$\det\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0.$$

Tworząc macierz dopełnień algebraicznych macierzy $\mathbf{W}$, a następnie z niej macierz przestawioną, otrzymujemy macierz dołączoną $\mathbf{W}^{\mathrm{D}}$, a ponieważ mnożenie jej przez $1/\det\mathbf{W} = 1$ nie dokona w niej zmian, więc macierzą odwrotną $\mathbf{W}^{-1}$ będzie macierz

(9.10.2)
$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Ale macierz ta jest jednocześnie macierzą przestawioną (transponowaną) macierzy $\mathbf{W}$:

(9.10.3)
$$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}.$$

Jest to prosty przykład tzw. *macierzy ortogonalnej.*

Przejdziemy do rozważań ogólnych. Rozpatrzmy macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

macierz $\mathbf{A}$ nazywamy *macierzą ortogonalną,* jeśli odwrotna do niej macierz $\mathbf{A}^{-1}$ równa się macierzy przestawionej $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, tzn. gdy

(9.10.4)
$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Gdy macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą ortogonalną, wówczas

(9.10.5) $$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{I}.$$

Z tych równości wynikają następujące własności macierzy ortogonalnej:

(9.10.6) *Suma kwadratów wszystkich elementów dowolnego wiersza oraz dowolnej kolumny macierzy ortogonalnej równa się* 1, *tzn.*

$$a_{i1}^2+a_{i2}^2+\ldots+a_{in}^2=1 \quad dla \quad i=1,2,\ldots,n$$

oraz

$$a_{1k}^2+a_{2k}^2+\ldots+a_{nk}^2=1 \quad dla \quad k=1,2,\ldots,n.$$

(9.10.7) *Suma iloczynów wszystkich odpowiednich elementów dwóch różnych wierszy oraz dwóch różnych kolumn macierzy ortogonalnej równa się zeru, tzn.*

$$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\ldots+a_{in}a_{jn}=0 \quad dla \quad i\neq j,\ i,j=1,2,\ldots,n$$

oraz

$$a_{1k}a_{1l}+a_{2k}a_{2l}+\ldots+a_{nk}a_{nl}=0 \quad dla \quad k\neq l,\ k,l=1,2,\ldots,n.$$

Czytelnik zechce sprawdzić te własności na przykładzie macierzy ortogonalnej $\mathbf{W}$ określonej wzorem (9.10.1).

Na koniec zauważmy, że z równości (9.10.5) wynika równość dotycząca wyznaczników:

$$\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\det\mathbf{I},$$

ale $\det\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\det\mathbf{A}$, $\det\mathbf{I}=1$, więc $(\det\mathbf{A})^2=1$, skąd

(9.10.8) $$\det\mathbf{A}=\pm 1.$$

Wykazaliśmy więc, że *wyznacznik macierzy ortogonalnej może być tylko równy* $+1$ *albo* -1.

§ 9.11. RÓWNANIE CHARAKTERYSTYCZNE (WIEKOWE) MACIERZY

Z danej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ stopnia n o elementach a_{ik} ($i, k=1, 2, \ldots, n$) utwórzmy nową macierz, odejmując zmienną λ od wszystkich wyrazów położonych na przekątnej głównej, a pozostałe wyrazy pozostawiając bez zmiany; otrzymujemy nową macierz. Przyrównując do zera wyznacznik tej macierzy

(9.11.1) $$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

otrzymujemy równanie stopnia n względem λ, które nazywamy *równaniem charakterystycznym* (lub *wiekowym*) *macierzy* $\mathbf{A}$. Pierwiastki tego równania, różne od zera dla macierzy nieosobliwej, nazywamy *wartościami własnymi macierzy* $\mathbf{A}$.

ZADANIE 9.21. Znaleźć wartości własne macierzy

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Tworzymy równanie charakterystyczne tej macierzy

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

skąd

$$(2-\lambda)(5-\lambda)-1=0, \quad \text{czyli} \quad \lambda^2-7\lambda+9=0.$$

Ponieważ $\Delta=49-36=13>0$, więc równanie charakterystyczne ma dwa pierwiastki rzeczywiste

$$\lambda_1=\tfrac{1}{2}(7-\sqrt{13}), \qquad \lambda_2=\tfrac{1}{2}(7+\sqrt{13}).$$

Są to wartości własne macierzy **A**.

ZADANIE 9.22. Sprawdzić, że macierz **A** z poprzedniego zadania jest pierwiastkiem macierzowym swojego równania charakterystycznego.

Rozwiązanie. Mamy wykazać, że spełnione jest równanie macierzowe

$$\mathbf{A}^2-7\mathbf{A}+9\mathbf{I}=\mathbf{O},$$

gdzie **I** oznacza macierz jednostkową, a **O** — macierz zerową. Wykonajmy działania na macierzach po lewej stronie ostatniego wyrażenia:

$$\mathbf{A}^2-7\mathbf{A}+9\mathbf{I}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}-7\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}+9\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot5\\ 1\cdot2+5\cdot1 & 1\cdot1+5\cdot5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}14 & 7\\ 7 & 35\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{O},$$

zgodnie z treścią zadania. Nie jest to bynajmniej przypadek, zachodzi bowiem następujące *twierdzenie Cayley-Hamiltona*:

(9.11.2) *Dowolna macierz kwadratowa jest pierwiastkiem swego równania charakterystycznego.*

Zadania

Obliczyć wyznaczniki (zad. 9.23 - 9.28):

9.23. $\begin{vmatrix}1 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 0 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 2 & 7\\ 2 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$. **9.24.** $\begin{vmatrix}0 & 5 & 0 & 2\\ 8 & 3 & 4 & 5\\ 7 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 4 & 0 & 1\end{vmatrix}$. **9.25.** $\begin{vmatrix}0 & a & b & c\\ 1 & x & 0 & 0\\ 1 & 0 & y & 0\\ 1 & 0 & 0 & z\end{vmatrix}$.

9.26. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **9.27.** $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **9.28.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Nie rozwijając wyznaczników wykazać, że przy dowolnych wartościach liczbowych $a, b, c, m, n, p, r, s, t$ zachodzą równości (zad. 9.29 - 9.30):

9.29. $\begin{vmatrix} a-b & m-n & r-s \\ b-c & n-p & s-t \\ c-a & p-m & t-r \end{vmatrix} = 0.$ **9.30.** $\begin{vmatrix} a & b+c & m \\ b & c+a & m \\ c & a+b & m \end{vmatrix} = 0.$

Obliczyć wyznaczniki (zad. 9.31 - 9.34):

9.31. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. **9.32.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

9.33. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$.

9.34. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$.

Rozwiązać następujące układy równań (zad. 9.35 - 9.38):

9.35. $2x-3y=3,\ x+2y=5.$ **9.36.** $6x-4y=5,\ 9x-6y=2.$

9.37. $3x+5y=5,\ x-2y=9.$ **9.38.** $2x-4y=10,\ 5x-10y=25.$

Rozwiązać i przedyskutować w zależności od parametru k następujące układy równań (zad. 9.39 - 9.40):

9.39. $(k-2)x+(2-k)y=3k-6,\ (2k^2-8)x-(3k-6)y=10-5k.$

9.40. $kx+4y=2k,\ 9x+ky=18.$

Rozwiązać następujące układy równań (zad 9.41 - 9.44):

9.41. $x+2y+3z=14$, $3x+y+2z=11$, $2x+3y+z=11$.

9.42. $2x-y+z=1$, $3x+y-2z=0$, $x-3y-z=2$.

9.43. $5x-3y+2z=3$, $4x+5y-3z=21$, $5x-2y-3z=-12$.

9.44. $3x+12y+5z+43=0$, $5x-3y-10z+76=0$, $4x-17y+2z-23=0$.

Rozwiązać następujące równania jednorodne (zad. 9.45 - 9.46):

9.45. $4x-3y=0$

9.46. $2x+5y-4z=0$.

Rozwiązać i przedyskutować w zależności od parametru k równania jednorodne (zad. 9.47 - 9.48):

9.47. $(k-2)x+(12-3k^2)y=0$.

9.48. $(k-5)x-3y=0$.

Rozwiązać następujące układy równań jednorodnych (zad. 9.49 - 9.56):

9.49. $4x-6y=0$, $6x-9y=0$.

9.50. $2x+3y=0$, $3x-5y=0$.

9.51. $kx+9y=0$, $4x+ky=0$.

9.52. $2x-ky=0$, $kx+4y=0$.

9.53. $2x-12y+6z=0$, $5x-30y+15z=0$.

9.54. $4x-6y+10z=0$, $6x-9y-15z=0$.

9.55. $2x-4y=0$, $5x-10y=0$, $3x+5y=0$.

9.56. $4x-6y=0$, $6x-9y=0$, $2x-3y=0$.

Rozwiązać następujące układy równań (zad. 9.57 - 9.66):

9.57. $2x+5y-8z=8$, $4x+3y-9z=9$, $2x+3y-5z=7$, $x+8y-7z=12$.

9.58. $$\begin{cases} 4x-6y+2z+3t=2, \\ 2x-3y+5z+75t=1, \\ 2x-3y-11z-15t=1. \end{cases}$$

9.59. $$\begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2, \\ 7x-4y+z+3t=5, \\ 5x+7y-4z-6t=3. \end{cases}$$

9.60. $$\begin{cases} x+y+3z-2t+3u=1, \\ 2x+2y+4z-t+3u=2, \\ 3x+3y+5z-2t+3u=1, \\ 2x+2y+8z-3t+9u=2. \end{cases}$$

9.61. $$\begin{cases} x+2y+3z-2t+u=4, \\ 3x+6y+5z-4t+3u=5, \\ x+2y+7z-4t+u=11, \\ 2x+4y+2z-3t+3u=6. \end{cases}$$

9.62. $$\begin{cases} 3x+2y+2z+2t=2, \\ 2x+3y+2z+5t=3, \\ 9x+y+4z-5t=1, \\ 2x+2y+3z+4t=5, \\ 7x+y+6z-t=7. \end{cases}$$

9.63. $$\begin{cases} 8x+6y+5z+2t=21, \\ 3x+3y+2z+t=10, \\ 4x+2y+3z+t=8, \\ 3x+5y+z+t=15, \\ 7x+4y+5z+2t=18. \end{cases}$$

9.64. $\begin{cases} 2x+3y+z+2t=4, \\ 4x+3y+z+t=5, \\ 5x+11y+3z+2t=2, \\ 2x+5y+z+t=1, \\ x-7y-z+2t=7. \end{cases}$

9.65. $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t-2=0, \\ 6x-4y+4z+3t-3=0, \\ 9x-6y+3z+2t-4=0. \end{cases}$

9.66. $\begin{cases} 6x+4y+5z+2t+3u=1, \\ 3x+2y+4z+t+2u=3, \\ 3x+2y-2z+t \quad =-7, \\ 9x+6y+z+3t+2u=2. \end{cases}$

Przedyskutować w zależności od parametru k rozwiązalność następujących równań (zad. 9.67 - 9.68):

9.67. $(k-1)x+(1-k^2)y=k^3-1$.

9.68. $(2-k)x-(k^2-4)y=8$.

Obliczyć iloczyny macierzy (zad. 9.69 - 9.73):

9.69. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

9.70. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$.

9.71. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}$.

9.72. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}$.

9.73. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}$.

9.74. Czy iloczyn dwóch macierzy niekwadratowych może być macierzą kwadratową?

9.75. Jakie warunki powinny być spełnione, aby iloczyn dwóch macierzy był tego samego wymiaru co a) jeden z czynników, b) oba czynniki?

Obliczyć iloczyn macierzy (zad. 9.76 - 9.80):

9.76. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{bmatrix}$.

9.77. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

9.78. $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 \end{bmatrix}$.

9.79. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

9.80. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

9.81. Czy każde dwie macierze jednostkowe są równe?

9.82. Czy przez pomnożenie macierzy przez macierz jednostkową zmienia się wymiar macierzy?

9.83. Czy z równości macierzowej $\mathbf{AI}=\mathbf{IA}$ wynika, że macierze jednostkowe występujące po lewej stronie i po prawej stronie równości są równe?

9.84. Obliczyć iloczyn **BA** macierzy z zadania 9.18. Czy otrzymany iloczyn jest macierzą zerową? Czy więc z równości macierzowej $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$, przy założeniu, że iloczyn **BA** jest wykonalny, wynika równość $\mathbf{BA}=\mathbf{O}$?

9.85. Czy z równości macierzowej $\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}_L=\mathbf{O}_P$ wynika, że $\mathbf{O}_L=\mathbf{O}_P$, gdzie $\mathbf{O}_L$ oznacza macierz zerową z lewej strony równości, a $\mathbf{O}_P$ oznacza macierz zerową z prawej strony równości.

9.86. Czy w iloczynie macierzowym $\mathbf{OA}=\mathbf{O}$ obie macierze zerowe mogą być tego samego wymiaru?

9.87. Co otrzymamy, jeśli przestawimy macierz przestawioną? Czemu się równa $(\mathbf{A}^T)^T$?

9.88. Co można powiedzieć o wyznacznikach danej macierzy kwadratowej **A** i macierzy przestawionej $\mathbf{A}^T$?

9.89. Jaka jest macierz **A**, jeśli $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$?

9.90. Czemu się równa przestawiona macierz jednostkowa $\mathbf{I}^T$?

9.91. Jeśli mnożenie macierzy **A** i **B** jest wykonalne, to czy wykonalne jest również mnożenie $\mathbf{A}^T$ przez $\mathbf{B}^T$? Czy wykonalne jest mnożenie $\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T$?

9.92. Co stanie się z wyznacznikiem, jeśli zamiast elementów pierwszego wiersza wpiszemy elementy tego wiersza pomnożone przez 3 mniej elementy drugiego wiersza pomnożone przez 2?

Obliczyć potęgi macierzy (zad. 9.93 - 9.94):

9.93. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^3.$ **9.94.** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n.$

9.95. Obliczyć potęgę macierzy diagonalnej (zera oznaczają, że wszystkie elementy poza główną przekątną są równe 0):

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k.$$

Obliczyć macierze odwrotne macierzy (zad. 9.96 - 9.100):

9.96. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$ **9.97.** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$

9.98. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$ **9.99.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$

9.100. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązać równania macierzowe (zad. 9.101 - 9.103):

9.101. $\mathbf{X}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$.

9.102. $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.103. $\mathbf{X}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$.

Rozdział X

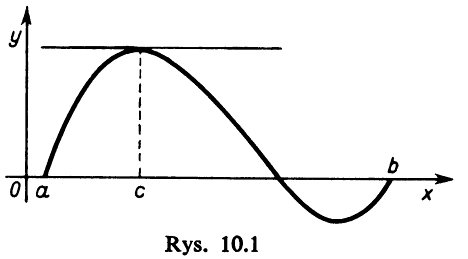
BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

§ 10.1. TWIERDZENIA ROLLE'A I LAGRANGE'A

(10.1.1) TWIERDZENIE ROLLE'A. *Jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest ciągła w przedziale* $a \leqslant x \leqslant b$ *i jest różniczkowalna wewnątrz tego przedziału, przy czym* $f(a)=0$, $f(b)=0$, *to istnieje co najmniej jeden punkt wewnętrzny tego przedziału* $x=c$ *taki, że pochodna w tym punkcie* $f'(c)$ *jest równa zeru*:

$$f'(c)=0 \quad (a<c<b).$$

Geometrycznie oznacza to, że istnieje co najmniej jeden punkt wewnętrzny taki, że styczna w tym punkcie krzywej jest równoległa do osi Ox (rys. 10.1).



Rys. 10.1

(10.1.2) TWIERDZENIE LAGRANGE'A O WARTOŚCI ŚREDNIEJ (O PRZYROSTACH SKOŃCZONYCH). *Jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest ciągła w przedziale* $a \leqslant x \leqslant b$ *i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału, to istnieje co najmniej jeden punkt* $x=c$ *wewnątrz tego przedziału taki, że*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad (a<c<b).$$

Geometrycznie oznacza to, że na łuku AB, który jest wykresem linii $y=f(x)$, znajduje się co najmniej jeden punkt C, w którym styczna jest równoległa do cięciwy łączącej końce A i B tego łuku (rys. 10.2 na str. 186).

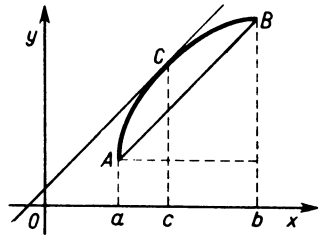
Zadania

10.1. Zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji $y=x^2-3x-4$ w odpowiednim przedziale. Sporządzić szkic.

10.2. Funkcja $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ ma dwa miejsca zerowe: $x=-1$ i $x=1$. Czy można zastosować twierdzenie Rolle'a do tej funkcji w przedziale $-1 \leqslant x \leqslant 1$? Wyjaśnić graficznie.

10.3. Funkcja $f(x)=|x|-2$ ma dwa miejsca zerowe: $x=-2$ i $x=2$. Czy można zastosować twierdzenie Rolle'a do tej funkcji w przedziale $-2 \leqslant x \leqslant 2$? Sporządzić wykres i wyjaśnić.

10.4. Zastosować twierdzenie o wartości średniej do funkcji $f(x)=\sqrt{x}$, przyjmując $a=1$, $b=9$ i znaleźć wartość $x=c$, o której mowa w twierdzeniu. Sporządzić szkic.



Rys. 10.2

10.5. Czy można zastosować twierdzenie Lagrange'a, do funkcji $f(x)=1/x$ w przedziale $-1 \leqslant x \leqslant 4$? Podać interpretację geometryczną.

10.6. Zastosować twierdzenie Lagrange'a do funkcji $f(x)=x^2$ w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ i znaleźć wartość $x=c$, o której mowa w twierdzeniu.

10.7. Twierdzenie Lagrange'a może być napisane w postaci

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h), \quad \text{gdzie} \quad 0<\theta<1.$$

Zastosować tę postać do funkcji a) $f(x)=x^2$, b) $f(x)=x^3$ i wykazać, że w przypadku: a) θ nie zależy ani od wartości x, ani od wartości h, b) θ zależy zarówno od x, jak i od h.

§ 10.2. BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI. EKSTREMA FUNKCJI

Badanie przebiegu zmienności funkcji opiera się na następujących twierdzeniach podstawowych (będących wnioskami z twierdzenia Lagrange'a):

(10.2.1) *Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale dodatnia, to funkcja jest w tym przedziale rosnąca.*

(10.2.2) *Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale ujemna, to funkcja jest w tym przedziale malejąca.*

(10.2.3) *Jeżeli pochodna funkcji jest w każdym punkcie pewnego przedziału równa zeru, to funkcja ma w tym przedziale wartość stałą.*

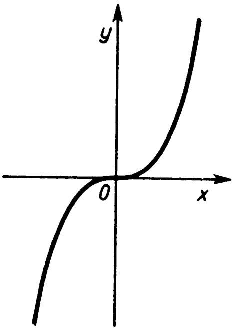
Mówimy, że funkcja $y=f(x)$ ma w punkcie x_0 *maksimum lokalne* (*minimum lokalne*), jeżeli istnieje takie otoczenie punktu x_0, że dla wszystkich punktów tego otoczenia zachodzi nierówność

$$f(x)<f(x_0) \quad (f(x)>f(x_0)).$$

Maksima i minima funkcji noszą wspólną nazwę *ekstremów funkcji.*

Wyznaczenie ekstremum funkcji (maksimum lub minimum) opiera się na następujących twierdzeniach:

(10.2.4) TWIERDZENIE FERMATA. *Jeżeli funkcja różniczkowalna w przedziale osiąga w pewnym punkcie wewnętrznym $x=x_0$ tego przedziału ekstremum lokalne, to pochodna w tym punkcie $f'(x_0)$ równa się zeru.*



Rys. 10.3

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Na przykład funkcja $y=x^3$ ma pochodną $y'=3x^2$, która jest równa zeru dla $x=0$; w punkcie tym funkcja nie posiada ekstremum (rys 10.3).

(10.2.5) *Jeżeli pierwsza pochodna $f'(x)$ dla $x<x_0$ jest ujemna (dodatnia), dla $x=x_0$ jest równa zeru, a dla $x>x_0$ jest dodatnia (ujemna)*, co wyrażamy często krócej, mówiąc: *pochodna przy przejściu zmiennej x przez punkt x_0 zmienia znak z ujemnego na dodatni (z dodatniego na ujemny), to funkcja $y=f(x)$ osiąga ekstremum (minimum w pierwszym, a maksimum w drugim przypadku).*

§ 10.3. PUNKTY PRZEGIĘCIA

Punktem przegięcia wykresu funkcji $y=f(x)$, gdy funkcja $f(x)$ ma drugą pochodną ciągłą, nazywamy taki jej punkt, w którym styczna do krzywej przechodzi z jednej strony krzywej na drugą.

Na przykład początek układu współrzędnych jest punktem przegięcia krzywej $y=x^3$; oś Ox jest styczna do krzywej w punkcie (0, 0) i jednocześnie przecina krzywą w punkcie styczności (rys. 10.3).

Punkty przegięcia wyznaczamy za pomocą następujących twierdzeń:

(10.3.1) *Jeżeli funkcja $y=f(x)$ ma drugą pochodną ciągłą, to w punktach przegięcia wykresu funkcji druga pochodna $f''(x)$ jest równa zeru.*

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Na przykład druga pochodna dla funkcji $y=x^4$ jest równa zeru dla $x=0$, a wykres funkcji nie ma jednak punktu przegięcia (ma w tym punkcie minimum).

(10.3.2) *Jeżeli druga pochodna $f''(x)$ dla $x<x_0$ jest ujemna (dodatnia), dla $x=x_0$ jest równa zeru, a dla $x>x_0$ jest dodatnia (ujemna)*, co wyrażamy krócej, mówiąc: *druga pochodna przy przejściu przez punkt x_0 zmienia znak z ujemnego na dodatni (z dodatniego na ujemny), to wykres funkcji $y=f(x)$ ma punkt przegięcia w punkcie x_0.*

§ 10.4. WYPUKŁOŚĆ I WKLĘSŁOŚĆ FUNKCJI

Niech będą dane dwie liczby $x_1 < x_2$. *Wypukłą kombinacją* (por. str. 149) tych liczb nazywamy każdą liczbę postaci

(10.4.1) $$x_a = ax_1 + (1-a)x_2, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leqslant a \leqslant 1 .$$

Czytelnik łatwo udowodni, że każda liczba postaci (10.4.1) spełnia nierówność

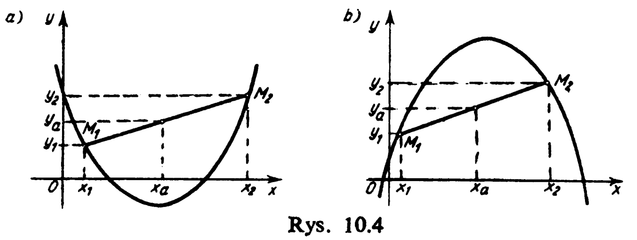
(10.4.2) $$x_1 \leqslant x_a \leqslant x_2$$

to znaczy, że każda wypukła kombinacja dwóch liczb leży na odcinku, którego końcami są te liczby.

Mówimy, że funkcja $f(x)$ określona w przedziale $\langle b, c\rangle$ jest *wypukła* w tym przedziale, jeżeli dla każdej liczby x_a postaci (10.4.1) przy dowolnych x_1 i x_2 z przedziału $\langle b, c\rangle$ zachodzi nierówność

(10.4.3) $$f(x_a) \leqslant y_a, \quad \text{gdzie} \quad y_a = af(x_1) + (1-a)f(x_2).$$

Na podstawie geometrii analitycznej wiemy, że punkt (x_a, y_a), gdzie x_a określone wzorem (10.4.1), a y_a wzorem (10.4.3), leży na odcinku, którego końcami są punkty o współrzędnych $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$. Warunek (10.4.3) wypukłości funkcji $f(x)$ oznacza więc geometrycznie, że łuk wykresu funkcji $y=f(x)$ o końcach M_1 i M_2 znajduje się całkowicie poniżej cięciwy M_1M_2, jakiekolwiek obierzemy punkty M_1 i M_2 wykresu funkcji wypukłej (rys. 10.4a).



Rys. 10.4

Zachodzą następujące twierdzenia:

(10.4.4) *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w przedziale $\langle b, c\rangle$ różniczkowalna, a jej pochodna jest w tym przedziale funkcją rosnącą, to funkcja $f(x)$ jest w przedziale $\langle b, c\rangle$ funkcją wypukłą.*

(10.4.5) *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w przedziale $\langle b, c\rangle$ dwukrotnie różniczkowalna, a jej druga pochodna przyjmuje w tym przedziale stale wartości dodatnie, to funkcja $f(x)$ jest w przedziale $\langle b, c\rangle$ funkcją wypukłą.*

Aby udowodnić (10.4.4) wystarczy zauważyć, że nierówność (10.4.3) jest równoważna nierówności

(10.4.6) $$\frac{f(x_a)-f(x_1)}{x_a - x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_a)}{x_2 - x_a},$$

która, jeżeli do obu stron zastosujemy wzór Lagrange'a, wynika z założenia, że pochodna $f'(x)$ jest funkcją rosnącą.

Twierdzenie (10.4.5) wynika z twierdzenia (10.4.4), ponieważ na podstawie wniosku z twierdzenia Lagrange'a, jeżeli druga pochodna $f''(x)$ jest w pewnym przedziale stale dodatnia, to pierwsza pochodna $f'(x)$ jest w tym przedziale funkcją rosnącą.

Mówimy, że funkcja $f(x)$ określona w przedziale $\langle b, c\rangle$ jest *wklęsła* w tym przedziale, jeżeli dla każdej liczby x_a postaci (10.4.1) przy dowolnych x_1 i x_2 z przedziału $\langle c, d\rangle$ zachodzi nierówność

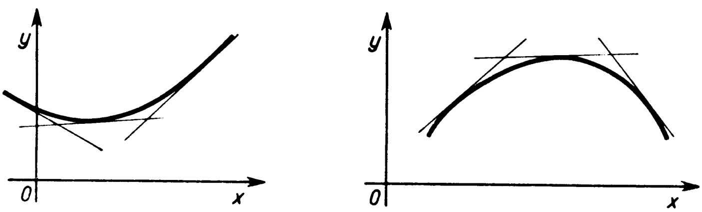
(10.4.7) $$f(x_a) \geqslant y_a, \quad \text{gdzie} \quad y_a = af(x_1) + (1-a)f(x_2).$$

Jeżeli funkcja jest wklęsła, to łuk wykresu funkcji znajduje się zawsze ponad cięciwą, łączącą końce łuku (rys. 10.4b).

Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w przedziale $\langle c, d\rangle$ pierwszą pochodną malejącą lub drugą pochodną ujemną, to jest w tym przedziale funkcją wklęsłą.

Można wykazać, że *jeżeli funkcja $f(x)$ jest w przedziale $\langle b, c\rangle$ wypukła (wklęsła) i dwukrotnie różniczkowalna, to w każdym punkcie wykresu funkcji styczna do wykresu znajduje się pod (nad) wykresem* (patrz rys. 10.5).

Przy podanych definicjach wypukłości i wklęsłości kształty wykresu odpowiadają naszemu wyobrażeniu wypukłości i wklęsłości, jeżeli patrzymy na wykres z kierunku, odpowiadającego ujemnemu zwrotowi osi rzędnych.



Rys. 10.5

ZADANIE 10.8. Zbadać przebieg zmienności trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$.

Rozwiązanie. Obliczmy pochodne $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$. Widzimy, że $y' = 0$, gdy $x = -b/2a$. Wtedy mamy

$$y = a\frac{b^2}{4a^2} - b\frac{b}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a},$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$ (wyróżnik trójmianu kwadratowego).

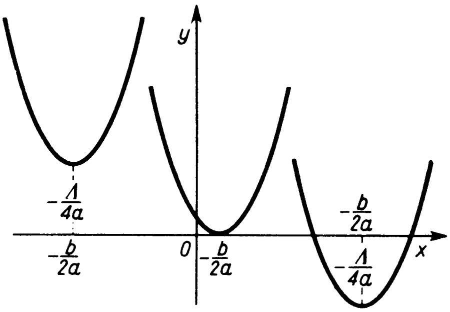
Pochodna y'' ma natomiast stały znak — taki, jak znak współczynnika a. Rozróżniamy więc dwa przypadki:

Przypadek 1: $a > 0$. Wówczas tabelka przebiegu zmienności trójmianu ma postać

x	$-\infty$	...	$-\dfrac{b}{2a}$	...	$+\infty$
y''	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Krzywa jest wszędzie wypukła (bo $y''>0$) i osiąga minimum przy $x=-b/2a$, mianowicie $y_{\min}=-\Delta/4a$. Jeżeli $\Delta<0$, to minimum jest dodatnie i (jak widać z tabelki) krzywa nie przecina osi Ox. Jeżeli $\Delta>0$, minimum jest ujemne i krzywa przecina oś Ox w dwóch punktach. Wreszcie, jeżeli $\Delta=0$, krzywa jest styczna do osi Ox w punkcie $x=-b/2a$.

Odpowiednie wykresy przedstawiają się, jak na rysunku 10.6. Zauważmy, że we wszystkich trzech przypadkach wierzchołek krzywej (najniżej położony punkt krzywej) ma współrzędne $(-b/2a, -\Delta/4a)$.



Rys. 10.6

Zauważmy jeszcze, że trójmian rozpatrywany można przedstawić w postaci

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]. \tag{10.4.8}$$

Jest to tzw. *postać kanoniczna trójmianu kwadratowego.* Wynika z niej symetria krzywej względem prostej $x=-b/2a$, gdyż dla wartości $x=-b/2a+k$ i $x=-b/2a-k$ rzędne y są równe.

Przypadek 2: $a<0$. Wówczas tabelka przebiegu zmienności trójmianu ma postać

x	$-\infty$	...	$-\frac{b}{2a}$	...	$+\infty$
y''	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	$-\infty$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

Krzywa jest wklęsła ($y''<0$) i osiąga maksimum dla $x=-b/2a$, mianowicie $y_{\max}=-\Delta/4a$. Mamy tutaj, podobnie jak poprzednio, trzy możliwości w zależności od znaku wyróżnika Δ (rys. 10.7).

Wierzchołek (tutaj najwyższy punkt krzywej) ma współrzędne $(-b/2a, -\Delta/4a)$ i krzywa jest symetryczna względem prostej $x=-b/2a$.

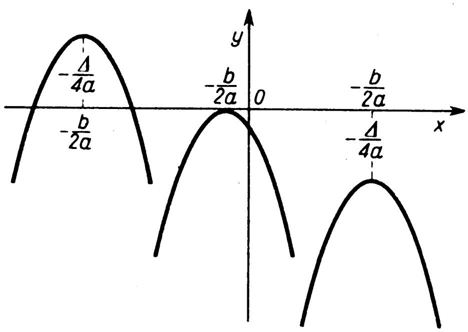
ZADANIE 10.9. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y=x^3+3x^2-9x-2. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla wszystkich wartości x. Obliczmy pochodną $y'=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)$. Szukamy miejsc zerowych pochodnej rozwiązując równanie

$$x^2+2x-3=0.$$

Pierwiastkami tego równania są $x=-3$ oraz $x=1$. Otrzymujemy w ten sposób wszystkie wartości x, przy których funkcja może osiągnąć ekstremum.



Rys. 10.7

Zbadajmy znaki pochodnej. Pochodna y' jest trójmianem kwadratowym; przy wartościach x zawartych poza pierwiastkami, tzn. dla $x<-3$ albo $x>1$, pochodna y' ma znak dodatni (zgodny ze znakiem współczynnika przy x^2), a między pierwiastkami, tzn. dla $-3<x<1$, pochodna y' ma znak ujemny.

Jeżeli oznaczymy wyrażenie stojące po prawej stronie równości (1) przez $f(x)$, to

$$f(-3)=-27+27+27-2=25, \quad f(1)=1+3-9-2=-7.$$

Chcąc znaleźć ewentualne punkty przegięcia, szukamy miejsc zerowych drugiej pochodnej

$$y''=6x+6=6(x+1).$$

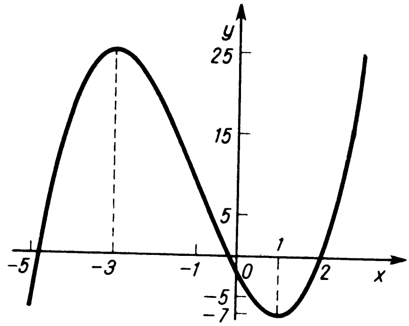
Widzimy, że $y''=0$, gdy $x=-1$. W punkcie $x=-1$ druga pochodna zmienia znak, a więc krzywa $y=f(x)$ ma punkt przegięcia. Dla $x<-1$ druga pochodna jest ujemna, a więc krzywa jest wklęsła; dla $x>-1$ druga pochodna jest dodatnia, a więc krzywa jest wypukła.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	...	-3	...	-1	...	1	...	$+\infty$
y''	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	25	$\searrow$	9	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Wykreślamy krzywą $y=x^3+3x^2-9x-2$ (rys. 10.8, na rysunku tym na osi Oy przyjęto skalę mniejszą). Jest to parabola stopnia trzeciego.

Uwaga. Z wykresu możemy odczytać ilość pierwiastków równania $f(x)=0$. Widzimy, że równanie to ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 spełniające nierówności $x_1<-3$, $-3<x_2<1$, $x_3>1$.



Rys. 10.8

Pierwiastków całkowitych wielomianu $f(x)$ szukać należy wśród podzielników wyrazu wolnego -2. Znajdziemy pierwiastek $x=2$, bo istotnie $f(2)=0$. Stosujemy twierdzenie Bézout (por. str. 139).

Dzielimy wobec tego wielomian $f(x)$ przez $x-2$ i otrzymujemy

$$x^3+3x^2-9x-2=(x-2)(x^2+5x+1).$$

Pozostałe pierwiastki obliczymy z równania $x^2+5x+1=0$. Stąd

$$x_1=\frac{-5-\sqrt{21}}{2}\approx -4{,}8, \qquad x_2=\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\approx -0{,}2.$$

Ostatecznie możemy badaną funkcję napisać w postaci

$$y=(x-2)(x-x_1)(x-x_2).$$

ZADANIE 10.10. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y=x^3(x-1)(x-2)^2.$$

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną, stosując wzór na pochodną iloczynu trzech czynników:

(10.4.9) $$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

Otrzymujemy więc

$$y'=3x^2(x-1)(x-2)^2+x^3(x-2)^2+2x^3(x-1)(x-2)=$$
$$=x^2(x-2)\big(3(x-1)(x-2)+x(x-2)+2x(x-1)\big).$$

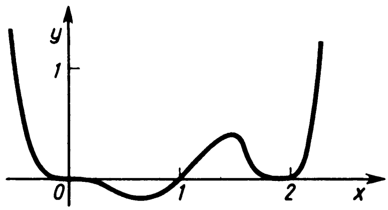
Po redukcji otrzymujemy

$$y' = x^2(x-2)(6x^2-13x+6), \qquad \text{czyli} \qquad y' = 6x^2(x-2)(x-\tfrac{2}{3})(x-\tfrac{3}{2}).$$

Punktami zerowymi pochodnej są: $x=0$ (pierwiastek podwójny), $x=2$, $x=\frac{2}{3}$, $x=\frac{3}{2}$.

Obliczamy wartości funkcji $y=f(x)$ dla wartości x równych pierwiastkom pochodnej:

$$f(0)=0, \qquad f(2)=0, \qquad f(\tfrac{2}{3}) = -\frac{2^7}{3^6}, \qquad f(\tfrac{3}{2}) = \frac{3^3}{2^6}.$$



Rys. 10.9

Jeżeli idzie o znak pochodnej $f'(x)$, to zauważmy, że czynnik x^2 jest dodatni lub równy zeru. Na znak więc wpływają tylko czynniki $x-2$, $x-\frac{2}{3}$, $x-\frac{3}{2}$. Układamy tabelkę znaków pochodnej.

x	$-\infty$	...	0	...	$\frac{2}{3}$	...	$\frac{3}{2}$	...	2	...	$+\infty$
x^2	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+
$x-\frac{2}{3}$	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+
$x-\frac{3}{2}$	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+
y'	−	−	0	−	0	+	0	−	0	+	+

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	...	0	...	$\frac{2}{3}$	...	$\frac{3}{2}$	...	2	...	$+\infty$
y'	$-\infty$	−	0	−	0	+	0	−	0	+	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{27}{36}$	$\nearrow$	$-\frac{33}{26}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

a to dlatego, że $f(x)$ jest wielomianem stopnia parzystego (szóstego) i współczynnik przy x^6 jest dodatni (patrz zad. 5.11).

Wykres funkcji $y=x^3(x-1)(x-2)^2$ podany jest na rysunku 10.9.

ZADANIE 10.11. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y=\frac{2x-3}{x+1}.$$

Rozwiązanie. Jest to tzw. funkcja homograficzna (iloraz dwóch funkcyj liniowych). Funkcja jest określona, gdy $x+1\neq 0$, tzn. gdy $x\neq -1$.

Zbadajmy zachowanie się funkcji w otoczeniu punktu $x=-1$. Gdy $x\to -1-0$ (szukamy granicy lewostronnej), to $y\to +\infty$, a gdy $x\to -1+0$ (szukamy granicy prawostronnej), to $y\to -\infty$; w takim przypadku mówimy, że prosta $x=-1$ jest asymptotą pionową krzywej $y=f(x)$. Zauważmy bowiem, że gdy $x=-1-0$, to odległość punktu (x,y) wykresu funkcji $y=f(x)$ od prostej $x=-1$ dąży do zera.

Zbadajmy granicę funkcji, gdy x wzrasta nieograniczenie:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{x+1}=2 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{x+1}=2,$$

a więc prosta $y=2$ jest dwustronną asymptotą poziomą krzywej. Zauważmy bowiem, że zarówno gdy $x\to\infty$, jak i gdy $x\to-\infty$ odległość punktu (x,y) wykresu funkcji $y=f(x)$ od prostej $y=2$ dąży do zera.

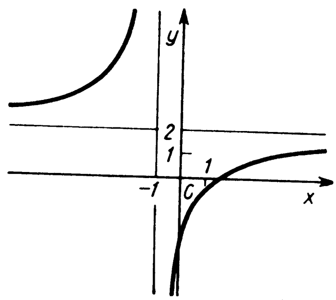
Obliczamy pochodną

$$y'=\frac{2(x+1)-(2x-3)}{(x+1)^2}=\frac{5}{(x+1)^2}.$$

Dla $x\neq -1$ pochodna $y'=f'(x)$ jest stale dodatnia, a więc funkcja $y=f(x)$ jest stale rosnąca. w każdym z przedziałów $(-\infty,-1)$ oraz $(-1,+\infty)$.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	...	-1		...	$+\infty$
y'	0	+	$+\infty$	$+\infty$	+	0
y	2	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	2



Rys. 10.10

Wykres funkcji przedstawia rysunek 10.10.

ZADANIE 10.12. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y=\frac{1}{1+x^2}.$$

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla wszystkich wartości x.

Obliczmy pochodną

$$y'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Pochodna przybiera wartość zerową, gdy $x=0$. Dla $x<0$ jest dodatnia, a dla $x>0$ jest ujemna. Obliczamy drugą pochodną

$$y''=-2\frac{(1+x^2)^2-x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

Mianownik jest dodatni, a więc znak y'' jest zgodny ze znakiem $3x^2-1$. Gdy $-\frac{1}{3}\sqrt{3}<x<\frac{1}{3}\sqrt{3}$, druga pochodna $f''(x)$ jest ujemna, więc krzywa $y=f(x)$ jest wklęsła, a dla $x<-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ albo $x>\frac{1}{3}\sqrt{3}$ jest $f''(x)>0$, więc krzywa $y=f(x)$ jest wypukła.

Poza tym zauważmy, że

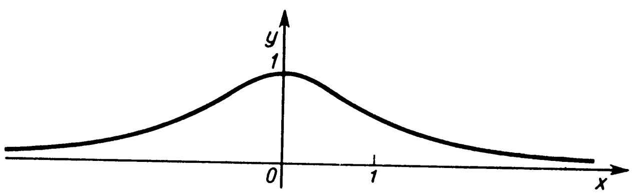
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+x^2}=0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^2}=0,$$

co dowodzi, że oś Ox jest dwustronną asymptotą poziomą krzywej.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	...	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	...	0	...	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	...	$+\infty$
y''	0	+	0	−	−	−	0	+	0
y'	0	+	+	+	0	−	−	−	0
y	0	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↘	0

Wykres funkcji podany jest na rysunku 10.11.



Rys. 10.11

ZADANIE 10.13. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y=\frac{x^2}{x^2-4}.$$

Rozwiązanie. Funkcja jest określona, gdy $x^2-4\neq 0$, tzn. gdy $x\neq -2$ i $x\neq 2$. Obliczając pochodną otrzymujemy

$$y'=\frac{-8x}{(x^2-4)^2}.$$

Podobnie jak w poprzednim zadaniu: dla $x<0$ mamy $y'>0$ i funkcja $f(x)$ jest rosnąca, dla $x=0$ mamy $y'=0$ i funkcja $f(x)$ osiąga maksimum, dla $x>0$ mamy $y'<0$ i funkcja $f(x)$ jest malejąca.

Zbadajmy zachowanie się funkcji $f(x)$ w otoczeniu punktów $x=-2$ i $x=2$. Gdy $x\to-2-0$, to $f(x)\to+\infty$, a gdy $x\to-2+0$, to $f(x)\to-\infty$, a więc prosta $x=-2$ jest asymptotą pionową krzywej $y=f(x)$; natomiast gdy $x\to 2-0$, to $f(x)\to -\infty$, a gdy $x\to 2+0$, to $f(x)\to +\infty$, a więc prosta $x=2$ jest też asymptotą pionową krzywej $y=f(x)$.

Następnie badamy zachowanie sie funkcji $f(x)$ w nieskończoności:

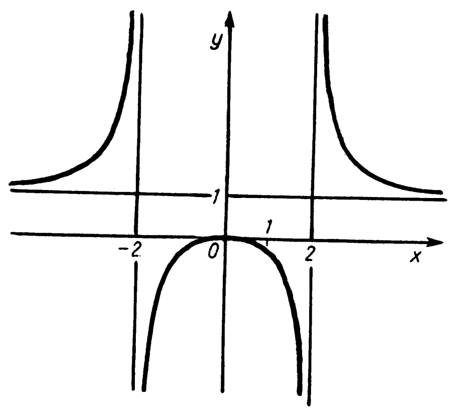
$$\lim_{x\to -\infty} y=1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to +\infty} y=1,$$

co dowodzi, że prosta $y=1$ jest dwustronną asymptotą poziomą krzywej.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	...	-2		...	0	...	2		...	$+\infty$
y'	0	+	$+\infty$	$+\infty$	+	0	−	$-\infty$	$-\infty$	−	0
y	1	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	1

Wykres funkcji przedstawia rysunek 10.12.



Rys. 10.12

Zadanie 10.14. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y=\frac{x^2-3}{x-2}.$$

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla $x\neq 2$.

Po podzieleniu licznika przez mianownik możemy przedstawić funkcję w postaci

$$y=x+2+\frac{1}{x-2}. \tag{1}$$

Obliczmy pochodną

$$y'=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

Pochodna jest równa zeru przy $x=1$ oraz $x=3$ i wówczas badana funkcja $f(x)$ przybiera wartości $f(1)=2$, $f(3)=6$.

Widzimy dalej, że

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 2+0} f(x) = +\infty,$$

a więc prosta $x=2$ jest asymptotą pionową krzywej (1).

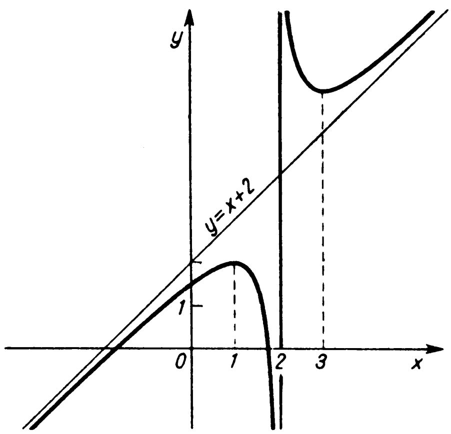
Mówimy, że prosta $y=ax+b$, $a\neq 0$, jest *jednostronną* (*dwustronną*) *asymptotą ukośną* krzywej, jeżeli zachodzi jedna (zachodzą obie) z następujących równości:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-ax-b)=0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x)-ax-b)=0.$$

(10.4.10) *Jeżeli funkcja $y=f(x)$ daje się przedstawić w postaci $y=ax+b+g(x)$, przy czym spełniony jest przynajmniej jeden z warunków:*

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=0,$$

to prosta $y=ax+b$ jest asymptotą ukośną krzywej $y=f(x)$ (por. też str. 204).



Rys. 10.13

W tym przypadku dwustronną asymptotą ukośną jest prosta $y=x+2$, gdyż

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2}=0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2}=0.$$

Układamy tabelkę zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	...	1	...	2		...	3	...	$+\infty$
y'	1	+	0	−	$-\infty$	$-\infty$	−	0	+	1
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

Wykres funkcji przedstawia rysunek 10.13.

Zadanie 10.15. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y=\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-10x+3}.$$

Rozwiązanie. Oznaczamy prawą stronę przez $f(x)$ i rozkładamy licznik i mianownik ułamka na czynniki:

$$f(x)=\frac{2(x-\frac{1}{2})(x-2)}{3(x-\frac{1}{3})(x-3)}.$$

Zatem funkcja $f(x)$ jest określona, gdy $x\neq\frac{1}{3}$ i $x\neq 3$.

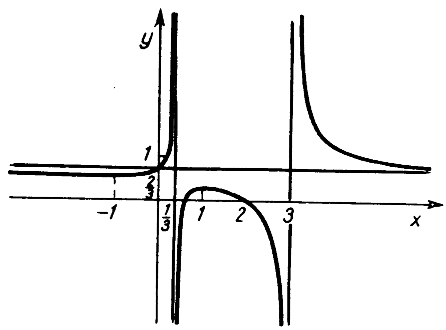
Po zróżniczkowaniu i redukcji otrzymujemy

$$y'=\frac{-5(x+1)\,(x-1)}{9(x-\frac{1}{3})^2(x-3)^2}.$$

Punktami zerowymi pochodnej są $x=-1$ i $x=1$; w punktach tych funkcja $f(x)$ przybiera wartości:

$$f(-1)=\tfrac{9}{16} \quad \text{i} \quad f(1)=\tfrac{1}{4}.$$

Dla $-1<x<1$ jest $y'>0$, dla $x<-1$ albo $x>1$ jest $y'<0$.



Rys. 10.14

Asymptotami pionowymi są proste $x=\frac{1}{3}$, $x=3$. Dwustronną asymptotą poziomą jest prosta $y=\frac{2}{3}$, gdyż

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\tfrac{2}{3} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\tfrac{2}{3}.$$

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	...	-1	...	$\frac{1}{3}$		...	1	...	3		...	$+\infty$
y'	0	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0
y	$\frac{2}{3}$	↘	$\frac{9}{16}$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	$\frac{2}{3}$

Wykres funkcji podany jest na rysunku 10.14.

ZADANIE 10.16. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y = x - \frac{4}{x^2}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla $x \neq 0$.

Obliczamy pochodną

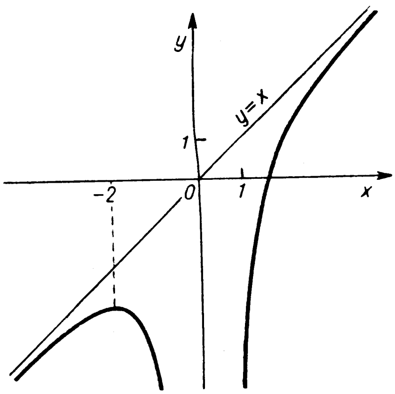
$$y' = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3}.$$

Pochodna jest równa zeru dla $x=-2$. Gdy $x<-2$, licznik i mianownik są ujemne, więc $y'>0$; dla $x>0$ licznik i mianownik są dodatnie, więc $y'>0$; natomiast dla $-2<x<0$ licznik jest dodatni, a mianownik ujemny, więc $y'<0$.

Krzywa $y=f(x)$ ma asymptotę pionową $x=0$ (oś Oy) oraz dwustronną asymptotę ukośną $y=x$, co widoczne jest z równania (1), gdyż

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^2} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

(warunki istnienia ukośnej asymptoty patrz zad. 10.14).



Rys. 10.15

Punkty zerowe funkcji

$$y = x - \frac{4}{x^2} = \frac{x^3-4}{x^2}$$

znajdziemy przyrównując licznik do zera; wówczas otrzymamy $x=\sqrt[3]{4}$.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	...	-2	...	0		...	$\sqrt[3]{4}$	...	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Wykres funkcji przedstawia rysunek 10.15.

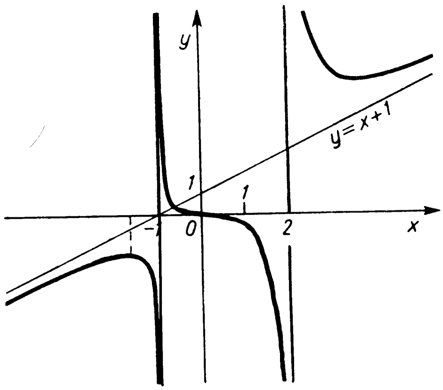
ZADANIE 10.17. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y=\frac{x^3}{x^2-x-2}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Oznaczamy prawą stronę przez $f(x)$ i rozkładamy mianownik na czynniki:

$$f(x)=\frac{x^3}{(x+1)(x-2)}.$$

Funkcja $f(x)$ jest określona, gdy $x\neq -1$ i $x\neq 2$.



Rys. 10.16

Obliczamy pochodną $y'=f'(x)$; po zredukowaniu otrzymujemy

$$y'=\frac{x^2(x^2-2x-6)}{(x+1)^2(x-2)^2}.$$

Punktami zerowymi pochodnej są: $x_1=1-\sqrt{7}$, $x_2=1+\sqrt{7}$ oraz $x=0$ (pierwiastek podwójny).

Krzywa ma dwie asymptoty pionowe o równaniach $x=-1$ i $x=2$.

Ponieważ licznik funkcji (1) jest stopnia wyższego niż mianownik, dzielimy licznik przez mianownik:

$$\frac{x^3}{x^2-x-2}=x+1+\frac{3x+2}{x^2-x-2},$$

a więc

$$f(x)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)(x-2)}.$$

Z równości tej wnioskujemy, że prosta $y=x+1$ jest dwustronną asymptotą ukośną krzywej $y=f(x)$.

Ponieważ $x=0$ jest podwójnym pierwiastkiem pochodnej, więc $x=0$ jest również pierwiastkiem (pojedynczym) drugiej pochodnej i łatwo wywnioskować, że jest to punkt przegięcia; w punkcie tym jest $y'=0$, a więc krzywa jest styczna do osi odciętych.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	...	$1-\sqrt{7}$	...	-1		...	0	...	2		...	$1+\sqrt{7}$	...	$+\infty$
y'	1	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
y	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

Wykres funkcji przedstawia rysunek 10.16.

ZADANIE 10.18. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Rozwiązanie. Funkcja jest określona tylko dla tych wartości, dla których wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne, a więc dla $-1<x\leqslant 1$.

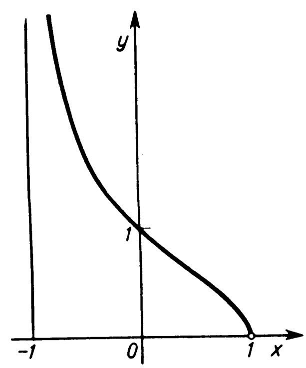
Po zróżniczkowaniu i redukcji otrzymujemy

$$y'=\frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

W przedziale $-1<x<1$ jest zawsze $y'<0$, czyli funkcja y jest malejąca.

Obliczamy drugą pochodną. Po obliczeniu drugiej pochodnej otrzymujemy

$$y''=\frac{1-2x}{(1+x)(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$



Rys. 10.17

Dla $x=\frac{1}{2}$ jest $y''=0$, dla $x<\frac{1}{2}$ jest $y''>0$, a dla $x>\frac{1}{2}$ jest $y''<0$, a więc $x=\frac{1}{2}$ jest to punkt przegięcia krzywej $y=f(x)$; w punkcie tym $y=\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Prosta $x=-1$ jest asymptotą pionową, gdyż $\lim\limits_{x\to-1+0} y=+\infty$. Zauważmy, że

$$\lim_{x\to-1+0} y'=-\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+1-0} y'=-\infty.$$

To dowodzi, że w punkcie $x=1$ styczna do krzywej $y=f(x)$ jest równoległa do osi rzędnych, pochodna bowiem, tj. współczynnik kątowy $\operatorname{tg}\alpha$ stycznej, dąży do $-\infty$, a wówczas $\alpha\to\frac{1}{2}\pi+0$.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	-1	...	$\frac{1}{2}$	...	1
y''	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
y'	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\searrow$	0

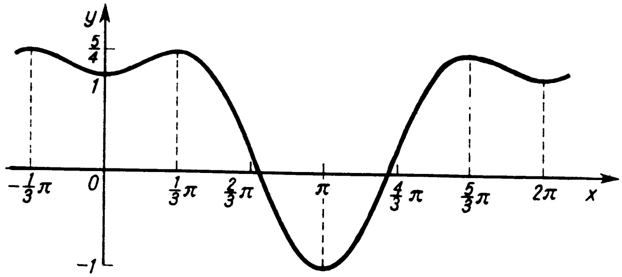
Wykres funkcji podaje rysunek 10.17.

ZADANIE 10.19. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y=\sin^2 x+\cos x$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla wszystkich wartości x. Funkcja ma okres 2π. Wystarczy więc zbadać naszą funkcję w przedziale $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

Obliczmy pochodną

$$y'=2\sin x\cos x-\sin x=2\sin x\,(\cos x-\tfrac{1}{2}).$$



Rys. 10.18

Pochodna przybiera wartość 0, gdy $\sin x=0$, a więc dla $x=0, \pi, 2\pi$, a także gdy $\cos x=\frac{1}{2}$, a więc dla $x=\frac{1}{3}\pi$ oraz $x=\frac{5}{3}\pi$. Wartości funkcji $y=f(x)$ w tych punktach są:

$$f(0)=1,\quad f(\pi)=-1,\quad f(2\pi)=1,\quad f(\tfrac{1}{3}\pi)=\tfrac{5}{4},\quad f(\tfrac{5}{3}\pi)=\tfrac{5}{4}.$$

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji (w przedziale $0\leqslant x\leqslant 2\pi$):

x	...	0	...	$\frac{1}{3}\pi$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π	...
y'	...	0	+	0	−	0	+	0	−	0	...
y	...	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	−1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	1	...

Wykres funkcji podany jest na rysunku 10.18.

ZADANIE 10.20. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y=x+\cos x$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla wszelkich wartości x. Funkcja $\cos x$ czyni zadość nierówności $-1\leqslant\cos x\leqslant +1$, będzie więc

$$x-1\leqslant x+\cos x\leqslant x+1,$$

tzn. badana krzywa leży w pasie ograniczonym prostymi $y=x-1$ i $y=x+1$.

Obliczmy pochodną

$$y'=1-\sin x.$$

Przy wszelkich wartościach x mamy $y'\geqslant 0$, a więc funkcja jest stale rosnąca. Pochodna y' przybiera wartość 0, gdy $\sin x=1$, czyli gdy $x=\frac{1}{2}\pi+2k\pi$, gdzie k oznacza dowolną liczbę całkowitą.

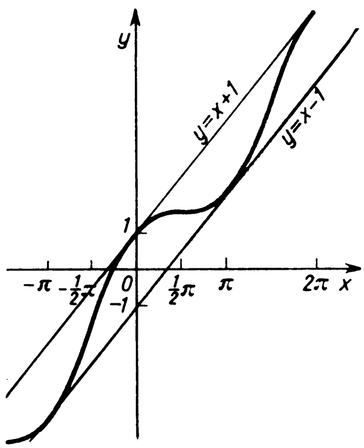
Druga pochodna $y''=-\cos x$ jest równa zeru dla wartości $x=\frac{1}{2}\pi+k\pi$, gdzie k oznacza dowolną liczbę całkowitą.

W punktach $x=0$ oraz $x=2\pi$ krzywa $y=f(x)$ dosięga prostej $y=x+1$ i jest do niej styczna (te same współczynniki kątowe, oba równe 1). W punkcie $x=\pi$ krzywa dotyka prostej $y=x-1$ i jest do niej styczna z tych samych względów, co poprzednio. W punkcie $x=\frac{1}{2}\pi$ jest punkt przegięcia krzywej, przy czym styczna jest równoległa do osi odciętych. W punkcie $x=\frac{3}{2}\pi$ mamy również punkt przegięcia. Funkcja nie ma ekstremów, ma natomiast punkty przegięcia.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	...	0	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	π	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π	...
y''	...	-1	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	-1	...
y'	...	1	$+$	0	$+$	1	$+$	2	$+$	1	...
y	...	1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}\pi$	$\nearrow$	$\pi-1$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\pi$	$\nearrow$	$2\pi+1$	...

Wykres funkcji przedstawia rysunek 10.19.



Rys. 10.19

ZADANIE 10.21. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y=\sqrt{x^2-4x+3}$.

Rozwiązanie. Równanie funkcji można przedstawić w postaci

$$y=\sqrt{(x-1)(x-3)}.$$

Funkcja jest określona dla $x\leqslant 1$ i dla $x\geqslant 3$.

Obliczamy pochodną

$$y'=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

Licznik jest, równy zeru dla $x=2$, ale wtedy funkcja $y=f(x)$ nie jest określona, a więc funkcja nie ma ekstremum lokalnego, bo dla wszystkich tych wartości x, dla których funkcja jest określona, zachodzi nierówność $y'\neq 0$.

Zbadajmy teraz, czy linia ma tzw. *kierunki asymptotyczne*, tzn. czy istnieją granice

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}.$$

Obliczmy pierwszą granicę

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)=1.$$

Przy obliczaniu drugiej granicy, tzn. dla $x\to-\infty$, wygodniej będzie wprowadzić nową zmienną u taką, że $x=-u$; wówczas

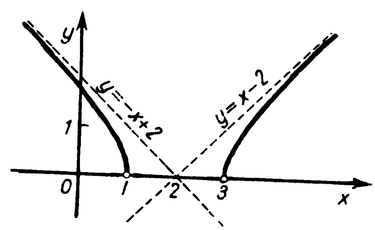
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\sqrt{u^2+4u+3}}{-u}=-1.$$

Ponieważ linia ma kierunki asymptotyczne, więc może mieć asymptoty ukośne: (por. str. 197) $y=ax+b$ (jedną przy $x\to\infty$, wtedy $a=1$, oraz drugą przy $x\to-\infty$, wtedy $a=-1$). Zbadajmy więc istnienie granicy

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-mx) \quad \text{i} \quad b=\lim_{x\to-\infty}(y-mx).$$

Dla $a=1$ otrzymujemy

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+x}=\frac{-4}{\sqrt{1}+1}=-2.$$



Rys. 10.20

Istnieje więc jednostronna asymptota ukośna $y=x-2$. Analogicznie obliczamy granicę w przypadku, gdy $a=-1$:

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y+x)=2.$$

Istnieje więc druga ukośna asymptota o równaniu $y=-x+2$.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności funkcji (¹):

x	$-\infty$	...	1	...	3	...	$+\infty$
y'	-1	$-$	$-\infty$	┃	$+\infty$	$+$	1
y	$+\infty$	↘	0	┃	0	↗	$+\infty$

Wykres funkcji podaje rysunek 10.20. Otrzymana linia jest górną połową hiperboli równoosiowej $(x-2)^2-y^2=1$.

(¹) Kreska ┃ oznacza, że w przedziale $1<x<3$ funkcja i pochodna nie są określone.

ZADANIE 10.22. Zbadać przebieg zmienności pola prostokąta o stałym obwodzie $2p$ w zależności od boku prostokąta.

Rozwiązanie. Oznaczmy jeden z boków przez x; wówczas drugi bok prostokąta jest równy $p-x$. Oznaczając pole prostokąta przez y otrzymujemy równanie $y=x(p-x)$, czyli

(1) $$y=-x^2+px.$$

Bok prostokąta może się zmieniać w granicach od $x=0$ do $x=p$, tj. do połowy obwodu prostokąta; mamy więc przedział $0\leqslant x\leqslant p$.

Obliczamy pochodną funkcji (1):

$$y'=-2x+p.$$

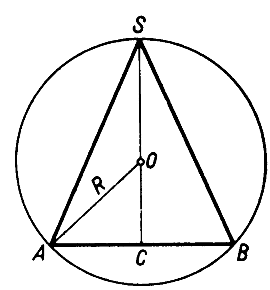
Pochodna równa się zeru dla $x=\frac{1}{2}p$ i jest dodatnia dla $x<\frac{1}{2}p$, a ujemna dla $x>\frac{1}{2}p$. Dla $x=\frac{1}{2}p$ otrzymujemy maksimum pola równe $\frac{1}{4}p^2$.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności funkcji $y=x(p-x)$:

x	0	...	$\frac{1}{2}p$	...	p
y'	+	+	0	−	−
y	0	↗	$\frac{1}{4}p^2$	↘	0

Na koniec zauważmy, że dla $x=\frac{1}{2}p$ prostokąt jest kwadratem. Na podstawie tego widzimy, że *ze wszystkich prostokątów o stałym obwodzie największe pole ma kwadrat.*

ZADANIE 10.23. Zbadać przebieg zmienności objętości stożka obrotowego wpisanego w kulę o promieniu R.



Rys. 10.21

Rozwiązanie. W przekroju przez środek kuli otrzymamy trójkąt równoramienny wpisany w koło (rys. 10.21). Jako zmienną niezależną obierzmy wysokość stożka $h=SC=x$. Wówczas objętość stożka jest $y=\frac{1}{3}\pi\cdot AC^2\cdot SC$, czyli

(1) $$y=\tfrac{1}{3}\pi x\cdot AC^2.$$

Aby obliczyć AC^2, zauważmy, że $AO=OS=R$, a więc otrzymujemy $OC=SC-SO=x-R$. Z trójkąta AOC otrzymujemy $AC^2=AO^2-OC^2$, czyli $AC^2=R^2-(x-R)^2$. Po redukcji mamy $AC^2=2Rx-x^2$. Podstawiając wartość AC^2 do wzoru (1) otrzymujemy

(2) $$y=\tfrac{1}{3}\pi x^2(2R-x).$$

W taki sposób wyraża się objętość stożka y jako funkcja jego wysokości x, gdy x zmienia się w granicach $0\leqslant x\leqslant 2R$.

Obliczamy pochodną funkcji (2):

$$y'=\tfrac{1}{3}\pi x(4R-3x).$$

Ponieważ $x\geqslant 0$, więc znak pochodnej jest taki sam, jak znak wyrażenia $4R-3x$, tzn. dla $x<\frac{4}{3}R$ mamy $y'>0$, dla $x=\frac{4}{3}R$ mamy $y'=0$, a dla $x>\frac{4}{3}R$ mamy $y'<0$. Funkcja (2) osiąga więc maksimum, gdy $x=\frac{4}{3}R$.

Dla $x=0$ z równości (2) otrzymujemy $y=0$; również dla $x=2R$ jest $y=0$. Układamy tabelkę przebiegu zmienności funkcji (2):

x	0	...	$\frac{4}{3}R$	...	$2R$
y'	+	+	0	−	−
y	0	↗	$\frac{32}{81}\pi R^3$	↘	0

Objętość kuli wynosi $\frac{4}{3}\pi R^3$. Dzieląc maksymalną objętość stożka przez objętość kuli otrzymujemy $\frac{8}{27}$, co oznacza, że stożek obrotowy o największej objętości wpisany w kulę zajmuje $\frac{8}{27}$ (a więc mniej niż $\frac{1}{3}$) objętości kuli.

ZADANIE 10.24. Jakie wymiary powinno mieć naczynie kształtu otwartego walca obrotowego o danej pojemności V, gdy przy danej grubości ścianek a chcemy zużyć jak najmniej materiału?

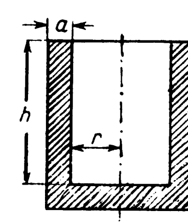
Rozwiązanie. Niech y oznacza ilość materiału zużytego na budowę walca (wyrażoną w takich samych jednostkach, oczywiście sześciennych, w jakich wyrażone są wielkości V i a).

Pojemność naczynia (rys. 10.22) wynosi $V=\pi r^2 h$. Ilość materiału y jest różnicą między objętością walca o promieniu podstawy $r+a$ i wysokości $h+a$ a daną objętością V, a więc

(1) $$y=\pi(r+a)^2(h+a)-\pi r^2 h.$$

Ze związku $V=\pi r^2 h$ wyznaczamy $h=V/\pi r^2$ i podstawiamy do (1). Otrzymujemy

$$y=\pi(r+a)^2\left(\frac{V}{\pi r^2}+a\right)-V,$$



Rys. 10.22

gdzie y jest funkcją zmiennego promienia r (wielkości a i V są dane).

Aby wyznaczyć ekstremum tej funkcji, obliczamy pochodną i przyrównujemy ją do zera:

$$y'=\pi\cdot 2(r+a)\left(\frac{V}{\pi r^2}+a\right)+\pi(r+a)^2\left(\frac{-2V}{\pi r^3}\right)=0.$$

Następnie dzielimy przez $2\pi(r+a)$ i po wykonaniu mnożenia i redukcji mamy równanie

(2) $$a-\frac{aV}{\pi r^3}=0,$$

skąd z łatwością otrzymujemy, że pochodna równa się zeru, gdy $r=\sqrt[3]{V/\pi}$. Łatwo sprawdzamy, że wysokość walca h jest wówczas równa promieniowi r:

$$h=r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Ponieważ znak y' jest taki sam, jak znak wyrażenia stojącego po lewej stronie równości (2), więc jest widoczne, że dla $r<\sqrt[3]{V/\pi}$ pochodna jest ujemna, a dla $r>\sqrt[3]{V/\pi}$ pochodna jest dodatnia, czyli dla $r=\sqrt[3]{V/\pi}$ funkcja osiąga minimum.

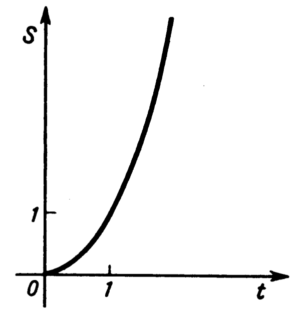
Zadanie 10.25. Droga przebyta przez ciało swobodnie spadające (przy pominięciu oporu powietrza) wyraża się wzorem

$$s=v_0 t+\tfrac{1}{2}gt^2,$$

gdzie v_0 oznacza prędkość początkową (w momencie $t=0$), g oznacza przyśpieszenie grawitacyjne, a t – czas. Wyznaczyć prędkość ruchu ds/dt i sporządzić wykres funkcji $s=f(t)$.

Rozwiązanie. Obliczamy prędkość ruchu jako pochodną

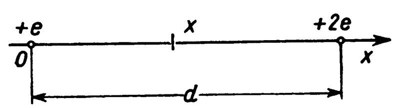
$$\frac{ds}{dt}=v_0+gt.$$



Rys. 10.23

Wykres funkcji $s=f(t)$ dla $t\geqslant 0$ jest to gałąź paraboli (rys. 10.23), do której styczna w punkcie $t=0$ ma współczynnik kątowy v_0.

Zadanie 10.26. Pole elektryczne wytworzone jest przez dwa ładunki punktowe $+e$ i $-2e$, które są od siebie oddalone o odcinek d. Sporządzić wykres natężenia K pola elektrycznego wzdłuż prostej przechodzącej przez te ładunki.



Rys. 10.24

Rozwiązanie. Obierzmy układ współrzędnych jak na rysunku 10.24. Zgodnie z prawem Coulomba natężenie K wyraża się wzorem

$$K(x)=ke\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{(d-x)^2}\right),$$

gdzie k jest to współczynnik zależny od wyboru jednostek. Funkcja ta jest określona przy wszystkich wartościach x z wyjątkiem 0 i d. Granice funkcji w punktach nieciągłości wynoszą:

$$\lim_{x\to -0} K(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to +0} K(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to d-0} K(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to d+0} K(x)=+\infty,$$

a więc proste $x=0$ i $x=d$ są asymptotami pionowymi. Ponadto zauważmy, że

$$\lim_{x\to -\infty} K(x)=\lim_{x\to +\infty} K(x)=0,$$

a więc prosta $K=0$ jest dwustronną asymptotą poziomą.

Obliczamy pochodną

$$\frac{dK}{dx}=ke\left(-\frac{2}{x^3}+\frac{4}{(d-x)^3}\right).$$

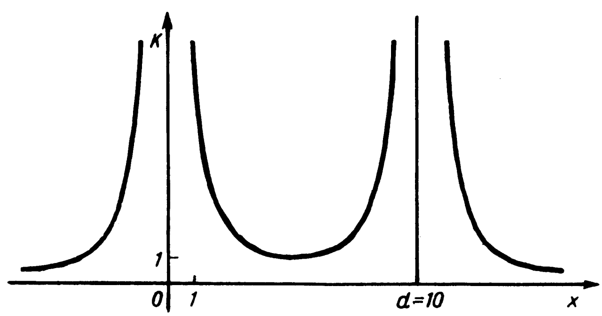
Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy $x=d/(1+\sqrt[3]{2})$. Pochodna jest ujemna, gdy $0<x<d/(1+\sqrt[3]{2})$ albo gdy $x>d$, a dodatnia, gdy $x<0$ albo gdy $d/(1+\sqrt[3]{2})<x<d$. Zatem

$$K_{\min}=\frac{(1+\sqrt[3]{2})^3 ke}{d^2}\approx 11{,}54\frac{ke}{d^2}.$$

Układamy tabelkę przebiegu zmienności funkcji $K(x)$:

x	$-\infty$	...	0		...	$\frac{d}{1+\sqrt[3]{2}}$	...	d		...	$+\infty$
dK/dx	0	+	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	+	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0
$K(x)$	0	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	$K_{\min}$	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	0

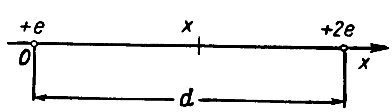
Sporządzamy wykres funkcji $K(x)$ przyjmując $ke=10$, $d=10$ (rys. 10.25).



Rys. 10.25

ZADANIE 10.27. Pole elektryczne wytworzone jest przez dwa ładunki punktowe $+e$ i $+2e$, które są wzajemnie oddalone o odcinek d. Sporządzić wykres natężenia K pola elektrycznego wzdłuż prostej przechodzącej przez dane ładunki.

Rozwiązanie. Obierzmy układ współrzędnych jak na rysunku 10.26.



Rys. 10.26

Zgodnie z prawem Coulomba natężenie K wyraża się wzorem

$$K(x)=ke\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{(d-x)^2}\right),$$

gdzie k jest to współczynnik zależny od wyboru jednostek. Funkcja ta jest określona przy wszystkich wartościach x z wyjątkiem 0 i d. Granice funkcji w punktach nieciągłości wynoszą:

$$\lim_{x\to -0} K(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to +0} K(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to d-0} K(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to d-0} K(x)=-\infty,$$

a więc proste $x=0$ i $x=d$ są asymptotami pionowymi. Ponadto zauważmy, że

$$\lim_{x\to -\infty} K(x)=\lim_{x\to +\infty} K(x)=0,$$

a więc prosta $K=0$ jest asymptotą poziomą.

Obliczamy pochodną

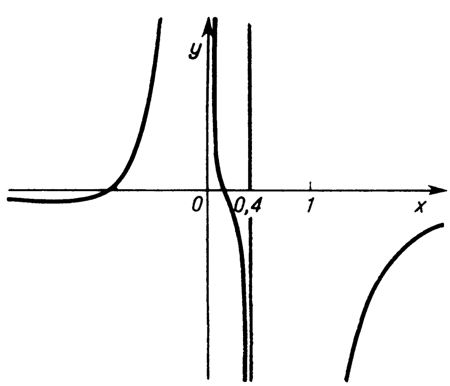
$$\frac{dK}{dx}=ke\left(-\frac{2}{x^3}-\frac{4}{(d-x)^3}\right).$$

Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy $x=d/(1-\sqrt[3]{2})$.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności funkcji $K(x)$:

x	$-\infty$	$\dots$	$\frac{d}{1-\sqrt[3]{2}}$	$\dots$	0		$\dots$	d		$\dots$	$+\infty$
dK/dx	0	$-$	0	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	0
$K(x)$	0	$\searrow$	$K_{\min}$	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0

Sporządzamy wykres funkcji $K(x)$ przyjmując $ke=1$, $d=0{,}4$ (rys. 10.27).



Rys. 10.27

ZADANIE 10.28. Natężenie prądu i płynącego w obwodzie przedstawionym na rysunku 10.28 jest określone wzorem

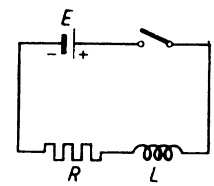
$$i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right), \tag{1}$$

gdzie E oznacza siłę elektromotoryczną źródła prądu stałego, R — oporność obwodu,

L — indukcyjność, t — czas liczony od chwili zamknięcia obwodu. Sporządzić wykres funkcji $i=f(t)$.

Rozwiązanie. Funkcja (1) jest określona i ciągła dla wszystkich wartości t. Obliczamy pierwszą pochodną

$$\frac{di}{dt}=\frac{E}{L}e^{-\frac{R}{L}t}.$$



Rys. 10.28

Pochodna ta jest zawsze dodatnia, a więc funkcja $i=f(t)$ jest stale rosnąca.

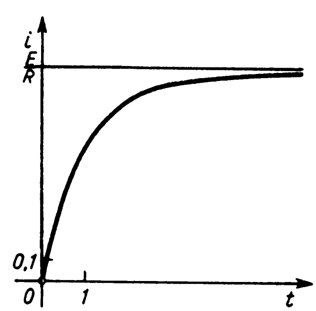
Obliczamy granicę funkcji przy $t\to+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=\frac{E}{R}.$$

Układamy tabelkę przebiegu zmienności funkcji $i(t)$:

t	0	...	$+\infty$
di/dt	+	+	+
$i(t)$	0	↗	E/R

Krzywa ma asymptotę poziomą $i=E/R$ (rys. 10.29).



Rys. 10.29

ZADANIE 10.29. Kamień rzucony pionowo do góry z pewną prędkością początkową v_0 wznosi się w ciągu czasu t na wysokość h, daną równaniem

$$h=-5t^2+50t.$$

Znaleźć: a) prędkość w chwili $t=0$, b) czas wznoszenia się kamienia, c) największe wzniesienie.

Rozwiązanie. a) Prędkość początkowa (przy $t=0$):

$$v=\frac{dh}{dt}=50-10t, \quad v(0)=50.$$

b) Kamień osiąga punkt najwyższy, gdy

$$v=\frac{dh}{dt}=0, \quad \text{czyli} \quad t=5.$$

c) Największe wzniesienie:

$$h(5)=50\cdot 5-5\cdot 5^2=125.$$

ZADANIE 10.30. Przy rzucie ukośnym ciało zakreśla tor o równaniu

$$y=x-\tfrac{1}{400}x^2$$

(pomijamy opór powietrza). Znaleźć maksymalne wzniesienie ciała.

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną

$$\frac{dy}{dx}=1-\tfrac{1}{200}x.$$

Ciało osiąga wzniesienie maksymalne, gdy $dy/dx=0$, czyli $x=200$. Maksymalne wzniesienie wynosi

$$y_{\max}=200-\tfrac{1}{400}\cdot 200^2=100.$$

ZADANIE 10.31. Dla pewnej turbiny dana jest zależność mocy od jej obrotów:

$$N=-0{,}0010344\,n^2+0{,}45543\,n,$$

gdzie n oznacza ilość obrotów na minutę, N – moc w koniach mechanicznych. Przy jakich obrotach moc turbiny osiąga wartość maksymalną i ile ona wynosi?

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną

$$\frac{dN}{dn}=-2\cdot 0{,}0010344n+0{,}45543.$$

Obliczamy, przy jakiej wartości funkcja $N(n)$ osiąga ekstremum:

$$\frac{dN}{dn}=0, \quad \text{gdy} \quad n=\frac{0{,}45543}{0{,}0020688}=220.$$

Ponieważ $d^2N/dn^2<0$, więc przy $n=220$ turbina osiąga moc maksymalną, która wynosi $N_{\max}=50{,}13$ KM.

ZADANIE 10.32. Pomiędzy ciepłem właściwym wody przy temperaturze t a tą temperaturą została ustalona zależność

$$c=1{,}0060562-0{,}000599201\,t+0{,}0000105884\,t^2.$$

Obliczyć temperaturę, przy której ciepło właściwe wody c osiąga wartość najmniejszą i ile ona wynosi.

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną

$$\frac{dc}{dt}=2\cdot 0{,}0000105884t-0{,}000599201\,.$$

Obliczamy, przy jakich wartościach t funkcja $c(t)$ osiąga ekstremum:

$$\frac{dc}{dt}=0, \quad \text{gdy} \quad t=\frac{59{,}9201}{2{,}11768}=28{,}3^\circ.$$

Ponieważ $d^2c/dt^2>0$, więc przy temperaturze $t=28{,}3^\circ$ funkcja $c(t)$ osiąga minimum, które wynosi $c=0{,}99813$.

ZADANIE 10.33. Statek płynący na południe z prędkością 10 węzłów przecina w punkcie A kurs drugiego statku, który płynie na wschód z prędkością 15 węzłów (¹). Gdy pierwszy statek był w punkcie A, drugi znajdował się w odległości 30 mil morskich przed tym punktem. W którym momencie odległość między statkami jest najmniejsza?

Rozwiązanie. Zaczynamy obliczanie czasu w chwili, gdy pierwszy statek znalazł się w punkcie A. Droga przebyta przez pierwszy statek wynosi $y=10t$, a droga drugiego statku $y=15(t-2)$. Kwadrat odległości między statkami wynosi

$$s^2=15^2(t-2)^2+10^2t^2.$$

Różniczkując obie strony tej równości względem czasu:

$$2s\frac{ds}{dt}=450(t-2)+200t$$

i przyrównując pochodną do zera otrzymujemy $t\approx 1$ godz 23 min.

ZADANIE 10.34. Pewna siła działająca wzdłuż drogi x wykonuje pracę określoną wzorem $L=1-e^{-2x^2}$. Wyznaczyć, w którym miejscu drogi ($x>0$) wartość siły $F=dL/dx$ osiąga maksimum.

Rozwiązanie. Obliczamy

$$F=\frac{dL}{dx}=4xe^{-2x^2}.$$

Aby znaleźć maksimum tej funkcji, obliczamy jej pochodną

$$\frac{dF}{dx}=4e^{-2x^2}-16x^2e^{-2x^2}=4(1-4x^2)e^{-2x^2}.$$

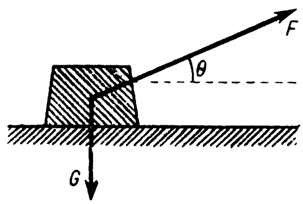
Przy dodatnich wartościach x pochodna przechodzi przez 0 w punkcie $x=\frac{1}{2}$, przy czym zmienia znak z dodatniego na ujemny. A więc w punkcie $x=\frac{1}{2}$ siła F osiąga maksimum, które wynosi $F=2e^{-\frac{1}{2}}=0{,}765$.

(¹) *Mila morska* jest to długość jednej minuty południka ziemskiego i wynosi 1852 m. *Węzeł* jest to jednostka prędkości równa jednej mili morskiej na godzinę, czyli 1,852 km/h.

ZADANIE 10.35. Siła F, skierowana pod kątem θ do poziomu (rys. 10.30), potrzebna do poruszenia z miejsca ciała o ciężarze G wynosi

$$F=\frac{\mu G}{\cos\theta+\mu\sin\theta},$$

gdzie μ jest współczynnikiem tarcia. Obliczyć kąt θ, przy którym siła F potrzebna do przesunięcia ciała jest najmniejsza.



Rys. 10.30

Rozwiązanie. Wartość F jest najmniejsza przy takiej wartości kąta θ, przy której funkcja $f(\theta)=\cos\theta+\mu\sin\theta$ jest największa.

Obliczamy pochodną mianownika

$$f'(\theta)=-\sin\theta+\mu\cos\theta.$$

Pochodna ta przybiera wartość 0, gdy $\operatorname{tg}\theta=\mu$, czyli $\theta=\operatorname{arc\,tg}\mu$.

Obliczamy drugą pochodną

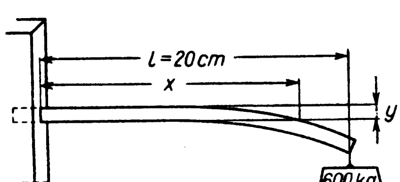
$$f''(\theta)=-\cos\theta-\mu\sin\theta.$$

Przy $\theta=\operatorname{arc\,tg}\mu$ mamy $f''(\theta)<0$, więc funkcja $f(\theta)$ osiąga maksimum, a siła F minimum.

Kąt θ_0, spełniający równanie $\operatorname{tg}\theta_0=\mu$, nazywamy *kątem tarcia*. Gdy siła działająca na ciało jest nachylona do poziomu pod kątem θ_0, wówczas mamy

$$F=\frac{\mu G}{\cos\theta_0+\mu\sin\theta_0}=\frac{G\operatorname{tg}\theta_0}{\cos\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0\sin\theta_0},$$

co po przekształceniu daje $F=G\sin\theta_0$.



Rys. 10.31

ZADANIE 10.36. Ugięcie y belki zamocowanej z jednej strony (rys. 10.31), wyrażone w centymetrach, oblicza się według wzoru

$$y=\frac{P}{EJ}\left(\tfrac{1}{6}x^3-\tfrac{1}{2}lx^2\right),$$

gdzie x jest to odległość danego punktu belki od punktu jej umocowania (w cm), P — siła obciążająca belkę (w kg), l — długość belki (w cm), E, J — wielkości stałe dla danej belki. Znaleźć maksymalne ugięcie belki, gdy $l=20$ cm, $P=600$ kg.

Rozwiązanie. Badamy funkcję y w przedziale $0<x<l$. Obliczamy pochodną

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{EJ}\left(\tfrac{1}{2}x^2-lx\right).$$

Wartość pochodnej równa się zeru dla $x=0$ i $x=2l$, a zatem poza przedziałem $0<x<l$. W badanym przez nas przedziale pochodna jest stale ujemna. Funkcja maleje od 0 do wartości

$$y_{\min}=\frac{P}{EJ}\left(\tfrac{1}{6}l^3-\tfrac{1}{2}l^3\right)=-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{P}{EJ}l^3.$$

Maksymalne ugięcie w tym przypadku wynosi

$$\tfrac{1}{3}\cdot\frac{600}{EJ}\cdot 8000=\frac{1\,600\,000}{EJ}.$$

ZADANIE 10.37. Wskaźnik wytrzymałości W belki prostokątnej, poziomo leżącej, wyraża się wzorem $W=\frac{1}{6}xy^2$, gdzie x jest szerokością, y — wysokością przekroju belki. Jak wyciąć z pnia mającego kształt walca, którego podstawa ma średnicę równą a, belkę prostokątną o największym wskaźniku wytrzymałości (rys. 10.32).

Rozwiązanie. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $y^2=a^2-x^2$, więc

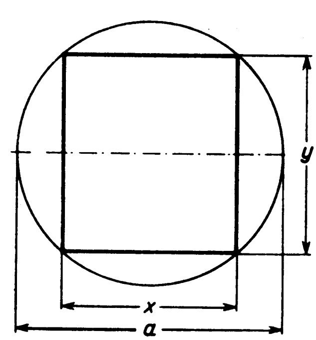
$$W=\tfrac{1}{6}(a^2x-x^3),\quad \text{gdzie}\quad 0<x<a.$$

Obliczamy, przy jakich wartościach funkcja może osiągać ekstremum. Mamy

$$\frac{dW}{dx}=\tfrac{1}{6}(a^2-3x^2),$$

skąd

$$\frac{dW}{dx}=0,\quad \text{gdy}\quad x=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$



Rys. 10.32

Przy tej wartości x mamy $d^2W/dx^2<0$, a więc funkcja $W(x)$ osiąga maksimum.

ZADANIE 10.38. Wydajność tlenku azotu NO z mieszaniny a % tlenu i $(100-a)$ % azotu w temperaturze 1600°C i pod ciśnieniem normalnym określa wzór

$$x=\sqrt{Ka(100-a)}-25K,$$

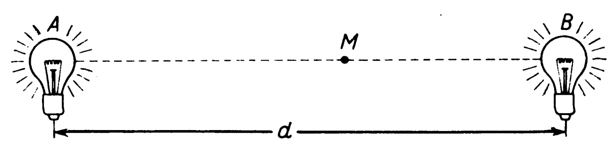
gdzie K jest stałą równowagi reakcji dla danej temperatury i danego ciśnienia. Obliczyć, przy jakiej procentowej zawartości tlenu a % w mieszaninie wydajność tlenku azotu NO będzie maksymalna.

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną

$$\frac{dx}{da}=\frac{K(100-2a)}{2\sqrt{Ka(100-a)}}.$$

Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy $a=50\%$.

Zadanie 10.39. Jasność I w punkcie odległym o r od źródła światła wyraża się wzorem $I=k/r^2$, gdzie k jest parametrem zależnym od wysyłanego strumienia światła. W punktach A i B znajdują się dwie różne żarówki, odległe od siebie o odcinek d (rys. 10.33). Żarówka A daje w punkcie B jasność a, a żarówka B daje w punkcie A jasność b. Wykazać, że jeżeli M jest punktem odcinka AB o jasności minimalnej, to $AM : MB=\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$.



Rys. 10.33

Rozwiązanie. Wyznaczamy parametry k żarówek:

$$a=\frac{k_1}{d^2},\ \text{więc}\ k_1=ad^2, \qquad \text{oraz} \qquad b=\frac{k_2}{d^2},\ \text{więc}\ k_2=bd^2.$$

Niech $AM=x$; wówczas $MB=d-x$. Jasność w punkcie M wynosi

$$I=\frac{ad^2}{x^2}+\frac{bd^2}{(d-x)^2}.$$

Wyznaczamy punkt o minimalnej jasności:

$$\frac{dI}{dx}=-2\frac{ad^2}{x^3}+2\frac{bd^2}{(d-x)^3},$$

skąd

$$\frac{dI}{dx}=0, \qquad \text{gdy} \qquad \frac{x}{d-x}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Stąd otrzymujemy $AM : MB=\sqrt[3]{a/b}.$

Zadanie 10.40. Odcinki $MA=a$ i $NB=b$ (rys. 10.34) przedstawiają odpowiednio wysokości latarń wznoszących się nad jeziorem. Odległość między latarniami wynosi d. Promień z latarni A odbija się od gładkiej powierzchni jeziora w punkcie L i dobiega do punktu B tak, że jego droga $AL+LB$ jest najmniejsza. Wykazać, że kąt $\sphericalangle ALM=\beta$ jest równy kątowi $\sphericalangle BLN=\alpha$.

Rozwiązanie. Oznaczmy $AL+LB=\delta$; stosując twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy

$$\delta=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}.$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{d\delta}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

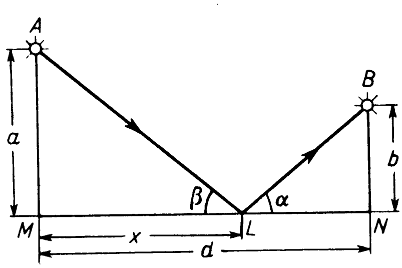
Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}},$$

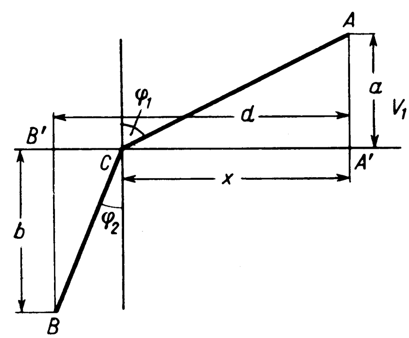
gdzie, jak wiemy,

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\cos\alpha,\qquad \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}=\cos\beta.$$

Wykazaliśmy więc, że $\alpha=\beta$.



Rys. 10.34



Rys. 10.35

ZADANIE 10.41. Znane jest prawo załamania światła przy przejściu z jednego ośrodka do drugiego:

(1) $$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}=\frac{v_1}{v_2},$$

gdzie φ_1 oznacza kąt padania światła (czyli kąt między promieniami światła i normalną do powierzchni oddzielającej ośrodki), φ_2 — kąt załamania (również względem normalnej), a v_1 i v_2 są to prędkości rozchodzenia się światła w danych ośrodkach (rys. 10.35). Wykazać, że powyższy wzór można wyprowadzić z następującej zasady:

Jeżeli promień światła przebiega z punktu A w jednym ośrodku do punktu B w drugim ośrodku, przy czym prędkości rozchodzenia się światła w tych ośrodkach są różne, to promień wybiera taką drogę, żeby czas przebiegu z punktu A do punktu B był możliwie najmniejszy.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że promień wychodzący z punktu A przebija płaszczyznę rozdzielającą ośrodki w punkcie C i po załamaniu dochodzi do punktu B. Z zasady minimalnego czasu wynika, że każdy z odcinków AC i CB musi być prostoliniowy, ponieważ w każdym z ośrodków prędkość jest stała.

Niechaj A' i B' oznaczają rzuty punktów A i B na płaszczyznę rozdzielającą ośrodki. Przez rzuty A' i B' przechodzi płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny rozdzielającej ośrodki. Punkt załamania C musi leżeć w tej płaszczyźnie na linii prostej $A'B'$, gdyż jeżeliby punkt C nie leżał na prostej $A'B'$, to jego rzut C' na tę prostą dawałby w każdym ośrodku krótszą drogę (gdyż $AC'<AC$ i $BC'<BC$). Widzimy więc, że punkty A i B oraz normalna do płaszczyzny rozdzielającej ośrodki w punkcie załamania C leżą w jednej płaszczyźnie. Rysunek 10.35 przedstawia tę płaszczyznę.

Wprowadźmy oznaczenia $AA'=a$, $BB'=b$, $A'B'=d$ i $A'C=x$. Obliczamy

$$AC=\sqrt{a^2+x^2}, \qquad BC=\sqrt{b^2+(d-x)^2}.$$

Czas t przebiegu drogi od A do C i od C do B wyraża się wzorem

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}.$$

Trzeba znaleźć taką wartość x, dla której czas t jest najmniejszy.

Wyznaczymy teraz najkrótszy czas przebycia drogi od A do B. Obliczmy pochodną

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

Pochodna dt/dx przybiera wartość 0, gdy

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}:\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}=v_1:v_2,$$

a ponieważ $x/\sqrt{a^2+x^2}=\sin\varphi_1$, $(d-x)/\sqrt{b^2+(d-x)^2}=\sin\varphi_2$, więc

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}=\frac{v_1}{v_2}.$$

Udowodniliśmy więc, że z prawa o przebywaniu drogi przez promień świetlny w minimalnym czasie wynika wzór (1).

Zadanie 10.42. Puszka do konserw w postaci walca o pojemności 54π ma być tak wykonana, by została zużyta minimalna ilość blachy (minimum powierzchni). Wyznaczyć promień r podstawy i wysokość h puszki.

Rozwiązanie. Objętość puszki $\pi r^2 h=54\pi$; stąd

$$h=\frac{54}{r^2}. \tag{1}$$

Pole powierzchni puszki obliczone według wzoru $S=2\pi r^2+2\pi rh$ wynosi

$$S=2\pi r^2+\frac{108\pi}{r}.$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dS}{dr}=4\pi r-\frac{108\pi}{r^2}.$$

Pochodna dS/dr równa się zeru, gdy $r^3=27$, czyli $r=3$. Dla obliczonej wartości r powierzchnia S jest najmniejsza, ponieważ pochodna dS/dr przechodzi przez zero od wartości ujemnych do dodatnich.

Podstawiając do równania (1) $r=3$ otrzymujemy $h=6$. Zatem puszka o danej pojemności ma minimalną powierzchnię, gdy średnica dna jest równa wysokości.

Zadanie 10.43. W kulę o promieniu R wpisany jest walec obrotowy. Obliczyć, przy jakiej wartości promienia r podstawy walca pole jego powierzchni bocznej S osiąga maksimum.

Rozwiązanie. Obliczmy wysokość h walca; mamy $h=2\sqrt{R^2-r^2}$. Zatem pole powierzchni bocznej walca wynosi

$$S=4\pi r\sqrt{R^2-r^2}.$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{dS}{dr}=4\pi\left(\sqrt{R^2-r^2}-\frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\right)=\frac{4\pi}{\sqrt{R^2-r^2}}(R^2-2r^2).$$

Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy $r=\frac{1}{2}R\sqrt{2}$. Gdy promień r zmienia się od wartości $r<\frac{1}{2}R\sqrt{2}$ do wartości $r>\frac{1}{2}R\sqrt{2}$, pochodna dS/dr zmienia znak z dodatniego na ujemny, a więc przy wartości $r=\frac{1}{2}R\sqrt{2}$ funkcja S osiąga maksimum, które wynosi

$$S=4\pi\cdot\tfrac{1}{2}R\sqrt{2}\sqrt{R^2-\tfrac{1}{2}R^2}=2\pi R^2.$$

Uwaga. Gdy $r=\frac{1}{2}R\sqrt{2}$, wówczas $2r=R\sqrt{2}$ i $h=R\sqrt{2}$, a więc przekrój osiowy walca o maksymalnej powierzchni bocznej, wpisanego w kulę, jest kwadratem.

Zadanie 10.44. W kulę o promieniu R jest wpisany prostopadłościan, którego podstawa ma pole S. Obliczyć wymiary prostopadłościanu o największej objętości.

Rozwiązanie. Oznaczmy boki podstawy prostopadłościanu przez x i y, a jego wysokość przez h (rys. 10.36). Mamy związki

$$xy=S,\qquad x^2+y^2+h^2=4R^2.$$

Objętość prostopadłościanu wynosi $V=Sh$. Ponieważ pole podstawy S jest stałe, więc objętość V będzie maksymalna, gdy wysokość h będzie możliwie największa.

Wyraźmy wysokość h w zależności od x; otrzymujemy

$$h=\sqrt{4R^2-x^2-\frac{S^2}{x^2}}$$

pod warunkiem, że $4R^2-x^2-\dfrac{S^2}{x^2}>0$, czyli

(1) $$-x^4+4R^2x^2-S^2>0.$$

Wartość h będzie największa, gdy funkcja

$$f(x)=4R^2-x^2-\frac{S^2}{x^2}$$

osiągnie maksimum.

Badamy pochodną

$$f'(x)=-2x+\frac{2S^2}{x^3}.$$

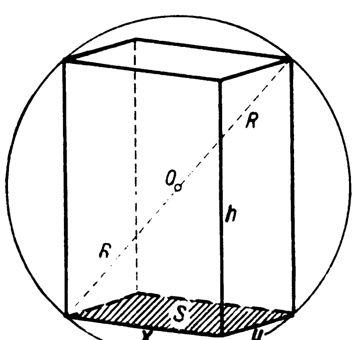
Przy dodatnich wartościach x pochodna $f'(x)$ staje się równa zeru, gdy $x=\sqrt{S}$. Zauważmy, że wówczas dla spełnienia warunku (1) potrzebne jest zastrzeżenie, że $S<2R^2$.

Badamy drugą pochodną

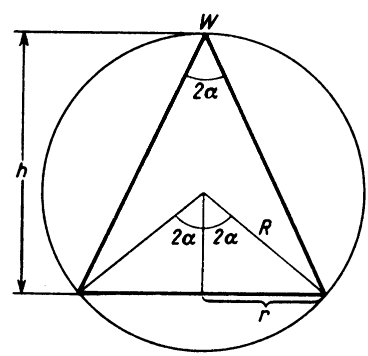
$$f''(x)=-2-\frac{6S^2}{x^4}.$$

Ponieważ druga pochodna jest ujemna, więc przy $x=\sqrt{S}$ funkcja $f(x)$ osiąga maksimum, a zarazem wysokość prostopadłościanu h i jego objętość V osiąga maksimum.

Podstawą maksymalnego prostopadłościanu jest kwadrat o polu S, a jego wysokość wynosi $h=\sqrt{2(2R^2-S)}$.



Rys. 10.36



Rys. 10.37

ZADANIE 10.45. W kulę o promieniu R wpisany jest stożek. Obliczyć, przy jakiej wartości kąta rozwarcia 2α stożek ma największą objętość.

Rozwiązanie. Oznaczmy promień podstawy stożka przez r, a wysokość przez h (rys. 10.37). Mamy

$$r=R\sin 2\alpha, \qquad h=r\operatorname{ctg}\alpha=R\sin 2\alpha\operatorname{ctg}\alpha=2R\cos^2\alpha.$$

Objętość stożka wynosi $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$, czyli

$$V=\tfrac{8}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^4\alpha.$$

Obliczmy pochodną $\dfrac{dV}{d\alpha}=\frac{8}{3}\pi R^3(2\sin\alpha\cos^5\alpha-4\sin^3\alpha\cos^3\alpha)$, czyli

$$\frac{dV}{d\alpha}=\tfrac{16}{3}\pi R^3\sin\alpha\cos^3\alpha(\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha).$$

W przedziale $0<\alpha<\frac{1}{2}\pi$ pochodna $dV/d\alpha$ przybiera wartość 0, gdy

$$\operatorname{tg}\alpha=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \text{czyli} \quad \alpha=35°16'.$$

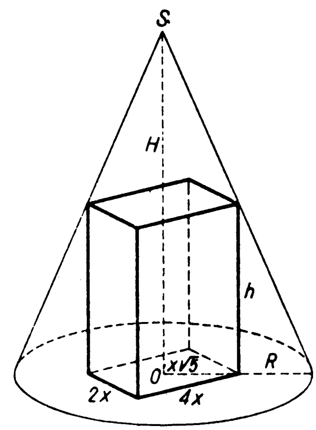
Gdy kąt α zmienia się od wartości $\alpha<35°16'$ do wartości $\alpha>35°16'$, pochodna $dV/d\alpha$ zmienia znak z dodatniego na ujemny (ponieważ w pierwszej ćwiartce cosinus maleje, a sinus rośnie), a więc objętość V osiąga maksimum.

A więc stożek wpisany w kulę ma największą objętość, gdy kąt rozwarcia jest 70°32'.

Łatwo obliczyć, że jeżeli $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, to $\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$ i $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$, a wówczas

$$r=\tfrac{2}{3}R\sqrt{2}, \quad h=\tfrac{4}{3}R.$$

Zadanie 10.46. W stożek obrotowy o promieniu podstawy R i wysokości H jest wpisany prostopadłościan. Stosunek boków podstawy prostopadłościanu wynosi 2. Obliczyć wymiary prostopadłościanu o maksymalnej objętości.



Rys. 10.38

Rozwiązanie. Oznaczmy boki podstawy prostopadłościanu odpowiednio przez $2x$ i $4x$, a wysokość przez h (rys. 10.38). Przekątna podstawy prostopadłościanu wynosi $2x\sqrt{5}$. Wysokość prostopadłościanu wyznaczmy z proporcji:

$$\frac{h}{H}=\frac{R-x\sqrt{5}}{R}, \quad \text{skąd} \quad h=H\frac{R-x\sqrt{5}}{R}.$$

Objętość prostopadłościanu wynosi $V=2x\cdot 4x\cdot h$, czyli

$$V=8Hx^2\frac{R-x\sqrt{5}}{R}.$$

Obliczmy pochodną $\dfrac{dV}{dx}=16Hx-\dfrac{24Hx^2\sqrt{5}}{R}$, czyli

$$\frac{dV}{dx}=\frac{8H}{R}x(2R-3x\sqrt{5}).$$

Pochodna dV/dx jest równa zeru, gdy $x=0$ albo gdy $x=\dfrac{2R}{3\sqrt{5}}$.

Obliczmy drugą pochodną

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{16H}{R}(R-3x\sqrt{5}).$$

Gdy $x=\dfrac{2R}{3\sqrt{5}}$ mamy $\dfrac{d^2V}{dx^2}<0$, więc funkcja V osiąga maksimum.

Przy tej wartości x promień koła opisanego na podstawie prostopadłościanu wynosi $x\sqrt{5}=\frac{2}{3}R$, a wysokość prostopadłościanu jest $h=\frac{1}{3}H$.

ZADANIE 10.47. Przy pomiarze natężenia prądu za pomocą busoli stycznych (rodzaj galwanometru) błąd procentowy pomiaru jest proporcjonalny do wielkości $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$, gdzie x jest kątem wychylenia wskazówki galwanometru. Przy jakim wychyleniu x błąd procentowy będzie najmniejszy?

Rozwiązanie. Obliczmy pochodną

$$\frac{d(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)}{dx}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}=-\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

Przyrównując pochodną do zera i badając drugą pochodną, otrzymujemy $x_{\min}=45°$

ZADANIE 10.48. Pole S przekroju pewnej części przewodzącej prąd i o natężeniu 5 amperów zmienia się według wzoru

$$S=\frac{2x^2+1}{x^2+1}\ \mathrm{mm}^2,$$

gdzie x jest współrzędną punktu, w którym badany jest przekrój S. Obliczyć, ile wynosi maksymalna gęstość natężenia prądu, która wyraża się wzorem $j=i/S$.

Rozwiązanie. Wyznaczamy gęstość natężenia prądu dla dowolnego punktu x przewodnika:

$$j=\frac{i}{S}=\frac{5}{\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}}=5\,\frac{x^2+1}{2x^2+1}.$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dj}{dx}=5\,\frac{2x(2x^2+1)-4x(x^2+1)}{(2x^2+1)^2}=-5\,\frac{2x}{(2x^2+1)^2}.$$

Pochodna dj/dx równa się zeru, gdy $x=0$. Gdy x przechodzi od wartości $x<0$ do wartości $x>0$, pochodna dj/dx zmienia znak z dodatniego na ujemny, a więc w punkcie $x=0$ funkcja j osiąga maksimum, które wynosi $5\ \mathrm{A/mm}^2$.

ZADANIE 10.49. Natężenie prądu I w obwodzie zawierającym oporność czynną R, indukcyjność L i pojemność C połączone w szereg wyraża się wzorem

$$I=\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}, \tag{1}$$

gdzie U jest napięciem prądu zmiennego przyłożonego do obwodu. Obliczyć, dla jakiej wartości pulsacji ω natężenie prądu I w danym obwodzie osiąga maksimum.

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną natężenia prądu I względem pulsacji ω:

$$\frac{dI}{d\omega}=\frac{-U}{2\sqrt{\left[R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^3}}\cdot 2\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\left(L+\frac{1}{\omega^2 C}\right).$$

Ponieważ U, R, L, C, ω są dodatnie, więc pochodna $dI/d\omega$ staje się równa zeru, gdy

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=0, \quad \text{skąd} \quad \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Zauważmy, że przy tej wartości pulsacji ω wyrażenie $R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2$ we wzorze (1) przybiera wartość najmniejszą, a więc natężenie prądu I osiąga wówczas maksimum równe $I=U/R$. Gdybyśmy fakt ten zauważyli od razu, to moglibyśmy się obyć bez obliczania pochodnej.

Zadanie 10.50. Prądnica o napięciu 110 V przesyła energię elektryczną linią o oporze 22 Ω. Przy natężeniu prądu i moc dostarczana odbiornikowi (w watach) wynosi $P=110i-22i^2$. Wyznaczyć maksymalną moc, jaka może być przesyłana tą linią.

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną

$$\frac{dP}{di}=110-44i.$$

Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy $i=\frac{110}{44}=2{,}5$. Przy natężeniu prądu $i=2{,}5$ A przesyłana moc jest największa:

$$P_{\max}=110\cdot 2{,}5-22\cdot 2{,}5^2=275-137{,}5=137{,}5 \text{ W}.$$

Zadanie 10.51. Źródło prądu o sile elektromotorycznej $e=30$ V i oporze wewnętrznym $r_w=2\,\Omega$ zasila odbiornik energii elektrycznej. Gdy natężenie prądu pobieranego wynosi i, wtedy moc dostarczana odbiornikowi wynosi $P=30i-2i^2$. Wyznaczyć natężenie prądu i, przy którym pobierana przez odbiornik moc będzie największa.

Rozwiązanie. Obliczmy pochodną

$$\frac{dP}{di}=30-4i.$$

Pochodna dP/di jest równa zeru, gdy $i=7{,}5$ A. Przy takim natężeniu prądu pobierana moc odbiornika jest największa:

$$P_{\max}=30\cdot 7{,}5-2\cdot 7{,}5^2=112{,}5 \text{ W}.$$

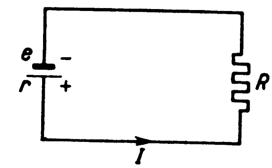
Zadanie 10.52. Obliczyć, przy jakiej oporności R odbiornik może pobierać największą moc elektryczną z ogniwa galwanicznego o sile elektromotorycznej e i oporze wewnętrznym r (rys. 10.39).

Rozwiązanie Natężenie pobieranego prądu wynosi

$$I=\frac{e}{r+R}. \tag{1}$$

Moc odbiornika jest $P=I^2R$. Po uwzględnieniu wzoru (1) otrzymujemy

$$P=\frac{Re^2}{(r+R)^2}.$$



Rys. 10.39

Obliczamy pochodną

$$\frac{dP}{dR}=e^2\frac{(r+R)^2-2R(r+R)}{(r+R)^4}=e^2\frac{r-R}{(r+R)^3}.$$

Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy $R=r$. Ponieważ przy $R=r$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny, więc przy $R=r$ funkcja P osiąga maksimum:

$$P_{max}=\frac{Re^2}{(2R)^2}=\frac{e^2}{4R}.$$

ZADANIE 10.53. Natężenie pola magnetycznego na osi symetrii pojedynczego zwoju o promieniu r zmienia się według wzoru

$$H=\frac{ir^2}{2(r^2+x^2)^{3/2}},$$

gdzie x jest to odległość od płaszczyzny zwoju, i — natężenie prądu. Jaki promień r powinna mieć zwojnica, ażeby przy danym natężeniu prądu i w odległości $x=0{,}03$ m od płaszczyzny zwojnicy było (możliwie) największe natężenie pola H.

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną

$$\frac{dH}{dr}=\frac{i}{2}\cdot\frac{2r(r^2+x^2)^{3/2}-\frac{3}{2}(r^2+x^2)^{1/2}2r^3}{(r^2+x^2)^3}=\frac{i(r^2+x^2)^{1/2}r(2x^2-r^2)}{2(r^2+x^2)^3}.$$

Przyrównując pochodną do zera i rozwiązując to równanie względem r otrzymujemy $r=0$ oraz $r=|x|\sqrt{2}$. Zbadajmy znak pierwszej pochodnej dH/dr, by wykazać, dla której z dwóch wartości na r istnieje maksimum; w celu zbadania znaku pochodnej dH/dr wystarczy zbadać znak wyrażenia $r(2x^2-r^2)$. Mamy

$$\frac{dH}{dr}>0 \text{ dla } 0<r<|x|\sqrt{2} \quad\text{oraz}\quad \frac{dH}{dr}<0 \text{ dla } r>|x|\sqrt{2}.$$

Zatem dla $r=|x|\sqrt{2}$ mamy maksimum funkcji H, a więc zwojnica powinna mieć promień $r=|x|\sqrt{2}=0{,}03\sqrt{2}\approx 0{,}042$ m.

ZADANIE 10.54. Mamy n ogniw galwanicznych, każde o sile elektromotorycznej e i oporze wewnętrznym r. Ogniwa te są ustawione szeregowo, w liniach połączonych równolegle po x ogniw w każdej linii i dają prąd, który przepływa przez odbiornik o oporze R. Natężenie prądu w tych warunkach wyraża się wzorem

$$I=\frac{xe}{\dfrac{x^2r}{n}+R}. \tag{1}$$

Zbadać, przy jakiej wartości x (gdy n jest dane) natężenie prądu w obwodzie będzie największe.

Rozwiązanie. Z sensu zadania wynika, że n i x są liczbami naturalnymi, przy czym x jest dzielnikiem liczby n. Załóżmy jednak, że x zmienia się w sposób ciągły i zbadajmy przebieg funkcji $I=f(x)$ wyrażonej wzorem (1).

Obliczamy pochodną

$$\frac{dI}{dx}=\frac{e\left(R-\dfrac{x^2r}{n}\right)}{\left(R+\dfrac{x^2r}{n}\right)^2}.$$

Pochodna równa się zeru, gdy $x=\sqrt{nR/r}$. Gdy x przechodzi przez tę wartość rosnąc od mniejszych wartości do większych, pochodna dI/dx zmienia znak z dodatniego na ujemny, a więc w punkcie $x=\sqrt{nR/r}$ funkcja $I=f(x)$ osiąga maksimum.

W praktyce dobiera się daną ilość ogniw n w taki sposób, żeby obliczona wartość $x=\sqrt{nR/r}$ była bliska jednego z dzielników liczby n. Jeżeli $x_1<x<x_2$, gdzie x_1 i x_2 są dzielnikami liczby n, to podstawiamy wartości x_1, x_2 do wzoru (1) i wybieramy tę z nich, która daje większe natężenie prądu.

ZADANIE 10.55. Dane jest równanie ruchu drgającego tłumionego w postaci

$$s=ae^{-\lambda t}\sin\omega t,$$

gdzie $a=2$ cm jest pierwotną amplitudą drgań, $\omega=0{,}01\ \mathrm{s}^{-1}$ jest pulsacją, a $\lambda=0{,}01\ \mathrm{s}^{-1}$ jest współczynnikiem tłumienia. Sporządzić wykres odchylenia s jako funkcji czasu t.

Rozwiązanie. Dana funkcja jest określona i ciągła przy wszystkich wartościach t. Obliczamy pochodną

$$\frac{ds}{dt}=ae^{-\lambda t}(\omega\cos\omega t-\lambda\sin\omega t).$$

Pochodna jest równa zeru, gdy $\operatorname{tg}\omega t=\omega/\lambda$. Podstawiając $\omega=0{,}01$ i $\lambda=0{,}01$ otrzymujemy równanie $\operatorname{tg}0{,}01t=1$, skąd

$$t=100(\tfrac{1}{4}\pi+k\pi)\qquad\text{gdzie}\qquad k=0,1,2,\ldots$$

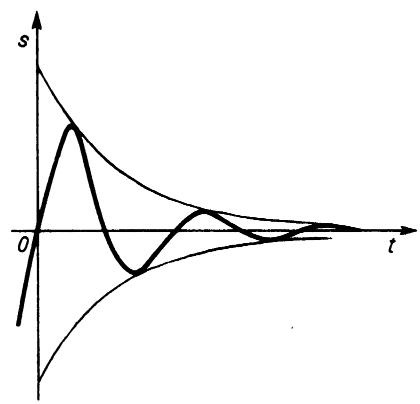
Pisząc pierwszą pochodną w postaci

$$\frac{ds}{dt}=0{,}02e^{-0{,}01t}(\cos 0{,}01t-\sin 0{,}01t)$$

obliczmy drugą pochodną. W wyniku otrzymamy $-0{,}0004e^{0{,}01t}\cos 0{,}01t$. Podstawiając wartości $t=100\cdot(\frac{1}{4}\pi+k\pi)$, zauważmy, że przy parzystych wartościach k druga pochodna d^2s/dt^2 jest ujemna, a więc odchylenie s osiąga maksimum; natomiast przy nieparzystych k druga pochodna jest dodatnia i odchylenie s osiąga minimum.

Zbadajmy jeszcze punkty, w których wykres funkcji przecina oś Ot. Zachodzi to wtedy, gdy $\sin\omega t=0$, czyli $t=100k'\pi$, gdzie $k'=0, 1, 2, \ldots$

Przebieg zmienności funkcji jest następujący. Przy $t=0$ jest $s=0$. Z biegiem czasu odchylenie s jest dodatnie i osiąga maksimum w punkcie $t=25\pi$; maksimum to wynosi $2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}\pi}$. Następnie wykres spada, przecina oś Ot w punkcie $t=100\pi$ i spadając dalej osiąga minimum przy $t=125\pi$; minimum to wynosi $-2\sqrt{2}e^{-5\pi/4}$. Potem wykres wznosi się, przecina oś Ot w punkcie $t=200\pi$ i w punkcie $t=225\pi$ osiąga maksimum równe $2\sqrt{2}e^{-9\pi/4}$ i tak dalej. Będzie to gasnąca linia falista (rys. 10.40).



Rys. 10.40

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}\pi}=b,\quad e^{-\pi}=q,\quad \text{czyli}\quad b=0{,}645,\ q=0{,}0432.$$

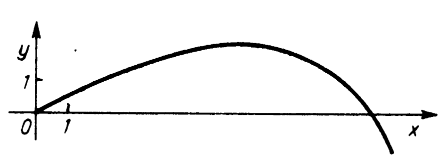
Wtedy otrzymujemy $s(0)=0$, $s(25\pi)=b$, $s(100\pi)=0$, $s(125\pi)=-bq$, $s(200\pi)=0$, $s(225\pi)=bq^2$, $s(300\pi)=0$, $s(325\pi)=-bq^3$.

Zauważmy, że tłumienie jest bardzo gwałtowne, gdyż $b=0{,}645$ cm, $bq=0{,}028$ cm, a $bq^2=0{,}001$ cm.

Zadanie 10.56. Tor pocisku wystrzelonego w punkcie (0, 0) (rys. 10.41) jest określony równaniami parametrycznymi

$$x=40000(1-e^{-0{,}02t}),\qquad y=45000(1-e^{-0{,}02t})-500t,$$

gdzie t jest to czas w sekundach, x — odległość pozioma pocisku w momencie t od punktu (0, 0) wyrażona w metrach, a y jest to wysokość wzniesienia pocisku w momencie t. Obliczyć pochodne dy/dx i d^2y/dx^2. Następnie obliczyć, po jakim czasie i w jakiej odległości pocisk osiągnie największą wysokość, i podać tę wysokość.



Rys. 10.41

Rozwiązanie. Obliczamy pierwszą pochodną; mamy

$$\frac{dx}{dt}=40000\cdot 0{,}02e^{-0{,}02t}=800e^{-0{,}02t},\qquad \frac{dy}{dt}=45000\cdot 0{,}02e^{-0{,}02t}-500=900e^{-0{,}02t}-500$$

zatem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{900e^{-0,02t}-500}{800e^{-0,02t}}=\tfrac{9}{8}-\tfrac{5}{8}e^{0,02t}$$

Obliczamy drugą pochodną; ponieważ $\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}=-\tfrac{1}{80}e^{0,02t}$ więc

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{-\frac{1}{80}e^{0,02t}}{800e^{-0,02t}}=-\frac{1}{64000}e^{0,04t}$$

Moment największego wzniesienia pocisku znajdziemy rozwiązując równanie $dy/dt=0$ (albo $dy/dx=0$), czyli

$$900e^{-0,02t}-500=0, \quad \text{skąd} \quad e^{-0,02t}=\tfrac{5}{9}$$

Aby rozwiązać to równanie, stosujemy logarytmy dziesiętne; otrzymujemy

$$-0,02t\log e=\log\tfrac{5}{9}, \quad \text{czyli} \quad -0,02t\cdot 0,4343=-0,2553.$$

Stąd

$$t=50\cdot\tfrac{0,2553}{0,4343}\approx 29,4 \text{ s}.$$

Pozostaje do obliczenia wartość $x=40000(1-e^{-0,02t})$, gdzie $e^{-0,02t}=\frac{5}{9}$; otrzymujemy

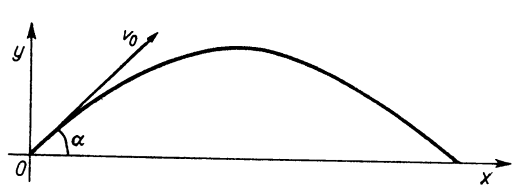
$$x=40000\cdot(1-\tfrac{5}{9})=40000\cdot\tfrac{4}{9}\approx 17800 \text{ m}.$$

Wreszcie

$$y=45000\cdot\tfrac{4}{9}-500\cdot 29,4=5300 \text{ m}.$$

A więc pocisk osiągnie najwyższy poziom po upływie $t=29,4$ s od momentu wystrzału w odległości poziomej 17800 m i na wysokości 5300 m.

ZADANIE 10.57. Działo, którego lufa jest nachylona do płaszczyzny poziomej pod kątem α, wyrzuca pocisk z prędkością początkową v_0 (rys. 10.42). Znając przyśpieszenie



Rys. 10.42

ziemskie g wyznaczyć kąt α, przy którym pocisk padnie na płaszczyznę poziomą w odległości największej (oporu powietrza i działania wiatru nie bierze się pod uwagę):

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t, \quad y=v_0\sin\alpha\cdot t-\tfrac{1}{2}gt^2,$$

gdzie t oznacza czas liczony od momentu wystrzału.

Rozwiązanie. Aby znaleźć moment upadku pocisku na płaszczyznę poziomą, należy rozwiązać równanie $y=0$, czyli

$$v_0 \sin\alpha \cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0, \qquad \text{skąd} \qquad t=\frac{2v_0}{g}\sin\alpha.$$

Wówczas odległość x wynosi

$$x = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Jest rzeczą widoczną, że wartość x będzie największa, gdy $\sin 2\alpha$ będzie największe, czy gdy $\sin 2\alpha = 1$, a to osiągniemy biorąc $\alpha = 45°$.

Zadania

Znaleźć ekstrema następujących funkcji oraz punkty przegięcia odpowiadających im krzywych (zad. 10.58 - 10.69):

10.58. $y=x^3+12x^2+36x-50.$

10.59. $y=2x^3-9x^2-24x-12.$

10.60. $y=x^3-6x^2+9x-2.$

10.61. $y=-x^3+x^2.$

10.62. $y=x^3+x+1.$

10.63. $y=x(3-x)^2.$

10.64. $y=x^4-8x^3+22x^2-24x+12.$

10.65. $y=x^5-5x^4+5x^3+1.$

10.66. $y=x+\dfrac{4}{x}.$

10.67. $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}.$

10.68. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}.$

10.69. $y=x\sqrt{4-x^2}.$

10.70. Wykazać, że krzywa $y(x^2+a^2)=a^2(a-x)$ ma trzy punkty przegięcia leżące na jednej prostej.

10.71. Dobrać α tak, aby krzywa $y=x^3+\alpha x^2+1$ miała punkt przegięcia przy $x=1$.

10.72. Zbadać, przy jakiej wartości α krzywa $y=x^4+\alpha x^3+\frac{3}{2}x^2+1$ będzie wklęsła.

Znaleźć ekstrema następujących funkcji i równania asymptot odpowiadających im krzywych (zad. 10.73 - 10.81):

10.73. $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}.$

10.74. $y=\dfrac{2x+1}{x-4}.$

10.75. $y=\dfrac{6x}{x^2+2x+4}.$

10.76. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}.$

10.77. $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}.$

10.78. $y=\dfrac{x^3+x}{x^4+x^2+1}.$

10.79. $y=\dfrac{(x+2)^4}{(x+1)^3}$.

10.80. $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$.

10.81. $y=4x-\operatorname{tg}x$ w przedziale $(-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi)$.

Zbadać przebieg zmienności następujących funkcji (zad. 10.82 - 10.124):

10.82. $y=x^3+x^2-16x-16$.

10.83. $y=-x^3+9x$.

10.84. $y=x(x-1)^2$.

10.85. $y=x^4-\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}$.

10.86. $y=x^2(x^2-4)^3$.

10.87. $y=(x+3)(x-2)^2(x-4)$.

10.88. $y=2\ x\ -x^2$.

10.89. $y=\dfrac{3x-1}{2x+1}$.

10.90. $y=\dfrac{5}{(2x+1)^2}$.

10.91. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

10.92. $y=x+\dfrac{4}{x-5}$.

10.93. $y=\dfrac{(x+1)^2}{2x}$.

10.94. $y=\dfrac{x^2-x-4}{x-1}$.

10.95. $y=\dfrac{x^2+2x+25}{(x+1)^2}$.

10.96. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$.

10.97. $y=\dfrac{15x^2-13x-20}{8x^2+10x-7}$.

10.98. $y=\dfrac{x^4}{2-x^3}$.

10.99. $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

10.100. $y=\dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$.

10.101. $y=x+2\sqrt{-x}$.

10.102. $y=\sqrt[3]{x^2}-1$.

10.103. $y=1-\sqrt[3]{(x-4)^2}$.

10.104. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.

10.105. $y=x^{2/3}+(x-2)^{2/3}$.

10.106. $y=(x+2)^{2/3}-(x-2)^{2/3}$.

10.107. $y=x\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

10.108. $y=x\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$.

10.109. $y=x\sqrt{4x-x^2}$.

10.110. $y=x\sqrt{-x^2+8x+14}$.

10.111. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

10.112. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

10.113. $y=x^2\sqrt{36-x^2}$.

10.114. $y=\cos^2 x+2\sin^2 x$.

10.115. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

10.116. $y=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x$.

10.117. $y=2\sin(x+\frac{1}{6}\pi)\cos(x-\frac{1}{3}\pi)$.

10.118. $y=\sin x\sin(x+\frac{1}{3}\pi)$.

10.119. $y=\sin 2x+2\sin(\frac{1}{4}\pi-x)$.

10.120. $y=\sin^2 x\cos x$.

10.121. $y=\sin x\cos 2x$.

10.122. $y=\sqrt{\sin x^2}$.

10.123. $y=\sqrt{1-\cos x}$.

10.124. $y=x-2\operatorname{arctg} x$.

Układ współrzędnych Oxy leży w płaszczyźnie pionowej, przy czym oś Ox jest pozioma, a oś Oy – pionowa. Ruch punktu jest wyznaczony równaniami parametrycznymi:

10.125. $x=2t+5$, $y=t^3-3t^2+4$.

10.126. $x=t^2+2t$, $y=t^3$.

10.127. $x=2\sin t$, $y=\sin 2t$.

Dla każdego z tych przypadków wyznaczyć pochodne dy/dx i drugie pochodne d^2y/dx^2 i obliczyć wartości tych pochodnych w punktach, w których tor osiąga największą i najmniejszą wysokość.

10.128. Dany odcinek a podzielić na takie dwa odcinki, żeby pole prostokąta zbudowanego z tych odcinków było największe.

10.129. W trójkąt o podstawie a i wysokości h wpisano prostokąt w ten sposób, że jeden z boków prostokąta leży na danej podstawie trójkąta, a dwa pozostałe wierzchołki prostokąta leżą na pozostałych bokach trójkąta. Zbadać przebieg zmienności pola S tego prostokąta.

10.130. W dany kwadrat o boku a wpisano prostokąt w ten sposób, że każdy wierzchołek prostokąta leży na jednym boku kwadratu i dwa boki prostokąta są równoległe do przekątnej kwadratu. Zbadać przebieg zmienności pola S tego prostokąta.

10.131. W dane koło o promieniu r wpisano prostokąt. Zbadać przebieg zmienności pola S tego prostokąta.

10.132. W dane koło o promieniu r wpisano trójkąt równoramienny. Zbadać przebieg zmienności pola S tego trójkąta.

10.133. W dane półkole o promieniu r wpisano trójkąt równoramienny, którego wierzchołek leży w środku koła. Zbadać przebieg zmienności pola S tego trójkąta.

10.134. Zbadać przebieg zmienności pola S trapezu wpisanego w dane półkole o promieniu r, gdy jedna z podstaw trapezu jest średnicą danego półkola.

10.135. W elipsę $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ wpisano prostokąt o bokach równoległych do osi elipsy. Zbadać przebieg zmienności pola S tego prostokąta.

10.136. W daną półkulę o promieniu r wpisano stożek, którego wierzchołek leży w środku kuli, a podstawa jest równoległa do podstawy półkuli. Zbadać przebieg zmienności objętości V tego stożka.

10.137. W daną kulę o promieniu r wpisano prawidłowy ostrosłup czworokątny Zbadać przebieg zmienności objętości V tego ostrosłupa.

10.138. Na kuli o danym promieniu r opisano stożek obrotowy. Zbadać przebieg zmienności objętości V tego stożka.

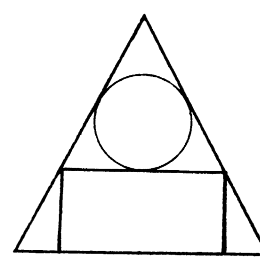
10.139. Zbadać przebieg zmienności objętości V walca wpisanego w kulę o promieniu R.

10.140. Zbadać przebieg zmienności powierzchni bocznej P walca wpisanego w kulę o promieniu R.

10.141. Nad płaszczyzną D znajduje się punktowe źródło światła S. Na jakiej wysokości h należy je zawiesić, aby w punktach płaszczyzny D w danej odległości a od rzutu punktu S na płaszczyznę D było najjaśniej?

Wskazówka. Jeżeli punktowe źródło światła znajduje się w odległości r od powierzchni oświetlonej i promienie światła tworzą z tą powierzchnią kąt α, to oświetlenie (ilość światła padającego na jednostkę powierzchni) jest proporcjonalne do $(\sin\alpha)/r^2$.

10.142. W stożek o promieniu podstawy R i tworzącej $2R$ wpisano walec i kulę w sposób podany na rysunku 10.43. Kiedy suma objętości V walca i kuli będzie ekstremalna?



Rys. 10.43

10.143. Określić najmniejszą wysokość drzwi w pionowej wieży $ABCD$, tak aby można było przez nie wnieść żelazny drąg o długości l, którego koniec ślizga się wzdłuż prostej pionowej AB. Szerokość wieży $d<l$.

10.144. Miejscowości A i B znajdują się na przeciwległych brzegach rzeki. Wiedząc, że goniec porusza się na brzegu z szybkością k razy większą niż na wodzie, określić, pod jakim kątem powinien on przeciąć rzekę, aby w najkrótszym czasie dostarczyć wiadomość z A do B. Szerokość rzeki wynosi h m, a odległość A od B (wzdłuż brzegu) równa się d m.

10.145. Z trzech desek o szerokości a, a i $2a$ należy zrobić żłób o największej objętości. Podać formę przekroju poprzecznego tego żłobu.

10.146. Z punktu A leżącego przy torze kolejowym należy przenieść ładunek do punktu C znajdującego się w odległości l od toru. Z jakiego punktu P toru kolejowego należy poprowadzić szosę, aby transport ładunku z A do C był najtańszy, jeżeli koszt przewozu koleją 1 kg na odległość 1 km równy jest α, a szosą β $(\beta>\alpha)$.

10.147. Środki trzech kul sprężystych A, B, C położone są na jednej prostej. Kula A o masie M uderza z prędkością v kulę B, która z kolei uderza kulę C o masie m. Jaka powinna być masa kuli B, aby kula C uzyskała maksymalną prędkość.

Rczdział XI

SZEREGI POTĘGOWE. ROZWIJANIE FUNKCJI W SZEREG POTĘGOWY

§ 11.1. SZEREG POTĘGOWY

Szereg, w którym wyrazy są funkcjami zmiennej x, tzn. szereg postaci

(11.1.1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

nosi nazwę *szeregu funkcyjnego.*

Mówimy, że szereg funkcyjny (11.1.1) jest *jednostajnie zbieżny* w zbiorze A, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie N, że dla każdego $n \geqslant N$ oraz dla każdego $x \in A$ zachodzi nierówność

$$\left| \sum_{k=0}^{n} u_k(x) - S(x) < \right| \varepsilon,$$

gdzie $S(x)$ oznacza sumę szeregu (11.1.1).

Szereg funkcyjny postaci

(11.1.2)
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

nosi nazwę *szeregu potęgowego.*

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego (11.1.2) nazywamy taką liczbę $R \geqslant 0$, że dany szereg jest zbieżny dla wartości x spełniających nierówność $|x| < R$, a dla wartości $|x| > R$ jest rozbieżny; natomiast dla $x = -R$ i dla $x = R$ szereg może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny. Przedział $-R < x < R$ nazywamy *przedziałem zbieżności.*

Jeżeli dany szereg jest zbieżny dla każdej wartości x, to mówimy, że promień zbieżności R jest nieskończenie wielki, i piszemy $R = +\infty$. Jeżeli dany szereg dla każdej wartości $x \neq 0$ jest rozbieżny, to mówimy, że $R = 0$. Dowodzi się, że zawsze istnieje skończony lub nieskończony promień zbieżności szeregu potęgowego..

Zanotujemy twierdzenia:

(11.1.3) *Jeżeli dla danego szeregu potęgowego* (11.1.2) *istnieje*

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g \neq 0,$$

to promień zbieżności tego szeregu wynosi $R = 1/g$. *Jeżeli zaś* $g = 0$, *to* $R = +\infty$, *a jeżeli* $g = +\infty$, *to* $R = 0$.

Jest to wniosek z kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów.

(11.1.4) *Jeżeli dla danego szeregu potęgowego* (11.1.2) *istnieje*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = s \neq 0,$$

to promień zbieżności jest $R=1/s$. *Jeżeli zaś* $s=0$, *to* $R=+\infty$, *a jeżeli* $s=+\infty$, *to* $R=0$.

Jest to wniosek z kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów.

Będziemy też rozpatrywali ogólniejszą postać szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \ldots + a_n(x-b)^n + \ldots, \tag{11.1.5}$$

który jest zbieżny dla $|x-b|<R$, tj. dla x spełniających nierówność $b-R<x<b+R$. Gdy $b=0$, otrzymujemy postać (11.1.2) szeregu potęgowego.

(11.1.6) TWIERDZENIE O RÓŻNICZKOWANIU. *Jeżeli szereg potęgowy* (11.1.5) *ma promień zbieżności* R, *a suma jego równa się* $f(x)$, *to szereg potęgowy z pochodnych wyrazów szeregu pierwotnego*

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-b)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-b) + 3a_3(x-b)^2 + \ldots + na_n(x-b)^{n-1} + \ldots$$

ma ten sam promień zbieżności R, *a suma jego* $g(x)$ *jest pochodną sumy szeregu pierwotnego*:

$$g(x) = f'(x) \quad dla \quad |x| < R.$$

Jeżeli natomiast chodzi o wartości brzegowe $x=-R$ *lub* $x=+R$, *to mogą zachodzić trzy możliwości*: 1) *oba szeregi są zbieżne*, 2) *oba rozbieżne*, 3) *szereg* $\sum a_n(x-b)^n$ *zbieżny, a szereg* $\sum na_n(x-b)^{n-1}$ *rozbieżny.*

(11.1.7) TWIERDZENIE O JEDNOZNACZNOŚCI. *Jeżeli dwa szeregi potęgowe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-b)^n,$$

odpowiednio o promieniach zbieżności $R_1>0$ *i* $R_2>0$, *mają tę samą sumę dla* $|x-b|<r$, *gdzie* $0<r\leqslant \min(R_1, R_2)$([1]), *to ich wszystkie współczynniki są odpowiednio równe, tj.*

$$a_0 = c_0, \quad a_1 = c_1, \quad a_2 = c_2, \quad \ldots, \quad a_n = c_n, \quad \ldots,$$

czyli jest to jeden i ten sam szereg.

ZADANIE 11.1. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

oraz zbieżność szeregu utworzonego z pochodnych wyrazów tego szeregu.

([1]) min (R_1, R_2) oznacza mniejszą z liczb R_1, R_2 lub ich wspólną wartość, gdy są równe.

Rozwiązanie. Mamy tu $a_n = 1/n^2$, $a_{n+1} = 1/(n+1)^2$. Obliczmy promień zbieżności

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1, \quad \text{czyli} \quad R = 1.$$

Dla $x = 1$ mamy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; jest to szereg harmoniczny rzędu $\alpha = 2$, a więc jest to szereg zbieżny. Dla $x = -1$ mamy szereg przemienny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, który jest (na podstawie poprzedniego) bezwzględnie zbieżny.

Rozpatrzmy teraz szereg utworzony z pochodnych wyrazów szeregu pierwotnego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots$$

W szeregu tym mamy $a = 1/(n+1)$, $a_{n+1} = 1/(n+2)$, a więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1, \quad \text{czyli} \quad R = 1,$$

co wiadome było z góry na podstawie twierdzenia (11.1.6).

Jeżeli $x = 1$, to szereg utworzony z pochodnych wyrazów badanego szeregu przybierze postać $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; jest to szereg harmoniczny, a więc jest rozbieżny. Dla $x = -1$ mamy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; jest to szereg anharmoniczny, a więc jest zbieżny.

Zadanie 11.2. Znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

Rozwiązanie. Mamy tu $a_n = n$, $a_{n+1} = n+1$, a więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad \text{czyli} \quad R = 1.$$

Gdy $x = 1$, mamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n$ rozbieżny, ponieważ wyraz ogólny rośnie nieograniczenie, a gdy $x = -1$, otrzymujemy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$, który również jest rozbieżny.

Zadanie 11.3. Znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Rozwiązanie. Mamy tu $a_n = 1/n!$, $a_{n+1} = 1/(n+1)!$, a więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \quad \text{czyli} \quad R = +\infty,$$

tzn. szereg ten jest zbieżny dla każdego x.

ZADANIE 11.4. Znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n} x^n = \frac{1}{2}x + \frac{2^2}{2^2}x^2 + \frac{3^3}{2^3}x^3 + \frac{4^4}{2^4}x^4 + \dots$$

Rozwiązanie. Mamy tu $a_n = n^n/2^n$. Stosujemy kryterium Cauchy'ego (11.1.4); mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = +\infty, \qquad \text{czyli} \qquad R=0,$$

a więc szereg jest rozbieżny dla każdej wartości $x \neq 0$.

ZADANIE 11.5. Znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left(\sin \frac{1}{n}\right) = x \sin 1 + x^2 \sin \tfrac{1}{2} + x^3 \sin \tfrac{1}{3} + \dots$$

Rozwiązanie. Mamy tu $a_n = \sin \dfrac{1}{n}$, $a_{n+1} = \sin \dfrac{1}{n+1}$, a więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \dfrac{1}{n+1}}{\sin \dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\dfrac{1}{n}}{\sin \dfrac{1}{n}} \cdot \frac{\sin \dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n+1}} \; \frac{n}{n+1} \right) = 1, \qquad \text{czyli} \qquad R=1.$$

Gdy $x=1$, otrzymujemy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{1}{n}$ (por. zad. 3.10) rozbieżny, a gdy $x=-1$, otrzymujemy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \dfrac{1}{n}$ zbieżny na podstawie kryterium Leibniza.

ZADANIE 11.6. Znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n) x^n = 3 + x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + \dots$$

Rozwiązanie. Z postaci szeregu widać bezposrednio, że stosunek a_{n+1}/a_n przybiera na przemian wartości $\frac{1}{3}$ i 3, nie możemy więc stosować twierdzenia (11.1.3). Możemy jednak zastosować twierdzenie (11.1.4); na podstawie wzoru $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ dla $a > 0$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, \qquad \text{czyli} \qquad R=1.$$

Gdy $x=-1$ albo $x=1$, szereg jest rozbieżny.

ZADANIE 11.7. Znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) x^n. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Stosowanie podanych wzorów na promień zbieżności nie daje tutaj rezultatu. Spróbujmy zastosować kryterium bezwzględnej zbieżności. W tym celu badamy zbieżność szeregu utworzonego z bezwzględnych wartości wyrazów danego szeregu. Wiemy, że *wartość bezwzględna iloczynu równa się iloczynowi wartości bezwzględnych wszystkich czynników*, więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(\sin n)\, x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\sin n| \cdot |x|^n. \tag{2}$$

Na podstawie nierówności $|\sin n| \leqslant 1$ mamy $|\sin n| \cdot |x|^n \leqslant |x|^n$. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^n$, jako szereg geometryczny, jest zbieżny dla $|x|<1$, a więc na podstawie kryterium porównawczego szereg (2) jest zbieżny, a tym samym szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny dla $|x|<1$. Wykazaliśmy więc, że promień zbieżności R szeregu (1) spełnia nierówność $R \geqslant 1$.

Gdy $x=1$, szereg (1) przybiera postać $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$. Szereg ten jest rozbieżny, gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu, tzn. nie istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$. Z rozbieżności tego szeregu wynika nierówność $R \leqslant 1$, co w połączeniu z nierównością $R \geqslant 1$, daje $R=1$.

Na koniec zauważmy, że dla $x=-1$ szereg (1) jest rozbieżny.

§ 11.2. ROZWIJANIE FUNKCJI W SZEREG POTĘGOWY

Jeżeli funkcja $f(x)$ ma n-tą pochodną $f^{(n)}(x)$ w pewnym przedziale domkniętym zawierającym punkt a, wówczas dla każdego x z tego przedziału ma miejsce następujący *wzór Taylora*:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(x-a)^n, \tag{11.2.1}$$

gdzie $a<c_n<x$ przy $x>a$ i $x<c_n<a$ przy $x<a$.

We wzorze Taylora przedstawiamy funkcję jako sumę o $n+1$ składnikach (skończona ilość).

W ostatnim wyrazie występuje liczba c_n, której wartość jest na ogół dla każdego x i n inna. Więc c_n jest nieznaną bliżej funkcją x i należałoby właściwie pisać $c_n(x)$. Oznaczenie c_n lub c jest skrótem. Ostatni wyraz we wzorze Taylora oznaczamy przez R_n:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(x-a)^n$$

i nazywamy *resztą wzoru Taylora*. Reszta przez nas podana nosi nazwę *reszty postaci Lagrange'a*.

Szereg potęgowy postaci

$$(11.2.2)\quad f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots,$$

lub krócej:

$$(11.2.2')\quad f(x)=f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

nazywamy *szeregiem Taylora*. Szereg ten przedstawia rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg potęgowy (por. § 11.1).

Zanotujmy twierdzenie:

(11.2.3) *Funkcja jest rozwijalna w szereg Taylora w przedziale $(a-\delta,\ a+\delta)$, jeżeli w tym przedziale*

1° *funkcja ma pochodne każdego rzędu,*

2° $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$, *gdzie R_n oznacza resztę szeregu, podaną we wzorze Taylora.*

Uwaga. Warunek 2° jest w szczególności spełniony, jeżeli wszystkie pochodne $f^{(n)}(x)$ są *wspólnie ograniczone w przedziale* $(a-\delta,\ a+\delta)$, tzn. jeżeli istnieje taka liczba M, że

$$|f^{(n)}(x)|<M$$

dla dowolnego n i każdego x zawartego w przedziale $(a-\delta,\ a+\delta)$.

Jeżeli we wzorze Taylora (11.2.1) przyjmiemy $a=0$, otrzymamy tzw. *wzór Maclaurina*

$$(11.2.4)\quad f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}x^n.$$

W podobny sposób ze wzoru (11.2.2) otrzymujemy tzw. *szereg Maclaurina*

$$(11.2.5)\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots,$$

lub krócej:

$$(11.2.5')\quad f(x)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

(11.2.6) TWIERDZENIE O CAŁKOWANIU SZEREGÓW (¹). *Jeżeli szereg funkcyjny*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

gdzie funkcje $u_n(x)$ są ciągłe w przedziale $a\leqslant x\leqslant b$, jest jednostajnie zbieżny w tym przedziale do sumy $f(x)$, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx$$

jest zbieżny do sumy $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

(¹) Zadania, w których będzie zastosowane to twierdzenie, oznaczymy gwiazdką *. Czytelnik, który nie zna jeszcze rachunku całkowego, może te zadania pominąć.

Ponieważ szeregi potęgowe (11.1.2) są jednostajnie zbieżne dla $|x|\leqslant r<R$ (gdzie R jest promieniem zbieżności), więc z twierdzenia tego wynika, że są całkowalne w przedziale $|x|\leqslant r$.

ZADANIE 11.8. Rozwinąć na szerog Maclaurina funkcję $f(x)=e^x$.

Rozwiązanie. Ponieważ pochodna funkcji e^x jest równa e^x, więc

$$f^{(n)}(x)=e^x, \quad \text{skąd} \quad f^{(n)}(0)=1.$$

Podstawiając do wzoru na szereg Maclaurina (11.2.5) otrzymujemy

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Łatwo wykazać (por. zad. 11.9), że promień zbieżności tego szeregu jest $R=+\infty$.

Należy jeszcze wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$. Otóż warunek ten jest spełniony w każdym przedziale $(-\delta, \delta)$ na podstawie uwagi na stronicy 236, ponieważ dla każdego x z tego przedziału mamy $|e^x|\leqslant e^\delta=M$.

Uwaga. Szereg

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

zbieżny dla każdego x, można przyjąć za definicję funkcji e^x (określonej w ten sposób dla każdego x). Z definicji tej widać wprost, że

$$e^0=1, \quad \frac{d}{dx}(e^x)=e^x.$$

ZADANIE 11.9. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x)=\sin x$.

Rozwiązanie. Na podstawie podanego w zadaniu 6.219 wzoru

$$f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\tfrac{1}{2}\pi)$$

łatwo otrzymujemy dla $k=0, 1, 2, \ldots$ pochodne:

$$\begin{aligned}
f^{(4k+1)}(x)&=\cos x, &&\text{skąd} && f^{(4k+1)}(0)=1,\\
f^{(4k+2)}(x)&=-\sin x, &&\text{skąd} && f^{(4k+2)}(0)=0,\\
f^{(4k+3)}(x)&=-\cos x, &&\text{skąd} && f^{(4k+3)}(0)=-1,\\
f^{(4k)}(x)&=\sin x, &&\text{skąd} && f^{(4k)}(0)=0.
\end{aligned}$$

Podstawiając obliczone wartości pochodnych oraz wartość $f(0)=0$ do wzoru Maclaurina otrzymujemy rozwinięcie

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}-\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}+\ldots$$

Łatwo obliczyć, że $R=+\infty$.

Ponieważ wszystkie pochodne funkcji $f(x)=\sin x$ są ograniczone, jest bowiem spełniony warunek $|f^{(n)}(x)|\leqslant 1$ dla dowolnego n i każdego x, więc (na podstawie uwagi na stronicy 236) jest spełniony warunek $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$.

ZADANIE 11.10. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x)=\cos x$.

Rozwiązanie. Pochodna dowolnego rzędu n wyraża się wzorem

$$f^{(n)}(x)=\cos(x+n\cdot\tfrac{1}{2}\pi).$$

Otrzymujemy stąd pochodne:

$$\begin{aligned}
f^{(4k+1)}(x)&=-\sin x, &&\text{skąd}\quad f^{(4k+1)}(0)=0,\\
f^{(4k+2)}(x)&=-\cos x, &&\text{skąd}\quad f^{(4k+2)}(0)=-1,\\
f^{(4k+3)}(x)&=\sin x, &&\text{skąd}\quad f^{(4k+3)}(0)=0,\\
f^{(4k)}(x)&=\cos x, &&\text{skąd}\quad f^{(4k)}(0)=1.
\end{aligned}$$

Dołączając warunek $f(0)=1$ otrzymujemy poszukiwane rozwinięcie

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{x^{4k}}{(4k)!}-\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}+\ldots$$

Łatwo wyliczyć, że $R=+\infty$. Warunek $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$ jest spełniony, gdyż funkcje $\cos x$ i wszystkie jej pochodne są co do bezwzględnej wartości nie większe od 1.

ZADANIE 11.11. Rozwinąć w szereg Taylora funkcję

$$f(x)=10x^5+7x^4-12x^3+x^2-3x+5$$

w otoczeniu punktu $x=1$.

Rozwiązanie. Obliczamy wartości pochodnych w punkcie $x=1$:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=50x^4+28x^3-36x^2+2x-3, &&\text{skąd}\quad f'(1)=41,\\
f''(x)&=200x^3+84x^2-72x+2, &&\text{skąd}\quad f''(1)=214,\\
f'''(x)&=600x^2+168x-72, &&\text{skąd}\quad f'''(1)=696,\\
f^{(4)}(x)&=1200x+168, &&\text{skąd}\quad f^{(4)}(1)=1368,\\
f^{(5)}(x)&=1200, &&\text{skąd}\quad f^{(5)}(1)=1200,
\end{aligned}$$

a wszystkie dalsze pochodne są równe zeru. Obliczamy również

$$f(1)=10+7-12+1-3+5=8$$

i po podstawieniu do wzoru (11.2.2) otrzymujemy

$$f(x)=8+\frac{41}{1!}(x-1)+\frac{214}{2!}(x-1)^2+\frac{696}{3!}(x-1)^3+\frac{1368}{4!}(x-1)^4+\frac{1200}{5!}(x-1)^5,$$

a po uproszczeniu

$$f(x)=8+41(x-1)+107(x-1)^2+116(x-1)^3+57(x-1)^4+10(x-1)^5.$$

ZADANIE 11.12. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x)=(1+x)^s,$$

gdzie s jest dowolną liczbą rzeczywistą różną od zera.

Rozwiązanie. Obliczamy kolejne pochodne funkcji:

$$f'(x)=s(1+x)^{s-1}, \quad \text{skąd} \quad f'(0)=s;$$

$$f''(x)=s(s-1)(1+x)^{s-2}, \quad \text{skąd} \quad f''(0)=s(s-1),$$

$$f'''(x)=s(s-1)(s-2)(1+x)^{s-3}, \quad \text{skąd} \quad f'''(0)=s(s-1)(s-2),$$

. . . .

i ogólnie

$$f^{(n)}(x)=s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)(1+x)^{s-n}$$

skąd

$$f^{(n)}(0)=s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1).$$

Dołączając $f(0)=1$ otrzymujemy poszukiwane rozwinięcie

$$(1) \qquad 1+\frac{s}{1!}x+\frac{s(s-1)}{2!}x^2+\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3+\dots$$

Biorąc stosunek a_{n+1}/a_n po uproszczeniu otrzymujemy:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{s-n}{n+1}\right|\to 1, \quad \text{gdy} \quad n\to\infty;$$

stąd na podstawie twierdzenia (11.1.3) promień zbieżności $R=1$.

Jeżeli s jest liczbą naturalną, to rozwinięcie (1) zawierać będzie skończoną ilość $s+1$ wyrazów, gdyż funkcja, którą rozwijamy, jest wówczas wielomianem stopnia s i tym samym ma tylko s pochodnych różnych od zera (por. zad. 11.11). Jeżeli s nie jest liczbą naturalną i $s\neq 0$, to rozwinięcie (1) jest nieskończone i należy zbadać resztę R_n. Można wykazać, że wówczas dla $|x|<1$ reszta R_n dąży do zera.

ZADANIE 11.13. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>-1$. Podstawiając we wzorze (1) poprzedniego zadania $s=-\frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\tfrac{1}{2}x+\frac{-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{2})}{2!}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})}{3!}x^3+\dots,$$

czyli po uporządkowaniu:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2!2^2}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4!2^4}x^4-\dots$$

Na podstawie kryterium d'Alemberta łatwo obliczyć, że promień zbieżności tego szeregu $R=1$.

ZADANIE 11.14. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $-1<x<1$. Na podstawie poprzedniego zadania mamy

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}}=1-\frac{1}{2}u+\frac{1\cdot 3}{2!2^2}u^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3}u^3+\dots$$

Podstawiając $u=-x^2$ otrzymujemy żądane rozwinięcie

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2!2^2}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3}x^6+\dots$$

Szereg ten jest zbieżny dla wartości $|x^2|<1$, tzn. dla $|x|<1$, więc promień zbieżności $R=1$.

ZADANIE 11.15*. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x)=\arcsin x$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $-1<x<1$. Wiemy, że

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Z poprzedniego zadania dla $|x|<1$ mamy

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8+\dots$$

W myśl twierdzenia (11.2.6) o całkowaniu szeregów całkujemy obie strony i otrzymujemy

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^x 1dt+\int_0^x \tfrac{1}{2}t^2dt+\int_0^x \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}t^4dt+\dots,$$

gdzie obie strony są funkcjami zmiennej x (t jest zmienną pozorną całkowania, którą po wykonaniu całkowania zastępujemy granicami). Ostatecznie więc mamy

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots \quad \text{dla} \quad -1<x<1.$$

Można wykazać, że wzór ten pozostaje słuszny dla $x=-1$ oraz dla $x=1$.

ZADANIE 11.16. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x)=\sin x \cos x$.

Rozwiązanie. Wiemy, że $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$. Weźmy pod uwagę rozwinięcie podane w zadaniu 11.9:

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \ldots,$$

ważne dla wszystkich u. Podstawiając $u=2x$ otrzymujemy

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \ldots$$

Stąd dla dowolnego x mamy

$$\sin x \cos x = x - \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^4}{5!}x^5 - \frac{2^6}{7!}x^7 + \ldots$$

ZADANIE 11.17. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x)=\sin^2 x$.

Rozwiązanie. Zadanie rozwiążemy dwoma sposobami.

Sposób I. Wiemy, że $2\sin^2 x = 1-\cos 2x$. Korzystając z rozwinięcia danego w zadaniu 11.10 dla każdego u mamy

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \ldots$$

Podstawiając $u=2x$ dla każdego x otrzymujemy

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots.$$

Podstawiając to rozwinięcie do wzoru $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ otrzymujemy

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left[\frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \frac{(2x)^8}{8!} + \ldots\right],$$

czyli

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \ldots$$

Rozwinięcie to ma miejsce dla każdego x.

Sposób II. Obliczamy kolejne pochodne:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x, && \text{skąd} && f(0)=0,\\
&f''(x) = 2\cos 2x, && \text{skąd} && f''(0)=2,\\
&f'''(x) = -2^3\sin 2x, && \text{skąd} && f'''(0)=0,\\
&f^{(4)}(x) = -2^3\cos 2x, && \text{skąd} && f^{(4)}(0)=-2^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Podstawiając powyższe wartości do rozwinięcia w szereg Maclaurina i biorąc pod uwagę, że $f(0)=0$, otrzymujemy

$$\sin^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{2^7}{8!}x^8+\ldots$$

ZADANIE 11.18. Napisać początkowe 8 wyrazów wzoru Maclaurina dla funkcji $f(x)=\operatorname{tg} x$.

Rozwiązanie. Oznaczmy $y=\operatorname{tg} x$. Zauważmy, że

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x=1+y^2$$

i że dla $x=0$ jest $y=0$. Mamy więc:

$$f'(x)=1+y^2, \qquad \text{skąd } f'(0)=1,$$

$$f''(x)=2yy'=2y(1+y^2)=2(y+y^3), \qquad \text{skąd } f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=2(1+3y^2)y'=2(1+3y^2)(1+y^2)=2(1+4y^2+3y^4), \qquad \text{skąd } f'''(0)=2,$$

$$f^{(4)}(x)=2(8y+12y^3)y'=8(2y+3y^3)(1+y^2)=8(2y+5y^3+3y^5), \qquad \text{skąd } f^{(4)}(0)=0,$$

$$f^{(5)}(x)=8(2+15y^2+15y^4)(1+y^2)=8(2+17y^2+30y^4+15y^6), \qquad \text{skąd } f^{(5)}(0)=16,$$

$$f^{(6)}(x)=8(34y+120y^3+90y^5)(1+y^2)=8(34y+154y^3+210y^5+90y^7), \qquad \text{skąd } f^{(6)}(0)=0,$$

$$f^{(7)}(x)=8(34+\ldots)(1+y^2), \qquad \text{skąd } f^{(7)}(0)=272.$$

Podstawiając obliczone wartości do wzoru Maclaurina (11.2.4) otrzymujemy

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+\frac{272}{7!}x^7+R_8,$$

skąd po skróceniu współczynników mamy

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3\cdot 5}x^5+\frac{17}{3^2\cdot 5\cdot 7}x^7+R_8.$$

Rozwinięcie funkcji $\operatorname{tg} x$, jako funkcji nieparzystej(¹), zawiera tylko nieparzyste potęgi x (podobnie jak rozwinięcie funkcji $\sin x$).

Można dowieść, że $R_n \to 0$ dla $|x|<\frac{1}{2}\pi$, więc funkcję $\operatorname{tg} x$ można przedstawić za pomocą szeregu Maclaurina o promieniu zbieżności $R=\frac{1}{2}\pi$. Dowód ten (dość trudny) pomijamy.

ZADANIE 11.19. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x)=\frac{x^3+2x}{x^2-2}. \tag{1}$$

(¹) Funkcja $f(x)$ nazywa się *funkcją nieparzystą*, jeżeli dla każdego x zachodzi równość $f(-x)=-f(x)$. Funkcja $f(x)$ nazywa się *funkcją parzystą*, jeżeli dla każdego x zachodzi równość $f(-x)=f(x)$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $|x| \neq \sqrt{2}$. Można udowodnić twierdzenie:

(11.2.7) *Funkcja wymierna jest rozwijalna w szereg Taylora w otoczeniu każdego punktu, w którym mianownik nie jest zerem.*

Funkcja (1) spełnia warunki rozwijalności w szereg Maclaurina, ponieważ dla $x=0$ mianownik jest różny od zera. Załóżmy, że funkcja (1) rozwija się w szereg

$$\frac{x^3+2x}{x^2-2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{2}$$

zbieżny dla $|x|<R$; mnożymy obie strony równości (2) przez x^2-2:

$$2x+x^3 = (-2+x^2)(a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\ldots) \quad \text{dla} \quad |x|<R.$$

Mamy tutaj równość sum dwóch szeregów potęgowych dla każdego $|x|<R$ (po lewej stronie wielomian $2x+x^3$ można uważać za szereg, którego wszystkie współczynniki przy x^n dla $n>3$ są równe zeru). Po wykonaniu mnożenia([1]) współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x muszą być, według twierdzenia (11.1.7), równe. Otrzymujemy zależności:

wyraz wolny:	$0=-2a_0$,	skąd	$a_0=0$,
współczynnik przy x:	$2=-2a_1$,	skąd	$a_1=-1$,
współczynnik przy x^2:	$0=-2a_2+a_0$,	skąd	$a_2=0$,
współczynnik przy x^3:	$1=-2a_3+a_1$,	skąd	$a_3=-1$,
współczynnik przy x^4:	$0=-2a_4+a_2$,	skąd	$a_4=0$,
współczynnik przy x^5:	$0=-2a_5+a_3$,	skąd	$a_5=-\frac{1}{2}$,
....			
współczynnik przy x^n:	$0=-2a_n+a_{n-2}$,	skąd	$a_n=\frac{1}{2}a_{n-2}$,
....			

Ogólnie mamy więc

$$a_n = \tfrac{1}{2}a_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 4.$$

Podstawiając obliczone wartości otrzymujemy szukane rozwinięcie:

$$\frac{x^3+2x}{x^2-2} = -x - x^3 - \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{4}x^7 - \ldots$$

Szereg ten jest zbieżny dla $|x|<\sqrt{2}$, ponieważ mamy tutaj, pomijając pierwszy wyraz, szereg geometryczny o ilorazie $q=\frac{1}{2}x^2$, a więc $R=\sqrt{2}$. Dla $x=\pm R$ szereg jest rozbieżny.

Zadanie 11.20. Rozwinąć funkcję

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x}$$

w szereg Taylora w otoczeniu punktu $x=2$.

([1]) Dowód, że takie mnożenie jest dozwolone, pomijamy.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x \neq 0$ i $x \neq 3$. Postępujemy podobnie jak w poprzednim zadaniu:

$$\frac{x+2}{x^2-3x} = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + a_3(x-2)^3 + \ldots$$

Oznaczmy $x-2=u$, skąd $x=u+2$, i otrzymujemy

$$\frac{(u+2)+2}{(u+2)^2-3(u+2)} = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \ldots,$$

gdzie $u \neq -2$ i $u \neq 1$ ze względu na zastrzeżenia co do wartości x. Po redukcji mamy

$$\frac{u+4}{u^2+u-2} = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \ldots,$$

czyli

$$4+u = (-2+u+u^2)(a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \ldots).$$

Przyrównując współczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej u po obu stronach otrzymujemy:

$$\begin{array}{lll}
4 = -2a_0, & \text{skąd} & a_0 = -2, \\
1 = -2a_1 + a_0, & \text{skąd} & a_1 = -\frac{3}{2}, \\
0 = -2a_2 + a_1 + a_0, & \text{skąd} & a_2 = -\frac{7}{4}, \\
0 = -2a_3 + a_2 + a_1, & \text{skąd} & a_3 = -\frac{13}{8}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
0 = -2a_n + a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{skąd} & a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & &
\end{array}$$

Zatem wzór ogólny ma postać

$$a_n = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2.$$

Podstawiając powyższe wartości otrzymujemy szukane rozwinięcie

$$\frac{x+2}{x^2-3x} = -2 - \tfrac{3}{2}(x-2) - \tfrac{7}{4}(x-2)^2 - \tfrac{13}{8}(x-2)^2 - \tfrac{27}{16}(x-2)^4 - \ldots$$

Można wykazać, że szereg ten jest zbieżny dla $|x-2|<1$, czyli w przedziale zbieżności $1<x<3$.

ZADANIE 11.21. W kulę o promieniu r wpisane są dwa stożki mające wspólną oś i wspólną podstawę o promieniu a. Wyznaczyć różnicę V objętości tych stożków i wyrazić ją za pomocą szeregu potęgowego względem a/r.

Rozwiązanie. Gdy $a=r$, wówczas $V=0$. Dalej przyjmujemy $a<r$ Oznaczmy wysokość mniejszego stożka przez h; wówczas większy stożek będzie miał wysokość $2r-h$,

gdzie $h<r$. Różnica objętości stożków wynosi

$$V=\tfrac{1}{3}\pi a^2(2r-h)-\tfrac{1}{3}\pi a^2 h=\tfrac{2}{3}\pi a^2(r-h).$$

Zauważmy, że $r^2=a^2+(r-h)^2$, skąd

$$r-h=\sqrt{r^2-a^2}.$$

Wielkość V można napisać w postaci

$$V=\tfrac{2}{3}\pi a^2 r(1+x)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{gdzie} \quad x=-\left(\frac{a}{r}\right)^2.$$

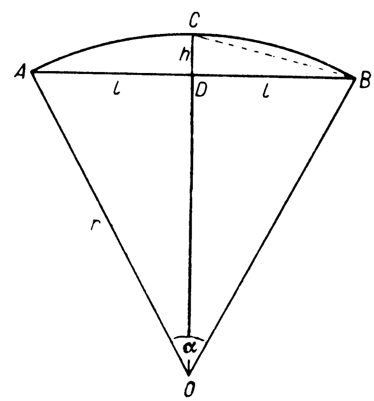
Rozwijając funkcję $y=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ według wzoru Maclaurina otrzymujemy

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k,$$

gdzie $-1<x<0$. Stąd

$$V=\tfrac{2}{3}\pi a^2 r\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{a}{r}\right)^4-\frac{1}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^6-\ldots\right].$$

ZADANIE 11.22*. Wyznaczyć długość łuku s okręgu jako funkcję długości l połowy cięciwy ściągającej dany łuk i jego strzałki h (rys. 11.1). Otrzymaną funkcję rozwinąć w szereg potęgowy względem ilorazu h/l.



Rys. 11.1

Rozwiązanie. Mamy daną cięciwę $2l$ i strzałkę łuku h. Oznaczmy przez r promień okręgu, do którego należy łuk s, i niech α oznacza kąt środkowy odpowiadający łukowi s. Wówczas będziemy mieli związek $s=\alpha r$.

Promień r można wyznaczyć z trójkąta prostokątnego ODA; mamy $r^2=(r-h)^2+l^2$, skąd

$$r=\frac{h^2+l^2}{2h}. \tag{1}$$

Natomiast kąt α wyznaczmy z trójkąta prostokątnego BCD, w którym $\sphericalangle CBD=\frac{1}{4}\alpha$. Otrzymujemy związek $\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha=h/l$, skąd

$$\tfrac{1}{4}\alpha=\operatorname{arctg}\frac{h}{l}. \tag{2}$$

Oznaczając $h/l=x$, $\frac{1}{4}\alpha=y$ otrzymujemy związek

$$y=\operatorname{arc\,tg} x.$$

Obliczamy pochodną

$$y'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Rozwijamy prawą stronę w szereg potęgowy:

$$y' = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

Szereg ten jest zbieżny, gdy $x^2 < 1$, tzn. gdy $h < l$. Całkując ten szereg wyraz po wyrazie otrzymujemy

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

skąd

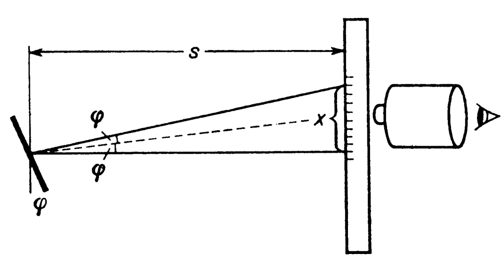
$$\alpha = 4\left[\frac{h}{l} - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{l}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{h}{l}\right)^7 + \ldots\right]$$

ostatecznie

$$s = 2\frac{h^2 + l^2}{h}\left[\frac{h}{l} - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{l}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{h}{l}\right)^7 + \ldots\right].$$

Wzór ten daje rozwiązanie zadania, gdy $h < l$. W przypadku gdy $h = l$, mamy $s = \pi l$.

Zadanie 11.23. Pozioma skala przyrządu pomiarowego odbija się w lusterku zawieszonym na osi pionowej w odległości s od skali; odbicie to obserwujemy przez lunetkę. W chwili gdy lusterko jest równoległe do skali, widzimy przez lunetkę punkt 0 skali. Odchyleniu lusterka o kąt φ odpowiada na skali odchylenie liniowe x. Dla jakich kątów φ (podać w stopniach) można przyjąć zależność $\varphi \approx kx$ z błędem względnym nie przekraczającym 1%?



Rys. 11.2

Rozwiązanie. Gdy lusterko odchyla się o kąt φ, promień widzenia odchyla się o kąt 2φ (patrz rys. 11.2). Mamy $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 2\varphi = x/s$, skąd

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{s}.$$

Oznaczmy $x/s = t$. Wówczas $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t$. Rozwijamy funkcję $\operatorname{arctg} t$ w szereg

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \ldots\right).$$

W przybliżeniu można wziąć $\varphi=\frac{1}{2}t$, czyli

$$\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{s}.$$

Błąd bezwzględny $\Delta\varphi$ można ograniczyć nierównością $\Delta\varphi<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}t^3$, a wówczas błąd względny spełnia nierówność $\Delta\varphi/\varphi<\frac{1}{3}t^2$, czyli

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi}<\frac{1}{3}\left(\frac{x}{s}\right)^2.$$

Aby błąd względny był mniejszy od 1%, należy wziąć $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 t<\frac{1}{100}$, czyli $t<0{,}173$, a więc $\varphi<0{,}0865$.

W stopniach otrzymujemy wzór

$$\varphi=\frac{90^\circ}{\pi}\cdot\frac{x}{s}$$

z błędem nie przekraczającym 1%, jeżeli $\varphi<5^\circ$.

Zadanie 11.24. Obliczyć $\sin\frac{1}{5}$ z dokładnością do 0,0001, posługując się rozwinięciem funkcji $\sin x$ w szereg potęgowy.

Rozwiązanie. Rozwinięcie daje

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

Szereg jest przemienny, zbieżny.

Przy obliczeniu $\sin\frac{1}{5}$ można się ograniczyć do dwóch wyrazów:

$$\sin\frac{1}{5}=\frac{1}{5}-\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3,$$

gdyż popełniony błąd będzie mniejszy od wyrazu

$$\frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^5=\frac{1}{375\,000}.$$

Obliczenie daje $\sin\frac{1}{5}=0{,}2-0{,}0013=0{,}1987$.

Przy obliczeniach numerycznych dochodzi błąd zaokrąglenia, który łącznie z poprzednim błędem jest mniejszy od 0,0001.

Zadanie 11.25. Obliczyć wartość $1/e$ z dokładnością do 0,001, posługując się rozwinięciem funkcji e^x w szereg Maclaurina.

Rozwiązanie. Rozwinięcie funkcji e^x w otoczeniu punktu $x_0=0$, jak wiemy, jest następujące:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

Dla $x=-1$ otrzymujemy

$$\frac{1}{e}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}+\ldots$$

Otrzymaliśmy szereg przemienny zbieżny. Jeżeli przerwiemy ten szereg na którymkolwiek wyrazie, to błąd sumy szeregu przemiennego będzie mniejszy co do bezwzględnej wartości od pierwszego odrzuconego wyrazu. W naszym zadaniu wystarczy obliczyć

$$\frac{1}{e}\approx 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!},$$

gdyż $\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}$. Łącząc wyrazy parami otrzymujemy

$$\frac{1}{e}\approx\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{720}=0{,}33333\ldots+0{,}03333\ldots+0{,}00134\ldots\approx 0{,}368.$$

W obliczeniu numerycznym dochodzi jeszcze błąd zaokrąglenia wyniku, ale błąd ten łącznie z ułamkiem $\frac{1}{5040}$ jest mniejszy od 0,001.

Zadanie 11.26. Obliczyć wartość $\sqrt[3]{30}$ z dokładnością do 0,001, posługując się rozwinięciem funkcji $f(x)=(1+x)^s$ w szereg potęgowy.

Rozwiązanie. Ponieważ $30=3^3+3$, więc $\sqrt[3]{30}$ można napisać w postaci

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{3^3+3}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{3^2}}=3\left(1+\tfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Rozwijamy w szereg potęgowy funkcję $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$, gdzie $|x|<1$; mamy

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{\frac{1}{3}}{1!}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+\ldots,$$

skąd

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\tfrac{1}{3}x-\tfrac{1}{9}x^2+\tfrac{5}{81}x^3-\ldots$$

Podstawiając $x=\frac{1}{9}$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{30}=3\left(1+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{81}+\tfrac{5}{81}\cdot\tfrac{1}{729}-\ldots\right).$$

Otrzymany szereg jest przemienny. Jeżeli ograniczymy się do trzech wyrazów, to błąd będzie mniejszy niż $\frac{5}{81}\cdot\frac{1}{729}$, a ponieważ ułamek ten jest mniejszy od $\frac{1}{3000}$, więc wartość

$$\sqrt[3]{30}\approx 3\left(1+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{81}\right)$$

będzie obliczona z błędem mniejszym od 0,001. Obliczenie daje

$$\sqrt[3]{30}\approx 3(1+0{,}037037\ldots-0{,}001371\ldots)=3\cdot 1{,}035666\ldots\approx 3{,}107,$$

przy czym błąd zaokrąglenia nie wpływa na ocenę dokładności przybliżenia.

ZADANIE 11.27. Jeżeli a jest liczbą całkowitą, dodatnią, spełniającą nierówność $a^n \leqslant A < a^{n+1}$, gdzie n jest liczbą naturalną, to do wyznaczenia przybliżonej wartości $\sqrt[n]{A}$ służyć może wzór

$$(1) \qquad \sqrt[n]{A} \approx a + \frac{x}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}}, \quad \text{gdzie} \quad x = A - a^n.$$

Korzystając z tego wzoru obliczyć $\sqrt[5]{245}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $245 = 3^5 + 2$, więc można przyjąć, że $A = 245$, $n = 5$, $a = 3$, $x = 2$ i stosując wzór (1) otrzymujemy

$$\sqrt[5]{245} \approx 3 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3^4} = 3 + \frac{2}{405} = 3{,}0049.$$

Zadania

Obliczyć promień zbieżności szeregu i zbadać jego zbieżność na krańcach przedziału zbieżności (zad. 11.28 - 11.55):

11.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

11.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$.

11.30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n$.

11.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n \cdot 4^{n+1}} x^n$.

11.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n} x^n$.

11.33. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{10^n} x^n$.

11.34. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\cos n) x^n$. Wskazówka. Porównać z rozwiązaniem zadania 11.7.

11.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin^2 \frac{1}{n}\right) x^n$.

11.36. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n-1} \cdot n^3}{(n^2-1) 5^n} x^n$.

11.37. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$.

11.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n) 2^{2n}}{3^{3n}} x^n$.

11.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$.

11.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$.

11.41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+2)!}{(2n)!} x^n$.

11.42. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$.

11.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^n (2n)!} x^n$.

11.44. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3} x^n$.

11.45. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+5^n}{n^2+10^n}x^n$.

11.46. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$.

11.47. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n \quad (a>1)$.

11.48. $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$.

11.49. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

11.50. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{3^{n+1}(n+1)\sqrt{n+1}}$.

11.51. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n^2}$.

11.52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(2n-1)}$.

11.53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-2}$.

11.54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$.

11.55. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^{2n+1}}{2n+1}$.

Określić przedział zbieżności szeregu i znaleźć jego sumę (zad. 11.56 - 11.60):

11.56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

11.57. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

11.58. $\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n$.

11.59. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

11.60. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$.

11.61. Wykazać, że

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n=\frac{1}{(1-x)^4}.$$

11.62. Otrzymać nowe rozwinięcie przez zróżniczkowanie związku dla $|x|<1$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}.$$

Za pomocą całkowania szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ znaleźć sumę następujących szeregów (zad. 11.63 - 11.64):

11.63*. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$.

11.64*. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

11.65. Podnieść do kwadratu szereg $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

11.66. Podnieść do trzeciej potęgi szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

Rozwinąć funkcję w szereg Maclaurina (zad. 11.67 - 11.88):

11.67. $f(x)=e^{-x^2}$.

11.68. $f(x)=\dfrac{x}{3-x}$.

11.69. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

11.70. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

11.71. $f(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}$.

11.72. $f(x)=\ln(1+x)$.

11.73. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

11.74. $f(x)=\ln(1-x+x^2)$.

11.75. $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$.

11.76. $f(x)=\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

11.77. $f(x)=\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

11.78. $f(x)=e^x\ln(1+x)$.

11.79. $f(x)=e^{-x}\sin x$.

11.80. $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+x}$.

11.81. $f(x)=\cos^2 x$.

11.82. $f(x)=\sqrt{1+x}$.

11.83. $f(x)=\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

11.84. $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

11.85. $f(x)=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x}+2\cos x)$.

11.86. $f(x)=\dfrac{e^{x^3}-x^{-x^3}}{2x^3}$.

11.87. $f(x)=a^x,\ a>0$.

11.88*. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

11.89. Napisać 7 początkowych wyrazów wzoru Taylora dla funkcji $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$, w otoczeniu punktu $x=0$.

11.90. Napisać wyrazy wzoru Taylora dla funkcji

$$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x},$$

w otoczeniu punktu $x=0$, do $\dfrac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$ włącznie.

11.91. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x)=\frac{-5x^4-7x^2+1}{2x^3-3x+1}$$

aż do wyrazu $\dfrac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$ włącznie.

Rozwinąć w szereg Taylora funkcje (zad. 11.92 - 11.101):

11.92. $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, w otoczeniu punktu $x=0$.

11.93. $f(x)=\sin x-x\cos x$, w otoczeniu punktu $x=0$.

11.94. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, w otoczeniu punktu $x=3$.

11.95. $f(x)=x\sqrt{x}$, w otoczeniu punktu $x=1$.

11.96. $f(x)=\sin\frac{1}{4}\pi x$, w otoczeniu punktu $x=2$.

11.97. $f(x)=\cos\frac{1}{2}x$, w otoczeniu punktu $x=\frac{1}{2}\pi$.

11.98. $f(x)=\cos^2 x$, w otoczeniu punktu $x=\frac{1}{3}\pi$.

11.99. $f(x)=e^{x/a}$, w otoczeniu punktu $x=a$.

11.100. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, w otoczeniu punktu $x=1$.

11.101. $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2-6x+11}$, w otoczeniu punktu $x=3$.

11.102. Obliczyć $\sqrt{e}$ z dokładnością do 0,001, posługując się rozwinięciem funkcji e^x w szereg potęgowy.

11.103. Obliczyć $1/\sqrt[4]{e}$ z dokładnością do 0,0001, posługując się rozwinięciem funkcji e^x w szereg potęgowy.

11.104. Obliczyć $\sqrt[5]{250}$ z dokładnością do 0,001, posługując się rozwinięciem funkcji $\sqrt[n]{1+x}$ w szereg potęgowy.

11.105. Obliczyć $\cos 0{,}3$, gdzie kąt jest podany w mierze teoretycznej, z dokładnością do 0,001, posługując się rozwinięciem funkcji $\cos x$ w szereg potęgowy.

11.106. Obliczyć $\sin 10°$ z dokładnością do 0,00001, stosując rozwinięcie funkcji $\sin x$ w szereg potęgowy.

11.107. Posługując się metodą podaną w zadaniu 11.27, obliczyć wartości przybliżone pierwiastków $\sqrt[7]{129}$, $\sqrt[9]{515}$, $\sqrt[10]{1027}$.

11.108. Ile musimy wziąć wyrazów szeregu $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$, aby obliczyć $\ln 2$ z dokładnością do 0,01?

11.109. Lina pod wpływem własnego ciężaru zwisa tak jak linia łańcuchowa $y=\cosh\dfrac{x}{a}$, przy czym $a=\dfrac{H}{g}$, gdzie H oznacza poziome natężenie liny, g ciężar jednostki długości liny. Pokazać, że przy małych x z dokładnością do wielkości rzędu x^4 można przyjąć, że lina zwisa tak jak parabola $y=a+\frac{x^2}{2a}$.

11.110. Wychodząc z równości $\frac{1}{4}\pi=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ napisać π w postaci szeregu nieskończonego.

11.111. Obliczyć $\frac{1}{6}\pi$ z dokładnością do 0,001, posługując się rozwinięciem funkcji $\arcsin x$ w szereg potęgowy.

11.112. Z jaką dokładnością obliczymy $\frac{1}{4}\pi$, jeżeli korzystając z szeregu $\operatorname{arctg} x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\ldots$ weźmiemy tylko 5 pierwszych wyrazów?

Rozdział XII

WYRAŻENIA NIEOZNACZONE. REGUŁA DE L'HOSPITALA

§ 12.1. WYRAŻENIA NIEOZNACZONE POSTACI $\frac{0}{0}$

Przy rozważaniu wyrażeń nieoznaczonych wygodnie jest operować pojęciem sąsiedztwa punktu.

Przez *sąsiedztwo* punktu $x=a$ rozumiemy zbiór wszystkich x spełniających nierówność $0<|x-a|<r$, gdzie r jest dowolnie ustaloną liczbą dodatnią.

Sąsiedztwo punktu $x=a$ jest więc otoczeniem tego punktu, z którego sam punkt $x-a$ został wyłączony.

Przez *lewostronne* sąsiedztwo punktu $x=a$ rozumiemy zbiór wszystkich x spełniających nierówność $a-r<x<a$ dla dowolnie ustalonego $r>0$.

Analogicznie określamy *prawostronne* sąsiedztwo punktu $x=a$.

Rozważmy iloraz funkcji $f(x):g(x)$ określonych w pewnym sąsiedztwie punktu $x=a$. Mówimy, że iloraz ten w punkcie $x=a$ jest *wyrażeniem nieoznaczonym postaci* $\frac{0}{0}$, jeżeli

(1) $$\lim_{x\to a} f(x)=0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Jednak mimo tych warunków może istnieć granica ilorazu

(2) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Do wyznaczenia tej granicy nie możemy stosować twierdzenia o granicy ilorazu, gdyż $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Niektóre metody obliczania granicy (2) przy warunkach (1) poznaliśmy w rozdziale V. Inną metodą, opartą na rachunku różniczkowym, jest tzw. *reguła de L'Hospitala*:

(12.1.1) *Granica ilorazu dwóch funkcyj dążących do zera przy $x\to a$ i mających pierwsze pochodne w pewnym sąsiedztwie punktu $x=a$ jest równa granicy ilorazu pochodnych tych funkcyj przy $x\to a$, jeśli granica ta istnieje*:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe gdyż granica ilorazu $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)/g(x)\big)$ może istnieć także wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to a}\big(f'(x)/g'(x)\big)$ nie istnieje.

Podamy jeszcze specjalny przypadek reguły de L'Hospitala, który znajduje liczne praktyczne zastosowania:

(12.1.2) *Jeżeli* 1° $f(a)=g(a)=0$, 2° *pochodne* $f'(x)$ *i* $g'(x)$ *istnieją w otoczeniu punktu* $x=a$ *i są w tym punkcie ciągłe* (¹), 3° $g'(a)\neq 0$, *to*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Uwaga. Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ mogą być tak skomplikowane (nawet gdy mają ciągłe pochodne wszystkich nieskończenie wielu rzędów), że reguła de L'Hospitala nie prowadzi do celu; np. może być $f^{(n)}(a)=g^{(n)}(a)=0$ dla każdej naturalnej wartości n, pomimo że $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ istnieje. W poniższych zadaniach przypadki takie są pominięte.

Gdy funkcje $f(x)$ *i* $g(x)$ są określone w jednostronnym sąsiedztwie punktu, to wszystkie powyższe określenia, twierdzenia i uwagi mają również miejsce przy odpowiednich modyfikacjach.

Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą określone w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu $x=a$, tzn. dla x spełniających nierówność:

(3) $$a-\delta<x<a \quad \text{przy} \quad \delta>0.$$

Niech będzie przy tym

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a-0} g(x)=0.$$

W tych warunkach reguła de L'Hospitala (12.1.1) przybierze następującą postać:

(12.1.3) *Jeżeli w przedziale* (3) *istnieją pochodne* $f'(x)$ i $g'(x)$ *oraz istnieje granica*

$$\lim_{x\to a-0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

to istnieje też granica $\lim\limits_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}$ *i ma miejsce równość*

$$\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Podobnie jest dla prawostronnego sąsiedztwa, tylko przedział (3) trzeba zamienić na przedział $a<x<a+\delta$ przy $\delta>0$ oraz symbol $x\to a-0$ zastąpić wszędzie symbolem $x\to a+0$.

Reguła de L'Hospitala w przypadku gdy $x\to+\infty$:

(12.1.4) *Jeżeli funkcje* $f(x)$ *i* $g(x)$ *są różniczkowalne dla* $x>M$, *gdzie* M *jest to pewna liczba dana, i jeżeli* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ *i* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, *to*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

jeżeli granica po prawej stronie wzoru istnieje.

Dla $x\to-\infty$ otrzymujemy regułę analogiczną.

(¹) Z warunków 1° i 2° wynika warunek (1).

ZADANIE 12.1. Obliczyć

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

gdzie $f(x)=xa^x$, $g(x)=a^x-1$ przy $a>0$ i $a\neq 1$.

Rozwiązanie. Mamy tu $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)=0$, więc nie możemy zastosować wzoru

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0} g(x)}.$$

Obliczamy pochodne:

$$f'(x)=a^x(1+x\ln a),\ \text{skąd } f'(0)=1,\qquad g'(x)=a^x\ln a,\ \text{skąd } g'(0)=\ln a\neq 0\,.$$

Jak widać, spełnione są warunki stosowalności reguły (12.1.2), a więc

$$\lim_{x\to 0}\frac{xa^x}{a^x-1}=\frac{1}{\ln a}\,.$$

ZADANIE 12.2. Obliczyć

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}.$$

Rozwiązanie. Oznaczmy: $f(x)=e^{3x}-3x-1$, $g(x)=\sin^2 5x$. Mamy tu $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$ $=f(0)=0$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)=0$. Obliczamy pochodne:

$$f'(x)=3e^{3x}-3\,,\qquad \text{skąd}\qquad f'(0)=0\,,$$

$$g'(x)=2\sin 5x\cos 5x\cdot 5=5\sin 10x\,,\qquad \text{skąd}\qquad g'(0)=0\,.$$

Widzimy, że iloraz $f'(x)/g'(x)$ w punkcie $x=0$ jest również wyrażeniem nieoznaczonym postaci $\frac{0}{0}$.

Obliczamy drugie pochodne:

$$f''(x)=9e^{3x}\,,\ \text{skąd } f''(0)=9\,,\qquad g''(x)=50\cos 10x\,,\ \text{skąd } g''(0)=50\,.$$

Warunki reguły (12.1.2) dla ilorazu $f'(x)/g'(x)$ w punkcie $x=0$ są spełnione, a więc

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{'(x)}=\frac{f''(0)}{g''(0)}=\tfrac{9}{50}\,.$$

Na podstawie zaś reguły (12.1.1) mamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\tfrac{9}{50}\,.$$

czyli ostatecznie

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}=\tfrac{9}{50}\,.$$

ZADANIE 12.3. Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^2\sin^2 x}$

Rozwiązanie. Oznaczmy: $f(x)=2\cos x-2+x^2$, $g(x)=x^2\sin^2 x$; mamy $f(0)=0$, $g(0)=0$.

Obliczmy pochodne:

$$f'(x)=-2\sin x+2x\,, \quad \text{skąd} \quad f'(0)=0\,,$$

$$g'(x)=2x\sin^2 x+x^2\sin 2x\,, \quad \text{skąd} \quad g'(0)=0\,.$$

Ponieważ obie pochodne są równe zeru, obliczamy drugie pochodne:

$$f''(x)=-2\cos x+2\,, \quad \text{skąd} \quad f''(0)=0\,,$$

$$g''(x)=2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x\,, \quad \text{skąd} \quad g''(0)=0\,.$$

Wobec tego obliczamy trzecie pochodne:

$$f'''(x)=2\sin x\,, \quad \text{skąd} \quad f'''(0)=0\,,$$

$$g'''(x)=6\sin 2x+12x\cos 2x-4x^2\sin 2x\,, \quad \text{skąd} \quad g'''(0)=0\,.$$

Następnie obliczamy czwarte pochodne:

$$f^{(4)}(x)=2\cos x\,, \quad \text{skąd} \quad f^{(4)}(0)=2\,.$$

$$g^{(4)}(x)=24\cos 2x-32x\sin 2x-8x^2\cos 2x\,, \quad \text{skąd} \quad g^{(4)}(0)=24\,.$$

Stosując łańcuch wzorów według reguły de L'Hospitala ostatecznie otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^2\sin^2 x}=\frac{f^{(4)}(0)}{g^{(4)}(0)}=\tfrac{1}{12}\,.$$

Zadanie to rozwiążemy jeszcze innym sposobem. Już z postaci licznika, a szczególniej mianownika jest widoczne, że kilka kolejnych pochodnych przybiera w punkcie $x=0$ wartość 0. Zamiast więc stosować kilkakrotnie regułę de L'Hospitala, zastosujemy rozwinięcie licznika i mianownika w szereg nieskończony. Wiemy, że (por. zad. 11.10):

(1) $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\,,$$

więc licznik przybiera postać

$$f(x)=\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^6}{6!}+\ldots$$

Ponieważ (por. zad. 11.17):

$$\sin^2 x=x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\ldots$$

więc mianownik przybiera postać

$$g(x)=x^4-\frac{2^3x^6}{4!}+\ldots$$

W ten sposób otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{12}-\frac{2x^6}{6!}+\ldots}{x^4-\frac{x^6}{3}+\ldots}$$

i po skróceniu przez $x^4\neq 0$ otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}-\frac{2x^2}{6}+\ldots}{1-\frac{x^2}{3}+\ldots}=\frac{1}{12}.$$

ZADANIE 12.4. Natężenie prądu elektrycznego w obwodzie zmienia się według równania $i=2t\sin 3/t$. Wyznaczyć graniczną wartość mocy $p=ri^2$ traconej na oporze $r=5\,\Omega$, gdy czas $t\to\infty$.

Rozwiązanie. Moc elektryczna tracona na oporze r wynosi

$$p=5\cdot 4t^2\sin^2\frac{3}{t}=20t^2\sin^2\frac{3}{t}.$$

Aby wyznaczyć graniczną wartość mocy p, gdy $t\to\infty$, piszemy funkcję p w postaci

$$p=20\,\frac{\sin^2\frac{3}{t}}{\frac{1}{t^2}}$$

i stosujemy regułę de L'Hospitala:

$$\lim_{t\to\infty}p=20\lim_{t\to\infty}\frac{\sin^2\frac{3}{t}}{\frac{1}{t^2}}=20\lim_{t\to\infty}\frac{-\frac{6}{t^2}\sin\frac{3}{t}\cos\frac{3}{t}}{-\frac{2}{t^3}}=$$

$$=20\lim_{t\to\infty}\frac{3\sin\frac{6}{t}}{\frac{2}{t}}=20\lim_{t\to\infty}\frac{-\frac{18}{t^2}\cos\frac{6}{t}}{-\frac{2}{t^2}}=20\lim_{t\to\infty}\left(9\cos\frac{6}{t}\right)=180.$$

§ 12.2. WYRAŻENIA NIEOZNACZONE POSTACI $\frac{\infty}{\infty}$

Jeżeli $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = +\infty$, to mówimy, że iloraz $f(x)$: $g(x)$ jest w punkcie $x=a$ *wyrażeniem nieoznaczonym postaci* $\frac{\infty}{\infty}$.

Tego samego określenia używamy zarówno w przypadku granic lewostronnych jak i granic obustronnych.

Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą określone i różniczkowalne w przedziale otwartym $a<x<b$, przy czym $g'(x)\neq 0$ dla każdego x z tego przedziału.

(12.2.1) *Jeżeli* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = +\infty$, oraz *istnieje granica* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *to*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analogicznie:

(12.2.2) *Jeżeli* $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = +\infty$, *ale istnieje granica* $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *to*

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Niech teraz funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą określone i różniczkowalne oraz $g'(x)\neq 0$ w pewnym sąsiedztwie obustronnym punktu $x=c$.

(12.2.3) *Jeżeli* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty$, *ale istnieje granica* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *to*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Reguła de L'Hospitala pozostaje ważna również przy $x\to +\infty$. Mianowicie niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą określone i różniczkowalne oraz $g'(x)\neq 0$ dla wszystkich $x>c$.

(12.2.4) *Jeżeli* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\to +\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\to +\infty$, *ale istnieje granica* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *to*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analogicznie byłoby przy $x\to -\infty$, gdy $f(x)$ i $g(x)$ są dla każdego $x<c$ określone i różniczkowalne oraz $g'(x)\neq 0$.

Założenie, że $f(x)\to +\infty$ i $g(x)\to +\infty$, nie jest istotne. Może być np. $f(x)\to -\infty$, $g(x)\to +\infty$; w takim przypadku wyłączając -1 poza nawias otrzymujemy sprowadzenie do przypadku, gdy $f(x)\to +\infty$, $g(x)\to +\infty$.

ZADANIE 12.5. Obliczyć $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Rozwiązanie. Stosując regułę de L'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}:\frac{-1}{\sin^2 x}\right)=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x}=-\lim_{x\to+0}\sin x\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=0\cdot 1=0.$$

Zadanie 12.6. Znaleźć

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{a+b\ln\sin x},\quad \text{gdzie}\quad b\neq 0.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $\sin x>0$. Gdy $x\to 0$ od strony liczb dodatnich, to $\sin x\to 0$ przez wartości dodatnie, a więc $\ln\sin x\to-\infty$. Na podstawie podanych wyżej rozważań otrzymujemy

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{a+b\ln\sin x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{b\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{b\cos x}\right)=1\cdot\frac{1}{b\cos 0}=\frac{1}{b}.$$

Zadanie 12.7. Obliczyć $g=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}$.

Rozwiązanie. Rozpatrzymy przypadki:

Przypadek 1°: $a<0$. Oznaczmy przez b liczbę dodatnią taką, że $b=-a$; wtedy

$$g=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^b e^x}=0.$$

Przypadek 2°: $a=0$. Wówczas

$$g=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Przypadek 3°: $a>0$. Oznaczmy przez n_0 najmniejszą liczbę naturalną taką, że $a\leqslant n_0$, i niech $a=n_0-b$; z określenia liczby n_0 wynika, że $0\leqslant b<1$; np. gdy $a=5$, to $n_0=5$, $b=0$; gdy $a=\frac{13}{4}$, to $n_0=4$, $b=\frac{3}{4}$.

Aby obliczyć granicę g, stosujemy n_0 razy regułę de L'Hospitala; otrzymujemy wówczas

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a(a-1)\dots(a-n_0+1)}{x^b e^x}=0.$$

W przypadku $a>0$ zadanie można rozwiązać jeszcze innym sposobem. Oznaczmy przez S_n sumę cząstkową

$$S_n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}.$$

Dla $x>0$ ciąg $\{S_n\}$ jest rosnący, a więc $S_n<e^x$ dla każdego n. Jest także

$$\frac{x^n}{n!}<S_n<e^x$$

dla każdego n. Oznaczając przez n_0 jakąkolwiek liczbę naturalną większą od a mamy

$$0<\frac{x^a}{e^x}<\frac{x^a}{\frac{x^{n_0}}{n_0!}}=\frac{n_0!}{x^{n_0-a}}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n_0!}{x^{n_0-a}}=0$, więc także

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=0.$$

Z zestawienia przypadków 1°, 2°, 3° wynika, że dla każdego a ma miejsce wzór

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=0. \tag{12.2.5}$$

Rozumowanie powyższe daje jednocześnie wzór

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a}=+\infty. \tag{12.2.6}$$

ZADANIE 12.8. Obliczyć $g=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^k}$.

Rozwiązanie. Widzimy od razu, że dla $k\leqslant 0$ jest $g=+\infty$.

Załóżmy, że $k>0$. Wtedy wykonujemy podstawienie

$$x=e^z,\quad \text{skąd}\quad \ln x=z,$$

a więc $\lim\limits_{x\to+\infty} z=+\infty$. Otrzymujemy wówczas (patrz zadanie poprzednie):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^k}=\lim_{z\to+\infty}\frac{z}{e^{zk}}=0.$$

Otrzymaliśmy więc wzór

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^k}=0 \quad \text{dla} \quad k>0. \tag{12.2.7}$$

Z powyższego wzoru wnosimy, że $\ln x$ przy $x\to+\infty$ rośnie wolniej niż jakakolwiek dodatnia potęga x, np. $\sqrt[100]{x}$.

§ 12.3. WYRAŻENIA NIEOZNACZONE POSTACI $\infty\cdot 0$

Niech będą dane funkcje $f(x)$ i $g(x)$ określone w pewnym sąsiedztwie (ewentualnie jednostronnym) punktu $x=a$. Iloczyn $f(x)\,g(x)$ nazywamy *wyrażeniem nieoznaczonym postaci* $\infty\cdot 0$ w punkcie $x=a$, jeżeli $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ lub $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ i jednocześnie

$\lim_{x\to a} g(x)=0$. Wówczas oczywiście $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$. Stosując przekształcenie[1]

$$f(x)\,g(x)=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

otrzymujemy iloraz funkcji $g(x)$ przez $1/f(x)$, który w punkcie $x=a$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $\frac{0}{0}$. Do obliczania granic tego ilorazu możemy stosować metody podane w rozdziale V oraz w § 12.1.

Zadanie 12.9. Wyznaczyć $\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi}(x-\frac{1}{2}\pi)\operatorname{tg}x$.

Rozwiązanie. Mamy tu dla $x=\frac{1}{2}\pi$ wyrażenie postaci $0\cdot\infty$; przekształcamy je jak wyżej:

$$(x-\tfrac{1}{2}\pi)\operatorname{tg}x=\frac{x-\frac{1}{2}\pi}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}}=\frac{x-\frac{1}{2}\pi}{\operatorname{ctg}x}.$$

Do ostatniego wyrażenia stosujemy regułę de L'Hospitala:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi}\frac{x-\frac{1}{2}\pi}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{\dfrac{-1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi}(-\sin^2 x)=-1.$$

Zadanie 12.10. Obliczyć $\lim_{x\to+0} x^k\ln x$ przy $k>0$.

Rozwiązanie. Stosując podstawienie

$$x=\frac{1}{z},\qquad \text{skąd}\qquad z=\frac{1}{x},$$

mamy $\lim_{z\to+\infty} z=+\infty$, a więc

$$\lim_{x\to+0} x^k\ln x=\lim_{z\to+\infty}\frac{\ln\dfrac{1}{z}}{z^k}=\lim_{z\to+\infty}\frac{-\ln z}{z^k}.$$

Na podstawie zadania 12.8 wnioskujemy, że

(12.3.1) $$\lim_{x\to+0} x^k\ln x=0\qquad\text{dla}\qquad k>0.$$

---

[1] Przekształcenie to ma miejsce dla $f(x)\neq 0$. Ponieważ $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ lub $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$, więc otoczenie punktu $x=a$ możemy tak zwęzić, żeby było $f(x)\neq 0$ dla każdego x należącego do nowego otoczenia.

§ 12.4. WYRAŻENIA NIEOZNACZONE POSTACI $\infty-\infty$

Rozpatrzmy wyrażenie postaci $f(x)-g(x)$ takie, że gdy $x\to a$, to $f(x)\to+\infty$ i $g(x)\to\to+\infty$ albo $f(x)\to-\infty$ i $g(x)\to-\infty$.

Zastosujemy podstawienia:

$$u(x)=\frac{1}{f(x)}, \quad v(x)=\frac{1}{g(x)}.$$

Wówczas przy $x\to a$ jest $u(x)\to 0$, $v(x)\to 0$. Otrzymamy więc

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{u(x)}-\frac{1}{v(x)}=\frac{v(x)-u(x)}{u(x)\,v(x)}.$$

Ostatecznie wyrażenie przy $x=a$ jest postaci $\frac{0}{0}$, możemy więc do niego stosować poznane już metody.

Zadanie 12.11. Wyznaczyć

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

Rozwiązanie. Mamy tu wyrażenie postaci $\infty-\infty$. Odejmując ułamki otrzymujemy wyrażenie $\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$, które w punkcie $x=1$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $\frac{0}{0}$. Przy obliczaniu granicy otrzymanego wyrażenia stosujemy dwukrotnie regułę de L'Hospitala:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\tfrac{1}{2},$$

czyli ostatecznie $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=-\frac{1}{2}$.

§ 12.5. WYRAŻENIA NIEOZNACZONE POSTACI ∞^0, 0^0, 1^∞

Niech będą dane funkcje $u(x)$ i $v(x)$ określone w pewnym sąsiedztwie (ewentualnie jednostronnym) punktu $x=a$, przy czym $u(x)>0$ dla wszystkich $x\neq a$ należących do tego otoczenia. Weźmy pod uwagę wyrażenie

(1) $$f(x)=(u(x))^{v(x)}.$$

1° Jeżeli przy $x\to a$ mamy $u(x)\to+\infty$ i jednocześnie $v(x)\to 0$, to mówimy, że wyrażenie (1) w punkcie $x=a$ jest *wyrażeniem nieoznaczonym postaci* ∞^0.

2° Jeżeli przy $x \to a$ mamy $u(x) \to 0$, $v(x) \to 0$, to mówimy, że wyrażenie (1) w punkcie $x=a$ jest *wyrażeniem nieoznaczonym postaci* 0^0.

3° Jeżeli przy $x \to a$ mamy $u(x) \to 1$ i jednocześnie $v(x) \to +\infty$ lub $-\infty$, to mówimy, że wyrażenie (1) w punkcie $x=a$ jest *wyrażeniem nieoznaczonym postaci* 1^∞.

Ponieważ $u(x)>0$, możemy zlogarytmować obie strony związku (1):

$$\ln f(x) = v(x) \ln u(x). \tag{2}$$

We wszystkich trzech przypadkach prawa strona równości (2) przy $x \to a$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $0 \cdot \infty$. Granicę tego wyrażenia możemy wyznaczyć za pomocą metod podanych w § 12.3.

Jeżeli granicą wyrażenia po prawej stronie równości (2) przy $x \to a$ jest wielkość A, to znaczy, jeżeli $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = A$, to $\lim\limits_{x \to a} f(x) = e^A$, gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych (wynika to z ciągłości funkcji wykładniczej).

Zadanie 12.12. Wyznaczyć $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi - 0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Rozwiązanie. Ograniczymy się do przedziału $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$; wówczas $\operatorname{tg} x > 0$, a $\operatorname{tg} 2x$ jest skończone. Mamy tutaj wyrażenie nieoznaczone postaci ∞^0. Logarytmując funkcję $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ otrzymujemy

$$\ln f(x) = \operatorname{tg} 2x \ln \operatorname{tg} x.$$

Wyrażenie po prawej stronie równości w punkcie $x = \frac{1}{2}\pi$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $0 \cdot \infty$. Na podstawie przekształcenia

$$\operatorname{tg} 2x \ln \operatorname{tg} x = \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$$

otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{\infty}{\infty}$. Aby obliczyć granicę tego wyrażenia, stosujemy regułę de L'Hospitala:

$$A = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi - 0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi - 0} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{-2}{\sin^2 2x}}.$$

Po wykonaniu przekształceń trygonometrycznych otrzymujemy

$$A = -2 \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi - 0} (\sin x \cos x) = -2 \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

a więc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi - 0} (\operatorname{tg} 2x \ln \operatorname{tg} x) = 0$, skąd $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi - 0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^0 = 1$.

Zadanie 12.13. Wyznaczyć $\lim\limits_{x \to +0} x^x$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>0$. Po zlogarytmowaniu funkcji $f(x) = x^x$ szukamy granicy

$$A = \lim_{x \to +0} \ln f(x) = \lim_{x \to +0} (x \ln x).$$

Następnie stosujemy przekształcenie

$$x\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}},$$

które sprowadza wyrażenie nieoznaczone postaci $0\cdot\infty$ do wyrażenia nieoznaczonego postaci $\frac{\infty}{\infty}$. Stosując regułę de L'Hospitala otrzymujemy

$$A=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

A więc gdy $x\to+0$, to $x\ln x\to 0$ (porównaj wzór w zad. 12.10) i $x^x\to e^0=1$, czyli ostatecznie $\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$ (¹).

Zadanie 12.14. Wyznaczyć $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $1+\frac{a}{x}>0$, co zawsze ma miejsce dla $x>|a|$. Mamy tu wyrażenie nieoznaczone postaci 1^∞.

Logarytmujemy funkcję $f(x)=\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ i szukamy granicy

$$A=\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+a}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Stosujemy teraz regułę de L'Hospitala dla $x\to+\infty$:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+a}\cdot\frac{-a}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{x+a}=a.$$

A więc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)=a$, czyli (por. zad. 2.9):

(12.5.1) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a.$$

(¹) Podstawiając do tego wzoru $x=1/n$ otrzymujemy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Zadania

Obliczyć granice (zad. 12.15 - 12.65):

12.15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$.

12.16. $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

12.17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$, $a>0$, $b>0$.

12.18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$, $a>0$.

12.19. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$, $a>0$.

12.20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

12.21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2\cos x}$.

12.22. $\lim\limits_{x\to +\infty} m(\sqrt[m]{x}-1)$.

12.23. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{a^{\ln x}}{x^c}$, $a>0$. Wskazówka. Jeżeli $a>b$ i $b>0$, to $a^{\ln b}=b^{\ln a}$.

12.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$.

12.25. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}\pi} \dfrac{\operatorname{tg} x-1}{\sin x-\cos x}$.

12.26. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{e^{\pi-x}-e^{\sin x}}{(\pi-x)-\sin x}$.

12.27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

12.28. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{1-\sin x+\cos x}{\sin 2x-\cos x}$.

12.29. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{6}\pi} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

12.30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-1}}{\operatorname{ctg} x}$.

12.31. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}\pi} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+x)}$.

12.32. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{2x-1}$.

12.33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax-\operatorname{tg} ax}{bx-\operatorname{tg} bx}$.

12.34. $\lim\limits_{x\to \alpha} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2\alpha}\right)(e^{\sin\alpha}-e^{\sin x})$.

12.35. $\lim\limits_{x\to \alpha} (\alpha-x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{\alpha}-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

12.36. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$.

12.37. $\lim\limits_{x\to 0} (1-e^{2x})\operatorname{ctg} x$.

12.38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$.

12.39. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

12.40. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

12.41. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$.

12.42. $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)\ln(1-x)$.

12.43. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x$.

12.44. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x$.

12.45. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{6}\pi}\operatorname{tg}3x\cos(\frac{1}{3}\pi+x)$.

12.46. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

12.47. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

12.48. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

12.49. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

12.50. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{\sin^3 x}\right)$.

12.51. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2x\operatorname{tg}x}\right)$.

12.52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg}x}{x^2\operatorname{tg}x}$.

12.53. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi}(x\operatorname{tg}x-\frac{1}{2}\pi\sec x)$.

12.54. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{1/x}$.

12.55. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

12.56. $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}x}$.

12.57. $\lim\limits_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$.

12.58. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.

12.59. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{1/x}$.

12.60. $\lim\limits_{x\to 1}x^{m/(x^2-1)}$.

12.61. $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x)^{1/(\ln x)}$.

12.62. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{1/x}$.

12.63. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{1/x^2}$.

12.64. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{1/x^3}$.

12.65. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}\pi+0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}$.

Wyznaczyć granice za pomocą rozwinięcia w szeregi (zad. 12.66 - 12.75):

12.66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}{x^3}$. Wskazówka. Por. zad. 12.42.

12.67. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{\cos x+2}{x^3\sin x}\right)$.

12.68. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

12.69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-6x+3\sin 2x}{x^3\sin^2 x}$.

12.70. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2\sin x-2\operatorname{tg}x}{x^5}\right)$.

12.71. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

12.72. $\lim\limits_{x\to +0}x^{6/(1+2\ln x)}$.

12.73. $\lim\limits_{x\to a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/a)}$ **12.74.** $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2a)}$

12.75. $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{a/(\ln 2(x-1))}$.

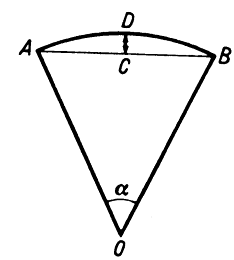
12.76. Wykazać, że pole S wycinka kołowego o małym kącie środkowym α jest w przybliżeniu równe $\frac{2}{3}bh$, gdzie b jest długością cięciwy AB, a h strzałką CD (rys. 12.1).

12.77. Wykazać, że przy $\alpha\to 0$ mamy $\sqrt{1+\alpha}-1-\frac{1}{2}\alpha\approx-\frac{1}{8}\alpha^2$ i stąd $\sqrt{1+\alpha}\approx 1+\frac{1}{2}\alpha$, z dokładnością do $\frac{1}{8}\alpha^2$.

12.78. Wykazać, że przy $\alpha\to 0$ mamy $\sqrt[3]{1+\alpha}-1-\frac{1}{3}\alpha\approx-\frac{1}{9}\alpha^2$ i stąd $\sqrt[3]{1+\alpha}\approx 1+\frac{1}{3}\alpha$, z dokładnością do $\frac{1}{9}\alpha^2$.

12.79. Dwa kąty zmienne α i β mają stałą sumę $\alpha+\beta=\frac{1}{2}\pi$. Obliczyć, do jakiej granicy dąży ułamek

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},\quad \text{gdy}\quad \alpha\to\tfrac{1}{4}\pi.$$



Rys. 12.1

12.80. Dwa kąty zmienne α i β mają stałą sumę $\alpha+\beta=\frac{1}{2}\pi$. Obliczyć, do jakiej granicy dąży iloczyn $\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$, gdy $\alpha\to 0$.

Rozdział XIII

BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI WYKŁADNICZYCH I LOGARYTMICZNYCH

§ 13.1. BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI WYKŁADNICZEJ I LOGARYTMICZNEJ

Dla wygody zapisu będziemy często oznaczali badane funkcje przez $f(x)$.

ZADANIE 13.1. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y=xe^{-x}$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla wszystkich wartości x.

Obliczmy pierwszą pochodną

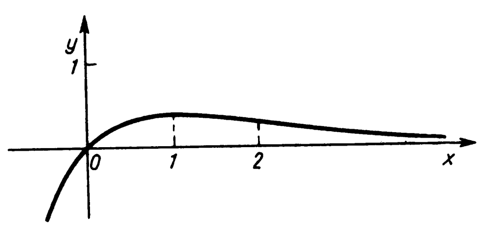
$$y'=1\cdot e^{-x}+xe^{-x}(-1)=e^{-x}(1-x).$$

Pochodna jest równa zeru, gdy $x=1$; wówczas $f(1)=e^{-1}$.

Po powtórnym zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$y''=e^{-x}(x-2).$$

Druga pochodna jest równa zeru, gdy $x=2$; wtedy $f(2)=2e^{-2}$.



Rys. 13.1

Następnie obliczmy granice funkcji przy $x\to+\infty$ i przy $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0(^1), \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty.$$

Krzywa ma jednostronną asymptotę poziomą $y=0$, maksimum w punkcie $x=1$ i punkt przegięcia, gdy $x=2$.

(1) Patrz wzór (12.2.4).

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	...	1	...	2	...	$+\infty$
y''	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$2e^{-2}$	$\searrow$	0

Wykres funkcji podaje rysunek 13.1.

ZADANIE 13.2. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y=(\ln x)^2-2\ln x$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla $x>0$.

Obliczmy pochodną

$$y'=\frac{2}{x}(\ln x-1).$$

Pochodna jest równa zeru, gdy $\ln x=1$, czyli gdy $x=e$; wtedy $f(e)=-1$.

Obliczamy drugą pochodną

$$y''=\frac{2}{x^2}(2-\ln x).$$

Druga pochodna jest równa zeru, gdy $\ln x=2$, czyli $x=e^2$; wówczas $f(e^2)=0$.

Wiemy, że $\lim\limits_{x\to+0}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. Z tego wynika, że

$$\lim_{x\to+0} y=+\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} y=+\infty,$$

a to na podstawie twierdzeń o granicy wielomianu(¹), gdy zmienna dąży do $-\infty$ lub do $+\infty$.

Krzywa ma asymptotę pionową $x=0$, minimum w punkcie $x=e$ i punkt przegięcia, gdy $x=e^2$.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	0	...	e	...	e^2	...	$+\infty$
y''	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Wykres funkcji podaje rysunek 13.2.

(¹) y jest wielomianem stopnia drugiego względem $\ln x$.

ZADANIE 13.3. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y=x\ln x$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla $x>0$.

Obliczmy pochodną

$$y'=\ln x+1.$$

Pochodna jest równa zeru, gdy $\ln x=-1$, czyli gdy $x=e^{-1}$; wtedy $f(e^{-1})=-e^{-1}$.

Badamy drugą pochodną

$$y''=\frac{1}{x}.$$

Jest ona stale dodatnia, ponieważ funkcja jest określona tylko dla $x>0$. Badana krzywa jest więc wszędzie wklęsła i nie ma punktów przegięcia.

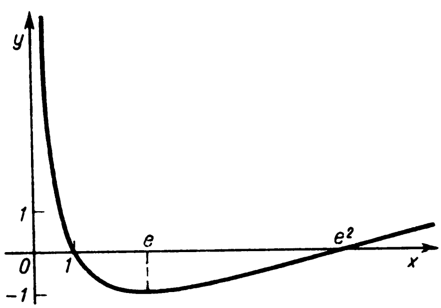
Badamy granice

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty, \qquad \lim_{x\to+0} x\ln x=0(^1).$$

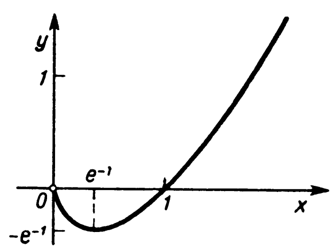
Ponadto

$$\lim_{x\to+0} y'=\lim_{x\to+0}(\ln x+1)=-\infty.$$

a więc krzywa przy $x\to+0$ zbliża się stycznie do osi Oy.



Rys. 13.2



Rys. 13.3

Krzywa osiąga minimum w punkcie $x=e^{-1}$.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	0	...	e^{-1}	...	$+\infty$
y''	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Wykres funkcji znajduje się na rysunku 13.3.

(¹) Patrz wzór (12.2.7).

ZADANIE 13.4. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla $x>0$ i $x\neq 1$.

Obliczmy pochodną

$$y'=\frac{1}{\ln x}\left(1-\frac{1}{\ln x}\right).$$

Pochodna równa się zeru, gdy $\ln x=1$, czyli gdy $x=e$; wtedy $f(e)=e$.

Obliczmy drugą pochodną

$$y''=\frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}.$$

Druga pochodna równa się zeru, gdy $\ln x=2$, czyli gdy $x=e^2$; wtedy $f(e^2)=\frac{1}{2}e^2$.

Obliczmy granice

$$\lim_{x\to +0} y=0$$

(gdyż licznik dąży do zera, a mianownik do $-\infty$) oraz

$$\lim_{x\to +0} y'=\lim_{x\to +0}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{(\ln x)^2}\right)=0,$$

a więc krzywa przy $x\to +0$ zbliża się stycznie do osi Ox. Gdy $x\to 1+0$, to $\ln x\to +0$, czyli $y\to +\infty$, gdy zaś $x\to 1-0$, to $\ln x\to -0$, czyli $y\to -\infty$, a więc prosta $x=1$ jest asymptotą pionową krzywej w obu swoich zwrotach.

Krzywa ma minimum w punkcie $x=e$ i punkt przegięcia, gdy $x=e^2$.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	0	...	1		...	e	...	e^2	...	$-\infty$
y''	$-\infty$	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0
y'	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$-$	$+$	0
y	0	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

Wykres funkcji podaje rysunek 13.4.

ZADANIE 13.5. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y=(x^2-3)\,e^x$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla wszystkich x.

Obliczmy pochodną

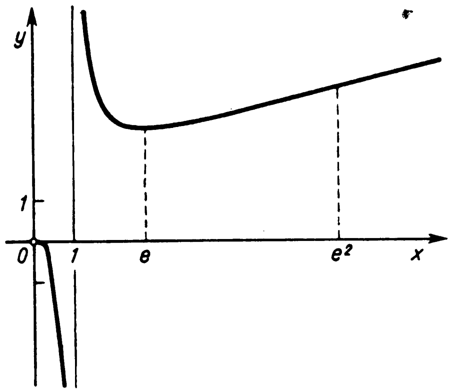
$$y'=(x^2+2x-3)\,e^x.$$

Pochodna równa się zeru, gdy $x=-3$ i gdy $x=1$; wtedy $f(-3)=6e^{-3}$, $f(1)=-2e$.

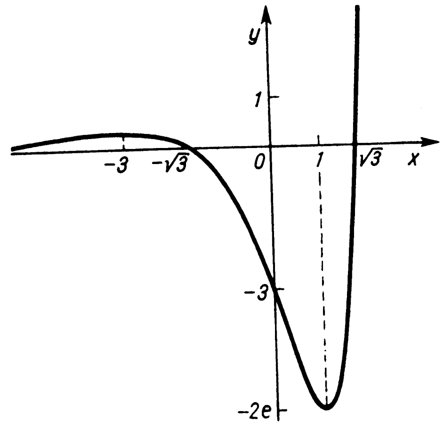
Obliczamy drugą pochodną

$$y'' = (x^2 + 4x - 1)e^x.$$

Miejscami zerowymi drugiej pochodnej są liczby $\alpha = -2-\sqrt{5}$ i $\beta = -2+\sqrt{5}$.



Rys. 13.4



Rys. 13.5

Obliczmy granicę

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2-3)e^x = +\infty.$$

Natomiast aby obliczyć $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, podstawiamy $x=-u$; wówczas otrzymujemy (patrz wzór (12.2.5)):

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{u\to+\infty} (u^2-3)e^{-u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u^2-3}{e^u} = 0.$$

Krzywa ma jednostronną asymptotę poziomą $y=0$, maksimum w punkcie $x=-3$, minimum w punkcie $x=1$, punkty przegięcia, gdy $x=-2-\sqrt{5}$ i gdy $x=-2+\sqrt{5}$.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	...	α	...	-3	...	β	...	1	...	$+\infty$
y''	0	+	0	−	−	−	0	+	+	+	$+\infty$
y'	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+	$+\infty$
y	0	↗	$f(\alpha)$	↗	$6e^{-3}$	↘	$f(\beta)$	↘	$-2e$	↗	$+\infty$

Wykres funkcji podaje rysunek 13.5.

ZADANIE 13.6. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y=e^{1/(1-x^2)}$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla $1-x^2\neq 0$, tzn. dla $x\neq -1$ i $x\neq 1$. W punktach nieokreśloności znajdujemy granice funkcji (patrz zad. 5.13):

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to -1+0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=0.$$

Widzimy, że proste $x=-1$ i $x=1$ są asymptotami pionowymi krzywej.

Następnie obliczamy granice funkcji dla $x\to -\infty$ i dla $x\to +\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} f(x)=1.$$

Widzimy, że prosta $y=1$ jest dwustronną asymptotą poziomą krzywej.

Obliczmy pierwszą pochodną

$$y'=\frac{2x}{(1-x^2)^2}e^{1/(1-x^2)}.$$

Pochodna równa się zeru, gdy $x=0$; wtedy $f(0)=e$. Pochodna jest ujemna, gdy $x<0$, a dodatnia, gdy $x>0$.

Obliczamy granice pochodnej, gdy $x\to -1-0$, $x\to -1+0$, $x\to 1-0$ i $x\to 1+0$. Mamy

$$\lim_{x\to -1-0} f'(x)=\lim_{x\to -1-0} 2x \lim_{x\to -1-0}\frac{e^{1/(1-x^2)}}{(1-x^2)^2}=-2\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{(1-x^2)^2}e^{1/(1-x^2)}.$$

Aby obliczyć ostatnią granicę, dokonujemy podstawienia $1/(1-x^2)=-u$; zauważmy, że gdy $x\to -1-0$, to $-u\to -\infty$, a więc $u\to +\infty$. Mamy więc

$$\lim_{x\to -1-0} f'(x)=-2\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{(1-x^2)^2}e^{1/(1-x^2)}=-2\lim_{u\to +\infty}\frac{u^2}{e^u}.$$

Ale w myśl wyników otrzymanych w zadaniu 12.7 mamy $\lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{u^2}{e^u}=0$ więc

$$\lim_{x\to -1-0} f'(x)=0.$$

Aby obliczyć $\lim\limits_{x\to -1+0} f'(x)$, dokonujemy podstawienia $1/(1-x^2)=u$ i otrzymujemy

$$\lim_{x\to -1+0} f'(x)=-2\lim_{u\to +\infty} u^2e^u=-\infty.$$

Podobnie postępując otrzymujemy

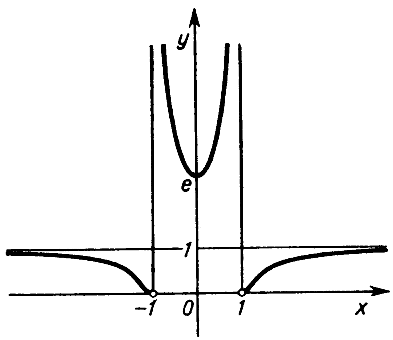
$$\lim_{x\to 1-0} f'(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to 1+0} f'(x)=0.$$

Obliczamy drugą pochodną

$$y''=-\frac{2(3x^4-4x^2-1)}{(1-x^2)^4}e^{1/(1-x^2)}.$$

Druga pochodna jest równa zeru, gdy $3x^4-4x^2-1=0$. Podstawiając $x^2=t$ $(t>0)$ otrzymujemy równanie kwadratowe $3t^2-4t-1=0$, które ma jeden pierwiastek dodatni $t=\frac{1}{3}(2+\sqrt{7})$. A więc miejscami zerowymi drugiej pochodnej są $x_1=-\sqrt{\frac{1}{3}(2+\sqrt{7})}$ i $x_2=\sqrt{\frac{1}{3}(2+\sqrt{7})}$.

Funkcja ma przerwy ciągłości w punktach $x=-1$ i $x=1$, przy czym przy x dążącym do każdej z tych wartości jedna gałąź krzywej jest styczna do osi Ox, a druga asympto-



Rys. 13.6

tycznie zbliża się do prostej $x=-1$ lub $x=1$. Funkcja jest symetryczna względem osi Oy i osiąga minimum w punkcie $x=0$. Krzywa ma dwa punkty przegięcia.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	...	x_1	...	-1		...	0	...	1		...	x_2	...	$+\infty$
y''	0	−	0	+	0	$-\infty$	+	+	+	$-\infty$	0	+	0	−	0
y'	0	−	−	−	0	$-\infty$	−	0	+	$+\infty$	0	+	+	+	0
y	1	↘	$f(x_1)$	↘	0	$+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$	0	↗	$f(x_2)$	↗	1

Wykres funkcji podaje rysunek 13.6.

Zadanie 13.7. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y=xe^{1/x}$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla $x\neq 0$.

Obliczmy pochodną

$$y'=e^{1/x}+xe^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^{1/x}-\frac{1}{x}\,e^{1/x}=\frac{x-1}{x}\,e^{1/x}.$$

Pochodna jest równa zeru w punkcie $x=1$; wtedy $f(1)=e$.

Obliczamy drugą pochodną

$$y''=e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}\,e^{1/x}-\frac{1}{x}\,e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^3}e^{1/x}.$$

Widzimy, że druga pochodna zawsze jest różna od zera; mimo to zmienia znak, gdy x przechodzi przez zero, mianowicie $y''<0$ dla $x<0$, a $y''>0$ dla $x>0$.

Granice funkcji w nieskończoności:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{1/x}=-\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} xe^{1/x}=+\infty\,.$$

Zastanowimy się teraz nad przebiegiem zmienności funkcji w otoczeniu punktu $x=0$. W tym celu znajdziemy granicę prawostronną i lewostronną funkcji i jej pochodnej w tym punkcie.

Znajdujemy najpierw granicę lewostronną funkcji $xe^{1/x}$ w punkcie $x=0$. Gdy $x\to-0$, to $1/x\to-\infty$, $e^{1/x}\to 0$, a więc

$$\lim_{x\to-0} xe^{1/x}=0\,.$$

Następnie obliczamy prawostronną granicę funkcji w punkcie $x=0$. Mamy

$$\lim_{x\to+0} xe^{1/x}=\lim_{x\to+0}\frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}\,.$$

Wykonajmy podstawienie $1/x=u$; wówczas $\lim\limits_{x\to+0} u=+\infty$ i otrzymujemy (por. wzór (12.2.5)):

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u}=+\infty\,.$$

Przechodzimy teraz do obliczenia granic pochodnej w punkcie $x=0$. Mamy

$$y'=e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

Wykonajmy podstawienie $-1/x=u$; wówczas $\lim\limits_{x\to-0} u=+\infty$, a więc

$$\lim_{x\to-0} y'=\lim_{u\to+\infty} e^{-u}(1+u)=\lim_{u\to+\infty}\frac{u+1}{e^u}=0\,.$$

Podobnie dokonując podstawienia $1/x=v$ mamy $\lim\limits_{x\to+0} v=+\infty$, więc

$$\lim_{x\to+0} y'=\lim_{v\to+\infty} e^v(1-v)=-\infty\,.$$

Ostatecznie więc granice lewostronne funkcji y i jej pochodnej y' w punkcie $x=0$ są zerami, tzn. krzywa zbliża się z lewej strony do początku współrzędnych stycznie do osi Ox. Granice prawostronne y i y' równają się odpowiednio $+\infty$ i $-\infty$.

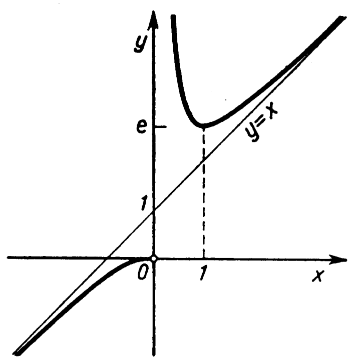
W dalszym ciągu zajmiemy się badaniem kierunków asymptotycznych oraz asymptot. Wiemy, że kierunki asymptotyczne nierównoległe do osi Oy znajdujemy z wartości granic (por. str. 203):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}\,.$$

W naszym przypadku $y/x = e^{1/x}$, a więc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = e^0 = 1 \,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = e^0 = 1 \,,$$

tzn. istnieje jeden kierunek asymptotyczny o współczynniku kątowym $a=1$.



Rys. 13.7

Dalej, wiemy, że jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x\to+\infty} (y-ax) = b$, gdzie a jest znalezionym współczynnikiem kierunku asymptotycznego, to dla $x\to+\infty$ istnieje asymptota ukośna krzywej o równaniu $y=ax+b$ (por. str. 197). Analogicznie dla $x\to-\infty$. W naszym przypadku $a=1$, a więc

$$y-ax = xe^{1/x} - x = x(e^{1/x}-1) \,.$$

Badamy, czy istnieje granica

$$b = \lim_{x\to+\infty} x(e^{1/x}-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\dfrac{1}{x}} \,.$$

Granicę tę łatwo obliczymy podstawiając $1/x = u$; wtedy mamy do obliczenia granicę $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u - 1}{u}$. Stosując regułę de L'Hospitala otrzymujemy

$$b = \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u}{1} = 1 \,.$$

Zupełnie podobnie wykazujemy, że

$$\lim_{x\to-\infty} x(e^{1/x}-1) = 1 \,,$$

a więc krzywa ma dwustronną asymptotę ukośną o równaniu $y=x+1$ zarówno dla $x\to-\infty$ jak dla $x\to+\infty$.

Krzywa nie ma punktów przegięcia. W przedziale $(-\infty, 0)$ jest wklęsła, w przedziale $(0, +\infty)$ wypukła. W punkcie $x=1$ ma minimum.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności funkcji:

x	$-\infty$	...	0		...	1	...	$+\infty$
y''	0	$-$	0	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0
y'	1	$+$	0	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Wykres funkcji podaje rysunek 13.7.

ZADANIE 13.8. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y=e^x \cos x$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla wszystkich x. Ponieważ $\cos x$ przybiera wartości zawarte pomiędzy -1 i 1, więc funkcja $y=e^x \cos x$ jest krzywą oscylującą pomiędzy liniami $y=-e^x$ i $y=e^x$.

Badamy pochodną

$$y'=e^x(\cos x-\sin x).$$

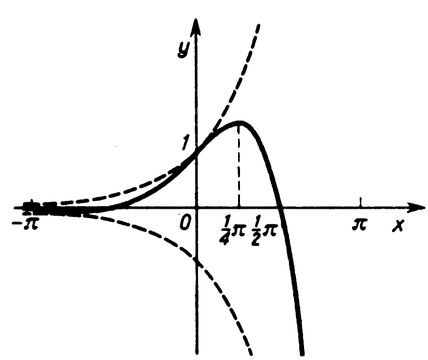
Mamy $y'=0$, gdy $x=\frac{1}{4}\pi+k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Obliczamy drugą pochodną:

$$y''=-2e^x \sin x.$$

Mamy $y''=0$, gdy $\sin x=0$.

Gdy $x=(2k+1)\pi$, to funkcje $e^x \cos x$ i $-e^x$ są równe, a także pochodne tych funkcji są równe: $e^x(\cos x-\sin x)=-e^x$, a więc dowodzi to, że krzywe $y=e^x \cos x$ i $y=-e^x$ są w tych punktach styczne. Gdy $x=2k\pi$, to funkcje $e^x \cos x$ i e^x, a także pochodne tych



Rys. 13.8

funkcji są równe: $e^x(\cos x-\sin x)=e^x$, co dowodzi, że krzywe $y=e^x \cos x$ i $y=e^x$ są w tych punktach styczne.

Zauważmy jeszcze, że w punktach styczności krzywej $y=e^x \cos x$ z krzywymi $y=e^x$ i $y=-e^x$ druga pochodna funkcji $y=e^x \cos x$ staje się równa zeru, zmieniając jednocześnie znak, co dowodzi, że te punkty styczności są jednocześnie punktami przegięcia linii $y=e^x \cos x$.

Gdy $x \to -\infty$, to $y \to 0$, a więc oś Ox jest jednostronną asymptotą poziomą krzywej. Układamy tabelkę przebiegu zmienności funkcji $y=e^x \cos x$ (w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$)

x	...	0	...	$\frac{1}{4}\pi$	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	π	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π	...
y''	...	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	...
y'	...	1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$e^{2\pi}$	...
y	...	1	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	$\searrow$	$-e^{\pi}$	$\searrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e^{2\pi}$	...

Wykres funkcji przedstawia rysunek 13.8.

Zadanie 13.9. Zbadać przebieg zmienności i podać szkic wykresu funkcji

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Rozwiązanie. Funkcja jest ciągła, gdy $1+1/x>0$, czyli gdy $(x+1)/x>0$, a więc dla $x<-1$ albo $x>0$. Nie należy stąd wnioskować, że funkcja jest nieokreślona dla wszystkich punktów przedziału $-1<x<0$; tak np. dla $x=-\frac{2}{3}$ mamy

$$f(-\tfrac{2}{3})=(-\tfrac{1}{2})^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(-\frac{1}{2})^2}}=\sqrt[3]{4}.$$

Łatwo wykazać, że dla liczb postaci $x=-k/(2n+1)$, gdzie k i n są liczbami naturalnymi, przy czym $k<2n+1$, rozpatrywana funkcja jest określona; natomiast dla liczb postaci $x=-(2k-1)/2n$, k i n — naturalne, $2k-1<2n$ funkcja nie jest określona. A więc funkcja nie jest ciągła w przedziale $-1<x<0$.

Przedstawmy funkcję w postaci wykładniczej:

$$y=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Obliczmy jej pochodną

$$y'=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right].$$

Pierwszy czynnik jest dodatni. Rozpatrzmy znak drugiego czynnika

$$z=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1},$$

gdy $x<-1$ i gdy $x>0$. Obliczmy pochodną funkcji z; mamy

$$z'=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}.$$

Tabela przebiegu zmienności funkcji z w zależności od x jest następująca:

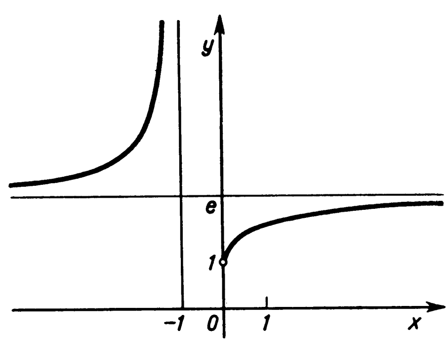
x	$-\infty$	...	-1	...	0	...	$+\infty$
z'	0	$+$	$+\infty$	|	$-\infty$	$-$	0
z	0	$\nearrow$	$+\infty$ (1)	|	$+\infty$	$\searrow$	0

A więc z jest stale dodatnie, co oznacza, że pochodna y' jest również stale dodatnia.

Wyznaczmy teraz granice:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ (2),$$

$$\lim_{x\to-1-0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-1-0}e^{x\ln(1+1/x)}=+\infty,$$



Rys. 13.9

(1) Aby znaleźć tę granicę, wykonajmy przekształcenie

$$z=\ln(-(1+x))-\ln(-x)+\frac{-1}{x+1}=-\ln(-x)+\frac{-1}{x+1}\left(1-\frac{\ln\frac{-1}{x+1}}{\frac{-1}{x+1}}\right),$$

a następnie korzystamy ze wzoru $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0$, gdzie $u=-1/(x+1)$.

(2) Patrz zadanie 12.14.

$$\lim_{x\to+0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+0} e^{x\ln(1+1/x)}=\lim_{x\to+0} e^{x\ln(x+1)-x\ln x}=e^0=1\,,$$

ponieważ $x\ln x\to 0$, gdy $x\to+0$ (wzór (12.3.1)).

Dla $x=0$ jest $z=+\infty$ i również $y'=+\infty$, więc dla $x\to+0$ krzywa zbliża się stycznie do osi Oy.

Zauważmy na koniec, że $y'=yz$.

Układamy tabelkę przebiegu zmienności funkcji:

x	$-\infty$	...	-1	...	0	...	$+\infty$
y'	0	$+$	$+\infty$		$+\infty$	$+$	0
y	e	$\nearrow$	$+\infty$		1	$\nearrow$	e

Wykres funkcji przedstawia rysunek 13.9.

Zadania

Zbadać przebieg zmienności następujących funkcji (zad. 13.10 - 13.39):

13.10. $y=x^2\ln x$.

13.11. $y=(\ln x)^3-3\ln x$.

13.12. $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

13.13. $y=\ln x+\dfrac{1}{\ln x}$.

13.14. $y=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1}{2}x$.

13.15. $y=x-2\ln x$.

13.16. $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

13.17. $y=\ln(x^2-1)+\dfrac{1}{x^2-1}$.

13.18. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

13.19. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

13.20. $y=\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$.

13.21. $y=\ln(1+e^{-x})$.

13.22. $y=\ln\sin x$.

13.23. $y=\ln\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x)$.

13.24. $y=\dfrac{e^{-x}}{x^2-1}$.

13.25. $y=e^{\frac{x}{x-1}}$.

13.26. $y=e^{\frac{x}{x^2-1}}$.

13.27. $y=e^{\frac{1}{x^2(x+1)}}$.

13.28. $y=e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

13.29. $y=e^{-x^2}$.

13.30. $y=e^{-x^2+8x-14}$.

13.31. $y=xe^{-\frac{1}{4}x^2}$.

13.32. $y=x^2e^{1/x}$.

13.33. $y=x^3e^{-4x}$.

13.34. $y=\left(a+\dfrac{x^2}{a}\right)e^{x/a}$.

13.35. $y=\sqrt{e^{x^2}-1}$.

13.36. $y=e^{\operatorname{tg} x}$.

13.37. $y=e^{\operatorname{arc\,tg} x}$.

13.38. $y=e^{\arcsin\sqrt{x}}$.

13.39. $y=\operatorname{arctg}(\ln x)$.

Rozdział XIV

OBLICZANIE PRZYBLIŻONYCH WARTOŚCI PIERWIASTKÓW RÓWNAŃ I UKŁADÓW RÓWNAŃ

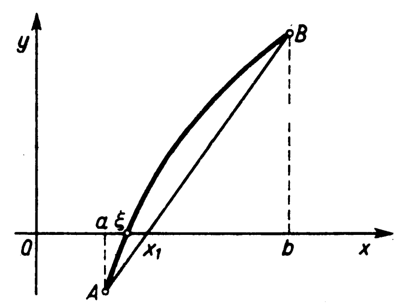
§ 14.1. METODA CIĘCIW

Dane jest równanie $f(x)=0$. Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą, która w końcach przedziału $a \leqslant x \leqslant b$ przybiera wartości różniące się znakiem, np. $f(a)<0$, $f(b)>0$ (rys. 14.1). Oznaczmy końce łuku krzywej w tym przedziale przez A i B.

Robimy jednocześnie następujące założenia:

1. Niech pierwsza pochodna w przedziale $a<x<b$ zachowuje stały znak; wówczas $f(x)$ jest ściśle monotoniczna i przecina oś Ox dokładnie jeden raz.

2. Niech druga pochodna będzie w tym przedziale różna od zera; wówczas linia $y=f(x)$ nie ma punktów przegięcia w tym przedziale.



Rys. 14.1

Można udowodnić metodami algebry, że każdy przypadek da się sprowadzić do takiego, w którym te założenia są spełnione.

Metoda poszukiwania pierwiastka równania zwana *metodą cięciw* (lub *metodą podziału proporcjonalnego* albo *regula falsi*) polega na tym, że za przybliżoną wartość pierwiastka zawartego w tym przedziale przyjmujemy odciętą punktu przecięcia cięciwy AB z osią Ox.

Uwaga. W przypadku gdy stosowana jest metoda cięciw, można by drugie założenie (a nawet pierwsze) usunąć, zachowujemy je jednak dla ułatwienia, a także ze względu na podaną dalej metodę kombinowaną.

Równanie cięciwy AB, jako prostej przechodzącej przez punkt $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$, jest

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Podstawiając $y=0$ otrzymujemy odciętą x_1 punktu przecięcia cięciwy AB z osią Ox:

(14.1.1)
$$x_1=a-f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

Jest to przybliżona wartość pierwiastka równania.

W taki sam sposób możemy znaleźć dalsze przybliżenia x_2, x_3, ..., x_n poszukiwanego pierwiastka ξ równania $f(x)=0$. Aby ocenić błąd otrzymanego przybliżenia, tzn. wartość bezwzględną różnicy pomiędzy przybliżoną wartością pierwiastka x_n a dokładną wartością ξ pierwiastka, stosujemy wzór

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{k}, \tag{14.1.2}$$

w którym k oznacza kres dolny bezwzględnej wartości pochodnej $f'(x)$ w rozpatrywanym przedziale.

ZADANIE 14.1. Dane jest równanie

$$f(x)=x^3+x-5=0,$$

które ma pierwiastek rzeczywisty ξ zawarty pomiędzy $a=1$, a $b=2$, gdyż $f(a)=f(1)=-3$, a $f(b)=f(2)=5$. Obliczyć ten pierwiastek.

Rozwiązanie. Stosując wzór (14.1.1) otrzymujemy

$$x_1=1-(-3)\frac{2-1}{5-(-3)}=\tfrac{11}{8}=1{,}37\ldots$$

Chcąc znaleźć dokładniejszą wartość pierwiastka obliczamy np. $f(1{,}4)=-0{,}86$. Mamy teraz węższy przedział $\langle a_1=1{,}4,\ b=2\rangle$, gdyż

$$f(a_1)=f(x_1)=-0{,}86\,,\quad f(b)=f(x_2)=5\,.$$

Postępujemy jak wyżej i ze wzoru (14.1.1) otrzymujemy dokładniejszą wartość pierwiastka, którą oznaczamy przez x_2:

$$x_2=1{,}4-(-0{,}86)\cdot\frac{2-1{,}4}{5+0{,}86}=1{,}49\,.$$

Przyjmijmy jako wartość przybliżoną wartość $x_2\approx\frac{3}{2}$. Aby ocenić dokładność tego wyniku za pomocą nierówności (14.1.2), zauważmy, że $f'(x)=3x^2+1$, a więc kres dolny wartości bezwzględnej pochodnej w przedziale $\langle 1,\ 2\rangle$ wynosi $k=f'(1)=4$; dalej obliczamy

$$f(\tfrac{3}{2})=\tfrac{27}{8}+\tfrac{3}{2}-5=-\tfrac{1}{8}\,.$$

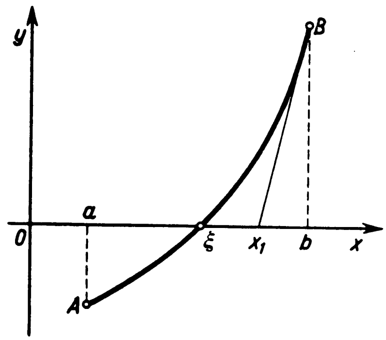
Otrzymujemy więc $|x_2-\xi|\leqslant\frac{1}{8\cdot 4}<0{,}032$.

Tak więc wartość ξ zawiera się w granicach $\frac{3}{2}<\xi<1{,}532$ (radzimy sporządzić szkic i wyjaśnić, dlaczego $\xi>\frac{3}{2}$).

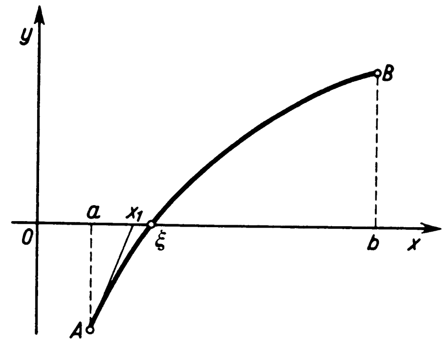
§ 14.2. METODA STYCZNYCH (NEWTONA)

Zakładamy, że funkcja $y=f(x)$ ma pierwszą i drugą pochodną różną od zera w przedziale $a\leqslant x\leqslant b$.

Metoda stycznych (lub *Newtona*) różni się od metody regula falsi tym, że zamiast cięciwy prowadzimy styczną do krzywej w jednym z końcowych punktów przedziału; za przybliżoną wartość pierwiastka przyjmujemy odciętą x_1 punktu, w którym styczna w końcu łuku przecina oś Ox.



Rys. 14.2

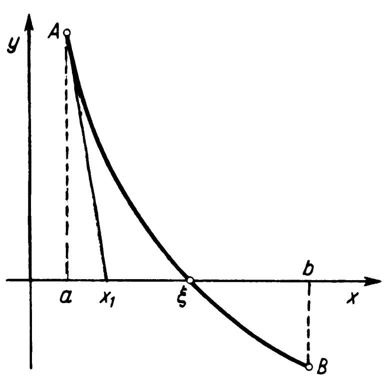


Rys. 14.3

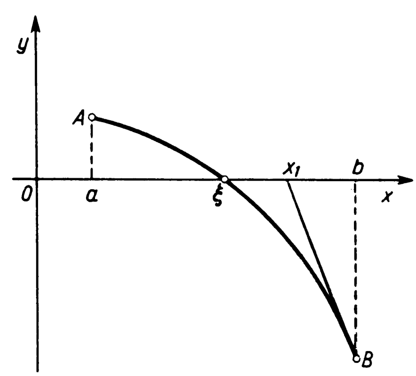
Należy przy tym pamiętać, że przy warunkach $f(a)<0$, $f(b)>0$ (tak jak na rysunkach 14.2 i 14.3) mamy:

1. Jeżeli łuk AB jest wypukły, czyli $f''(x)>0$ (rys. 14.2), to styczną należy wyprowadzić z prawego końca łuku.

2. Jeżeli łuk AB jest wklęsły, czyli $f''(x)<0$ (rys. 14.3), to styczną należy wyprowadzić z lewego końca łuku.



Rys. 14.4



Rys. 14.5

Jeżeli zaś $f(a)>0$ i $f(b)<0$ (patrz rysunki 14.4 i 14.5), to mamy:

3. Jeżeli łuk AB jest wypukły (rys. 14.4), to styczną wyprowadzamy z lewego końca łuku.

4. Jeżeli łuk AB jest wklęsły (rys. 14.5), to styczną wyprowadzamy z prawego końca łuku.

We wszystkich przypadkach wyprowadzamy styczną z tego końca łuku, w którym druga pochodna jest tego samego znaku co funkcja.

ZADANIE 14.2. Dane jest równanie

$$f(x)=x^3-2x^2-4x-7=0$$

mające pierwiastek w przedziale $3<x<4$. Obliczyć przybliżoną wartość pierwiastka stosując metodę Newtona.

Rozwiązanie. Obliczamy

$$f(3)=-10<0\,, \quad f(4)=9>0\,,$$

a następnie obliczamy wartości drugiej pochodnej w punktach $x=3$ i $x=4$ dla ustalenia, z którego końca należy wyprowadzić styczną; mamy

$$f'(x)=3x^2-4x-4\,, \quad f''(x)=6x-4\,.$$

W przedziale $3<x<4$ druga pochodna jest dodatnia, a więc styczną prowadzimy z tego końca, w którym funkcja jest również dodatnia, tj. z punktu $x=4$.

Równanie stycznej w punkcie $(b, f(b))$ jest

$$y-f(b)=f'(b)(x-b)\,.$$

Aby znaleźć odciętą x_1 punktu przecięcia stycznej z osią Ox, podstawiamy $y=0$ oraz $x=x_1$; otrzymujemy $-f(b)=f'(b)(x_1-b)$, skąd poszukiwana wartość przybliżona pierwiastka wyrazi się wzorem

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}\,. \tag{14.2.1}$$

Podstawiając $b=4$ otrzymujemy

$$x_1=4-\frac{f(4)}{f'(4)}=4-\tfrac{9}{28}=3{,}67\,.$$

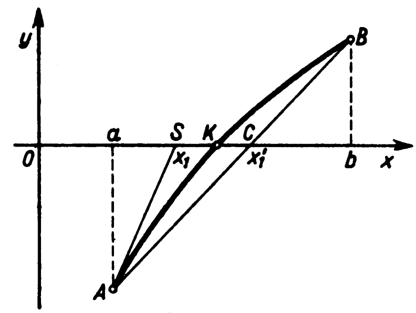
Aby znaleźć dokładniejszą wartość pierwiastka, przyjmijmy dla łatwiejszego rachunku $b=3{,}7$; wtedy $f(3{,}7)=1{,}473$. Stosujemy znowu wzór (14.2.1) i otrzymujemy dokładniejszą wartość pierwiastka

$$x_2=3{,}7-\frac{f(3{,}7)}{f'(3{,}7)}=3{,}7-\tfrac{1{,}473}{22{,}27}=3{,}7-0{,}066=3{,}634\,.$$

§ 14.3. METODA KOMBINOWANA

Oznaczmy punkt przecięcia krzywej z osią Ox przez K, punkt przecięcia stycznej poprowadzonej do krzywej w punkcie A z osią Ox przez S, a punkt przecięcia cięciwy AB z osią Ox przez C (rys. 14.6). Zauważmy teraz, że we wszystkich możliwych przypadkach, w których stosowaliśmy metodę Newtona (patrz rysunki w § 14.2), punkt S leży po przeciwnej stronie punktu K niż punkt C.

Na podstawie tej uwagi, stosując obie metody (regula falsi i metodę Newtona) kolejno, możemy zwęzić przedział $\langle a, b\rangle$, w którym leży szukany pierwiastek równania, do przedziału $\langle x_1, x_1'\rangle$, wyznaczonego przez odcięte punktów S i C.



Rys. 14.6

Jest to tzw. *metoda kombinowana*. Oczywiście, przy tej metodzie zakładamy tak samo, że pierwsza i druga pochodna zachowują stały znak w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Zadanie 14.3. Obliczyć przybliżoną wartość pierwiastka równania

(1) $$f(x)=x^3+x^2+x-2=0,$$

który znajduje się w przedziale (0, 1).

Rozwiązanie. Mamy $f(0)=-2$, $f(1)=1$. Obliczamy wartości pochodnych:

$$f'(x)=3x^2+2x+1, \quad f''(x)=6x+2,$$

mamy więc

$$f(0)=-2, \ f(1)=1, \quad f'(0)=1, \ f'(1)=6, \quad f''(0)=2, \ f''(1)=8.$$

Obliczamy pierwsze przybliżenie pierwiastka metodą regula falsi, prowadząc prostą przez punkty $A(0, -2)$ i $B(1, 1)$; mamy

$$y+2=\frac{1+2}{1-0}(x-0), \quad \text{czyli} \quad y+2=3x.$$

Podstawiając $y=0$ otrzymujemy $x_1=\frac{2}{3}$.

Następnie stosujemy metodę Newtona. Piszemy równanie stycznej w punkcie $B(1, 1)$; mamy

$$y-1=f'(1)(x-1), \quad \text{czyli} \quad y-1=6(x-1).$$

Podstawiając $y=0$ znajdujemy $x_1'=\frac{5}{6}$.

Możemy więc teraz twierdzić, że pierwiastek naszego równania (1) znajduje się w przedziale $(\frac{2}{3}, \frac{5}{6})$ o długości $\frac{1}{6}$, czyli w przedziale (0,666..., 0,833...).

Jeżeli ta dokładność nie jest wystarczająca, to obliczamy np. $f(\frac{7}{10})$; jeżeli okaże się $f(\frac{7}{10})>0$, to pierwiastek będzie się znajdować w przedziale $(\frac{2}{3}, \frac{7}{10})$, a jeżeli $f(\frac{7}{10})<0$, to w przedziale $(\frac{7}{10}, \frac{5}{6})$. Otóż

$$f(\tfrac{7}{10}) = 0{,}343 + 0{,}49 + 0{,}7 - 2 = -0{,}467 ,$$

a więc zachodzi drugi z wymienionych przypadków.

W celu osiągnięcia lepszej dokładności obliczamy $f(\frac{4}{5})$:

$$f(\tfrac{4}{5}) = 0{,}512 + 0{,}64 + 0{,}8 - 2 = -0{,}048 ,$$

a więc pierwiastek danego równania leży w przedziale $(\frac{4}{5}, 0{,}833\ldots)$.

Dla ułatwienia obliczeń za prawą granicę przedziału przyjmijmy 0,84. Należy pamiętać, że nie możemy zwężać tego przedziału przyjmując za prawą granicę np. 0,83, gdyż mogłoby się zdarzyć, że pierwiastek znalazłby się poza przedziałem (gdyby np. był równy 0,832...):

$$f(0{,}84) = 0{,}592704 + 0{,}7056 + 0{,}84 - 2 = 0{,}138304 ,$$

$$f'(0{,}84) = 3 \cdot (0{,}84)^2 + 2 \cdot 0{,}84 + 1 = 2{,}1168 + 1{,}68 + 1 = 4{,}7968 .$$

Stosujemy metodę regula falsi:

$$y + 0{,}048 = \frac{0{,}138304 + 0{,}048}{0{,}84 - 0{,}8}(x - 0{,}8) .$$

Podstawiamy $y=0$; mamy $0{,}048 \cdot 0{,}04 = 0{,}186304 \cdot (x - 0{,}8)$. Stąd otrzymujemy

$$x_2 = 0{,}8 + \tfrac{1920}{186304} = 0{,}8103\ldots , \qquad x_2 > 0{,}8103.$$

Zastosujemy jeszcze raz metodę Newtona:

$$y - 0{,}138304 = 4{,}7968 (x - 0{,}84) .$$

Podstawiając $y=0$ otrzymujemy

$$x_2' = 0{,}84 - \frac{1383{,}04}{47968} < 0{,}84 - 0{,}0288 ,$$

a więc $x_2' < 0{,}8112$.

Z otrzymanych nierówności ustalamy wartość pierwiastka z dokładnością do 0,0005, mianowicie $x \approx 0{,}8108$.

§ 14.4. PRZYBLIŻONE ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ

Rozważania ograniczymy do układów dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Układ taki zawsze może być zapisany w następującej postaci ogólnej:

(14.4.1) $$f(x, y) = 0 , \qquad g(x, y) = 0 .$$

Jeżeli równania te powstały z zagadnień technicznych, to często znamy przybliżone wartości x_1, y_1, wnioskując na podstawie danych technicznych, przebiegu doświadczeń, odbytych prób itp. Podstawiając te przybliżone wartości do lewych stron (14.4.1) obliczymy ich wartości:

(14.4.2) $$f(x_1, y_1) = \varepsilon_1, \quad g(x_1, y_1) = \varepsilon_2.$$

Oznaczmy różnice pomiędzy dokładnymi, ale nieznanymi wartościami x, y spełniającymi (14.4.1), a znanymi przybliżonymi wartościami x_1, y_1 odpowiednio przez h i k:

(14.4.3) $$x - x_1 = h, \quad y - y_1 = k.$$

Zakładając ciągłość pochodnych cząstkowych do rzędu drugiego włącznie (por. część II) możemy do obu funkcji $f(x, y)$ i $g(x, y)$ zastosować wzór Taylora (por. część II) przy $n=2$ w otoczeniu punktu (x_1, y_1). Mamy

$$0 = f(x, y) = f(x_1, y_1) + f_x'(x_1, y_1)h + f_y'(x_1, y_1)k + \ldots,$$

$$0 = g(x, y) = g(x_1, y_1) + g_x'(x_1, y_1)h + g_y'(x_1, y_1)k + \ldots$$

Pomijając wyrazy rzędu drugiego względem h i k, otrzymujemy układ równań liniowych względem przybliżonych wartości h_1 i k_1:

(14.4.4) $$\begin{aligned} f_x'(x_1, y_1)h_1 + f_y'(x_1, y_1)k_1 + \varepsilon_1 &= 0, \\ g_x'(x_1, y_1)h_1 + g_y'(x_1, y_1)k_1 + \varepsilon_2 &= 0, \end{aligned}$$

skąd obliczamy przybliżone wartości h_1, k_1, a z równań (14.4.3) dokładniejsze wartości (x_2, y_2) rozwiązania (x, y):

(14.4.5) $$x_2 = x_1 + h_1, \quad y_2 = y_1 + k_1.$$

Jeśli osiągnięta dokładność nie jest wystarczająca, to powtarzamy podany schemat poczynając od (x_2, y_2).

W przypadku gdy nie jest możliwe podanie pierwszego przybliżenia pomocna bywa dla znalezienia jego metoda graficzna. Zilustrujemy ją rozwiązując zadanie.

ZADANIE 14.4. Rozwiązać układ równań

(1) $$f(x, y) \equiv x^3y - x - 4 = 0, \quad g(x, y) \equiv x^2 - 2y^3 + 1 = 0.$$

Rozwiązanie. Dla orientacji, ile rozwiązań ma ten układ, wykonamy szkice wykresów obu krzywych. Z pierwszego równania mamy

(2) $$y = \frac{x+4}{x^3},$$

a z drugiego

(3) $$x = \pm\sqrt{2y^3 - 1}.$$

Zauważmy, że w pierwszej funkcji $y > 0$ dla $x < -4$ lub dla $x > 0$. Dla $x < -4$ pochodna równa jest zeru przy $x = -6$, przy której $y_{max} = \frac{1}{108}$. Tak więc z drugiego związku wnioskujemy o symetrii wykresu względem osi Oy, przy czym powinno być $2y^3 - 1 \geqslant 0$, skąd $y \geqslant$

$\geqslant\sqrt[3]{0,5}\approx 0,8$. Tak więc możliwe punkty przecięcia się krzywych leżą w pierwszej ćwiartce (rys. 14.7).

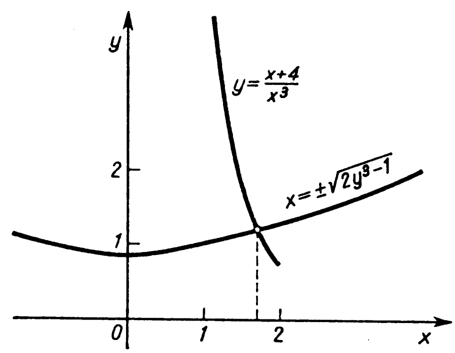
Wykonajmy teraz kilka podstawień wartości x w równaniu (2) i wartości y w równaniu (3). Dla równania (2) mamy

x	1	2
y	5	0,75

a dla równania (3) mamy

y	1	2
x	± 1	$\pm 3,8$

Ponieważ przy x rosnącym od 1 do 2 pierwsza funkcja maleje od $y=5$ do $y=0,75$, a przy x rosnącym od 1 do 3,8 druga funkcja rośnie od $y=1$ do $y=2$, więc musi istnieć jedno rozwiązanie z wartością x pomiędzy 1 a 2.



Rys. 14.7

Aby otrzymać dokładniejsze oszacowanie, wykonajmy jeszcze dodatkowe obliczenia wartości y z pierwszej funkcji podstawiając $x=1,5$; mamy

x	1,5
y	1,6

Otrzymaną przybliżoną wartość $y\approx 1,6$ podstawimy do drugiej funkcji; otrzymujemy $x=\sqrt{2\cdot 1,6^3-1}\approx 2,7$. Wartość ta odbiega jeszcze znacznie od $x=1,5$. Powiększamy więc wartość x do $x=1,7$, wtedy z pierwszej funkcji mamy $y\approx 5,7:4,9\approx 1,2$, a podstawiając tę wartość do drugiej funkcji otrzymujemy $x=\sqrt{2\cdot 1,2^3-1}\approx 1,6$. Jesteśmy już więc w stanie przyjąć jako pierwsze przybliżenie

$$x_1=1,7\,,\qquad y_1=1,2\,.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe lewych stron (1) i ich wartości w punkcie (1,7; 1,2):

$$f_x' = 3x^2y - 1\,,\quad f_x'(1{,}7;\,1{,}2) = 9{,}40\,,\quad f_y' = x^3\,,\quad f_y'(1{,}7;\,1{,}2) = 4{,}91\,,$$

$$g_x' = 2x\,,\quad g_x'(1{,}7;\,1{,}2) = 3{,}4\,,\quad g_y' = -6y^2\,,\quad g_y'(1{,}7;\,1{,}2) = -8{,}64\,.$$

Ze wzoru (14.4.2) otrzymujemy wartości

$$\varepsilon_1 = f(1{,}7;\,1{,}2) = 0{,}1956\,,\quad \varepsilon_2 = g(1{,}7;\,1{,}2) = 0{,}434\,.$$

Tak więc dla obliczenia poprawek h, k należy rozwiązać układ równań liniowych (14.4.4), który tutaj przyjmie postać

$$9{,}4h + 4{,}91k = 0{,}1956\,,\quad 3{,}4h - 8{,}64k = 0{,}434\,.$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy z dokładnością do trzech znaków po przecinku

$$h = -0{,}039\,,\quad k = 0{,}035\,.$$

Uwzględniając wzory (14.4.5) otrzymujemy jako drugie przybliżenie wartości

$$x_2 = 1{,}7 - 0{,}039 = 1{,}661\,,\quad y_2 = 1{,}2 + 0{,}035 = 1{,}235\,,$$

dokładniejsze niż przybliżenie pierwsze.

Wykorzystując przybliżenie (x_2, y_2) i stosując dalej objaśnioną metodę możemy uzyskać trzecie przybliżenie (x_3, y_3) jeszcze dokładniejsze.

Zadania

14.5. Równanie $x^3 - 4x - 12 = 0$ ma pierwiastek zawarty pomiędzy 2 i 3. Znaleźć wartość pierwiastka z dokładnością do 0,1.

14.6. Równanie $x^3 - 6x + 2 = 0$ ma pierwiastek zawarty pomiędzy 0 i 1. Obliczyć dwa kolejne przybliżenia stosując: 1. regula falsi, 2. metodę Newtona.

14.7. Równanie $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ ma pierwiastek zawarty pomiędzy -2 i -1. Obliczyć go z dokładnością do 0,01.

14.8. Równanie $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$ ma pierwiastek zawarty pomiędzy 3 i 4. Obliczyć go z dokładnością do 0,01.

14.9. Równanie $x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$ ma pierwiastek zawarty pomiędzy 1 i 2. Obliczyć go z dokładnością do 0,001.

14.10. Równanie $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$ ma jeden pierwiastek zawarty pomiędzy -11 i -10 i drugi pierwiastek pomiędzy 9 i 10. Obliczyć te pierwiastki z dokładnością do 0,01.

14.11. Obliczyć z dokładnością do 0,001 pierwiastek równania $x^3 - 2x - 5 = 0$ zawarty pomiędzy 2 i 3.

14.12. Obliczyć z dokładnością do 0,001 pierwiastek równania $x^3-x^2-x+0{,}04=0$ zawarty pomiędzy 0 i 0,1.

14.13. Obliczyć z dokładnością do 0,01 pierwiastek równania $x^3+2x-30=0$ zawarty pomiędzy 2 i 3.

14.14. Obliczyć z dokładnością do 0,001 pierwiastki rzeczywiste równania $x^3-10x-5=0$.

14.15. Obliczyć z dokładnością do 0,0001 pierwiastki równania $x^3-8x+15=0$.

14.16. Obliczyć z dokładnością do 0,001 pierwiastki równania $x^3-7x-7=0$.

14.17. Obliczyć z dokładnością do 0,0001 pierwiastek rzeczywisty równania $x^5-x-0{,}2=0$ zawarty pomiędzy 1 i 1,1.

Znaleźć z dokładnością do 0,01 dodatnie pierwiastki równań (zad. 14.18 - 14.23):

14.18. $x^3+50x-60=0$.

14.19. $x^3+x-32=0$.

14.20. $x-\sin 2x=0$.

14.21. $x^2-4x+e^x=0$.

14.22. $x^4-x-10=0$, pierwiastek zawarty pomiędzy 1 i 2.

14.23. $x^4+10x-100=0$, pierwiastek zawarty pomiędzy 2 i 3.

Obliczyć z dokładnością do 0,01 pierwiastek rzeczywisty równania (zad. 14.24 - 14.25):

14.24. $x^2-2x+1=2\sin x$, pierwiastek zawarty pomiędzy 2 i 3.

14.25. $e^x-2(1-x)^2=0$, pierwiastek zawarty pomiędzy 0 i $\frac{1}{2}$.

Znaleźć z dokładnością do 0,01 rzeczywiste pierwiastki równań (zad. 14.26 - 14.27):

14.26. $e^x+e^{-3x}-4=0$.

14.27. $4x-7\sin x=0$.

Stosując metodę Newtona obliczyć z dokładnością do 0,01 rzeczywiste pierwiastki równań (zad. 14.28 - 14.30):

14.28. $2x-\ln x-4=0$.

14.29. $2^x=4x$.

14.30. $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{x}$. (Pierwsze przybliżenie znajdujemy metodą graficzną).

14.31. Obliczyć z dokładnością do 0,001 najmniejszy dodatni rzeczywisty pierwiastek równania $x=\operatorname{tg} x$.

Obliczyć przybliżoną wartość pierwiastka ξ następujących równań (zad. 14.32 - 14.34):

14.32. $x^2-\sqrt{x}-2=0$, w przedziale $1<\xi<2$.

14.33. $x^4-4x+1=0$, w przedziale $1<\xi<2$.

14.34. $\sin x-\frac{1}{x}+1=0$, w przedziale $0<\xi<1$.

Znaleźć przybliżone dokładniejsze rozwiązanie następujących układów równań (zad. 14.35 - 14.38):

14.35. $x^2y^2-2x^3-5y^3+10=0$, $x^4-8y+1=0$, przyjmując za pierwsze przybliżenie $x=-2$, $y=2$.

14.36. $x^4+y^4-67=0$, $x^3-3xy^2+35=0$, przyjmując za pierwsze przybliżenie $x=1{,}9$, $y=\pm 2{,}7$.

14.37. $23x^2+4y^2-20=0$, $2x^2+3x-2y=0$, przyjmując za pierwsze przybliżenie $x=0{,}7$, $y=1{,}5$.

14.38. $4x^3y-3x^2+y^2=34$, $y^4-xy^3-2x^4=24$, przyjmując za pierwsze przybliżenie $x=1{,}4$, $y=2{,}8$.

Rozdział XV

CAŁKI NIEOZNACZONE. CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE I CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

§ 15.1. UWAGI OGÓLNE O CAŁKOWANIU

Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $a<x<b$ nazywamy każdą taką funkcję $F(x)$, której pochodna $F'(x)$ równa się danej funkcji $f(x)$ dla każdego x z przedziału $a<x<$ $<b$. Dwie funkcje mające w danym przedziale tę samą skończoną pochodną mogą się różnić co najwyżej o stałą; np. funkcjami, których pochodne są równe $2x$, mogą być x^2+3, x^2-5 lub ogólnie: x^2+C.

Całką nieoznaczoną (*nieokreśloną*) funkcji $f(x)$, oznaczaną symbolem

$$\int f(x)\,dx\,, \tag{15.1.1}$$

nazywamy wyrażenie $F(x)+C$, gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, a C jest dowolną stałą.

Jest więc

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C\,, \quad \text{gdzie} \quad F'(x)=f(x)\,. \tag{15.1.2}$$

§ 15.2. PODSTAWOWE WZORY RACHUNKU CAŁKOWEGO

Zestawiamy podstawowe wzory rachunku całkowego:

$$\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C\,, \quad a\neq -1\,,\ x>0\,. \tag{15.2.1}$$

Gdy a jest liczbą naturalną, to zastrzeżenie $x>0$ odpada; gdy a jest liczbą całkowitą ujemną, to zamiast $x>0$ wystarczy założyć $x\neq 0$.

PRZYKŁAD. Podajemy kilka szczególnych przypadków wzoru (15.2.1):

a) $a=0$, wówczas $\int dx=x+C$;

b) $a=-\frac{1}{2}$, wówczas $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C\,, \quad x>0$;

c) $a=-2$, wówczas $\int \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C\,, \quad x\neq 0$.

(15.2.2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$

(15.2.3) $\int e^x dx = e^x + C.$

(15.2.4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

(15.2.5) $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

(15.2.6) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

(15.2.7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \cos x \neq 0.$

(15.2.8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \sin x \neq 0.$

(15.2.9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C', \quad -1 < x < 1.$

(15.2.10) $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C'.$

(15.2.11) $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C.$

(15.2.12) $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C.$

(15.2.13) $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C.$

(15.2.14) $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C.$

(15.2.15) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$

(15.2.16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C, \quad |x| > 1.$

§ 15.3. WŁASNOŚCI CAŁEK NIEOZNACZONYCH

(15.3.1) *Całka sumy równa się sumie całek, tzn.* (jest to tzw. *addytywność*[1] *całki względem funkcji podcałkowej*).

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

---

[1] Od łacińskiego wyrazu *additivus*, co oznacza: dodawalny.

(15.3.2) *Stały czynnik wolno wynieść przed znak całki, tzn.*

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx, \quad k\neq 0 .$$

(15.3.3) *Jeżeli u, v są funkcjami zmiennej x mającymi ciągłą pochodną, to*

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du .$$

Jest to tzw. *wzór na całkowanie przez części.*

(15.3.4) *Jeżeli dla* $a\leqslant x\leqslant b$, $g(x)=u$ *jest funkcją mającą ciągłą pochodną oraz* $A\leqslant g(x)\leqslant B$, *a funkcja* $f(u)$ *jest ciągła w przedziale* $[A,B]$, *to*

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int f(u)\,du ,$$

przy czym po scałkowaniu prawej strony należy w otrzymanym wyniku podstawić $u=g(x)$.

Jest to tzw. *wzór na całkowanie przez zamianę zmiennej (przez podstawienie).*

ZADANIE 15.1. Obliczyć całkę $I=\int x(x-1)(x-2)\,dx$.

Rozwiązanie. Po doprowadzeniu funkcji podcałkowej do postaci wielomianu całkujemy

$$I=\int (x^3-3x^2+2x)\,dx=\int x^3dx-3\int x^2dx+2\int x\,dx=\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+C$$

i ostatecznie $I=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+C$.

ZADANIE 15.2. Obliczyć całkę $I=\int (x^2-x+1)^2\,dx$.

Rozwiązanie. Podnosząc funkcję podcałkową do kwadratu kolejno otrzymujemy

$$I=\int (x^4-2x^3+3x^2-2x+1)\,dx=$$
$$=\int x^4dx-2\int x^3dx+3\int x^2dx-2\int x\,dx+\int dx=$$
$$=\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+x+C=$$
$$=\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{2}x^4+x^3-x^2+x+C .$$

ZADANIE 15.3. Przyśpieszenie w danym ruchu prostoliniowym wyraża się wzorem $a=12t^2+18\sin 3t-2$. Wyznaczyć wzór określający prędkość v w zależności od czasu t, jeżeli dla $t=0$ prędkość $v=10$; wyznaczyć również wzór określający drogę x, jeżeli dla $t=0$ droga $x=5$.

Rozwiązanie. Mamy

$$v=\int a\,dt=\int (12t^2+18\sin 3t-2)\,dt=4t^3-6\cos 3t-2t+C .$$

Przyjmując $t=0$ otrzymujemy $v=-6+C=10$, skąd $C=16$. Ostatecznie

$$v=4t^3-6\cos 3t-2t+16 .$$

Dalej,

$$x=\int v\,dt=\int (4t^3-6\cos 3t-2t+16)\,dt=t^4-2\sin 3t-t^2+16t+C_1 .$$

Dla $t=0$ mamy $x=5$, zatem $C_1=5$, a więc

$$x=t^4-2\sin 3t-t^2+16t+5\,.$$

Zadanie 15.4. Obliczyć całkę $I=\int(x^2+a^2)\,x\,dx$.

Rozwiązanie. Całkę tę można obliczyć rozkładając ją na dwa składniki i stosując w każdym składniku wzór (15.2.1). Otrzymujemy

$$I=\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{2}a^2x^2+C\,.$$

Ale można również zastosować podstawienie $x^2+a^2=u$, skąd przez zróżniczkowanie otrzymujemy

$$2x\,dx=du\,,\qquad \text{czyli}\qquad x\,dx=\tfrac{1}{2}du\,.$$

Na podstawie wzoru (15.3.4) na zamianę zmiennych oraz reguły (15.3.2) otrzymujemy

$$I=\tfrac{1}{2}\int u\,du\ (^1)\,,\qquad \text{skąd}\qquad I=\tfrac{1}{4}u^2+C'\,.$$

Ostatecznie więc mamy

$$\int(x^2+a^2)\,x\,dx=\tfrac{1}{4}(x^2+a^2)^2+C'\,.$$

Zadanie 15.5. Dane jest przyśpieszenie w ruchu prostoliniowym $a=3t+\sin\frac{1}{2}t$. Wyznaczyć wzór określający prędkość v jako funkcję czasu t, jeżeli wiemy, że w chwili $t=0$ jest $v=v_0$; wyznaczyć również drogę x w zależności od czasu, jeżeli wiadomo nam, że dla $t=0$ jest $x=x_0$.

Rozwiązanie. Mamy

$$v=\int a\,dt=\int(3t+\sin\tfrac{1}{2}t)\,dt=\tfrac{3}{2}t^2-2\cos\tfrac{1}{2}t+C\,.$$

Dla $t=0$ mamy $v=v_0$; stąd określamy stałą całkowania $C=2+v_0$. Zatem

$$v=\tfrac{3}{2}t^2-2\cos\tfrac{1}{2}t+2+v_0\,.$$

Dalej,

$$x=\int v\,dt=\int(\tfrac{3}{2}t^2-2\cos\tfrac{1}{2}t+2+v_0)\,dt=\tfrac{1}{2}t^3-4\sin\tfrac{1}{2}t+2t+v_0t+C_1\,.$$

Dla $t=0$ mamy $x=x_0$, a więc $x_0=C_1$. Ostatecznie otrzymujemy

$$x=\tfrac{1}{2}t^3-4\sin\tfrac{1}{2}t+2t+v_0t+x_0\,.$$

Zadanie 15.6. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{x(\sqrt{x}-x^2\sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}}\,dx\,.$$

---

(1) Zauważmy, że symbol du we wzorach $x\,dx=\frac{1}{2}du$ oraz $\int u\,du$ oznacza zupełnie co innego. W pierwszym przypadku jest to różniczka funkcji x^2, w drugim natomiast oznacza, że zmienną całkowania jest u. Mechaniczne podstawienie jednego oznaczenia na miejsce drugiego jest dozwolone na podstawie teorii i to też tłumaczy używanie jednego symbolu w dwóch znaczeniach.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>0$. Przedstawiamy pierwiastki w postaci potęg o wykładnikach ułamkowych(¹)

$$\sqrt{x}=x^{1/2}, \quad \sqrt[3]{x}=x^{1/3}, \quad \sqrt[4]{x}=x^{1/4}.$$

Wykonując mnożenia $x\sqrt{x}=x\cdot x^{1/2}=x^{3/2}$, $x\cdot x^2\sqrt[3]{x}=x\cdot x^2\cdot x^{1/3}=x^{10/3}$, otrzymujemy

$$I=\int \frac{x^{3/2}-x^{10/3}}{x^{1/4}}\,dx.$$

Stosując regułę całkowania (15.3.1) otrzymujemy

$$I=\int \frac{x^{3/2}}{x^{1/4}}dx-\int \frac{x^{10/3}}{x^{1/4}}\,dx=\int x^{3/2-1/4}dx-\int x^{10/3-1/4}dx=\int x^{5/4}dx-\int x^{37/12}dx.$$

Na podstawie wzoru (15.2.1) otrzymujemy

$$I=\frac{x^{9/4}}{\frac{9}{4}}-\frac{x^{49/12}}{\frac{49}{12}}+C=\tfrac{4}{9}x^{9/4}-\tfrac{12}{49}x^{49/12}+C=\tfrac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}-\tfrac{12}{49}x^4\sqrt[12]{x}+C.$$

Zadanie 15.7. Obliczyć całkę

$$I=\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>0$. Postępując podobnie jak w poprzednim zadaniu otrzymujemy

$$I=\int \frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^2}\,dx=\int (x^{\frac{1}{2}-2}-x^{\frac{1}{3}-2})\,dx=\int x^{-\frac{3}{2}}dx-\int x^{-\frac{5}{3}}dx.$$

Na podstawie wzoru (15.2.1) mamy

$$I=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}+C=-2x^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C.$$

Zadanie 15.8. Obliczyć całkę

$$I=\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad a\neq 0.$$

Rozwiązanie. Ponieważ licznik różni się tylko czynnikiem stałym od różniczki wyrażenia x^2+a^2, więc stosujemy podstawienie $x^2+a^2=u$, przy czym $u>0$. Różniczkowanie daje $x\,dx=\frac{1}{2}du$. Jeżeli $n\neq 1$, to mamy

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^n}=\frac{1}{2}\int u^{-n}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-n+1}}{-n+1}+C=\frac{-1}{2(n-1)u^{n-1}}+C.$$

Powracamy do zmiennej x i ostatecznie otrzymujemy

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+C, \quad \text{gdzie} \quad a\neq 0,\ n\neq 1.$$

(¹) Na podstawie wzoru $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m=a^{m/n}$, gdzie $a>0$.

W przypadku gdy $n=1$, mamy

$$I=\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}=\tfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C.$$

Zadanie 15.9. Obliczyć całkę

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>\frac{3}{2}$. Wykonujemy zamianę zmiennych $\sqrt{2x-3}=t$. Stąd $2x-3=t^2$, $dx=t\,dt$, przy czym $t>0$.

Podstawiając powyższe wartości do całki otrzymujemy

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}=\int \frac{t\,dt}{t}=\int dt=t+C=\sqrt{2x-3}+C.$$

Zadanie 15.10. Obliczyć całkę $\int x^2\sqrt{2x^3-3}\,dx$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x\geqslant\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. Wykonujemy podstawienie

$$\sqrt{2x^3-3}=t, \quad \text{czyli} \quad 2x^3-3=t^2,$$

skąd różniczkując otrzymujemy

$$6x^2\,dx=2t\,dt, \quad \text{czyli} \quad x^2dx=\tfrac{1}{3}t\,dt.$$

Zatem

$$\int x^2\sqrt{2x^3-3}\,dx=\int\sqrt{2x^3-3}\cdot x^2\,dx=\int t\cdot\tfrac{1}{3}t\,dt=$$
$$=\tfrac{1}{3}\int t^2\,dt=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}t^3+C=\tfrac{1}{9}(\sqrt{2x^3-3})^3+C.$$

Zadanie 15.11. Obliczyć całkę $\int xe^{x^2}\,dx$.

Rozwiązanie. Wykonujemy podstawienie $x^2=t$, skąd różniczkując obie strony otrzymujemy $2x\,dx=dt$, $x\,dx=\frac{1}{2}\,dt$, a więc

$$\int xe^{x^2}\,dx=\int e^{x^2}\cdot x\,dx=\int e^t\cdot\tfrac{1}{2}dt=\tfrac{1}{2}\int e^t\,dt=\tfrac{1}{2}e^t+C=\tfrac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

Zadanie 15.12. Obliczyć całkę $\sin x\cos x\,dx$.

Rozwiązanie. Zadanie rozwiążemy trzema sposobami.

Sposób I. Wykonujemy podstawienie $\sin x=t$. Różniczkowanie daje $\cos x\,dx=dt$. Całkujemy

$$\int\sin x\cos x\,dx=\int t\,dt=\tfrac{1}{2}t^2+C=\tfrac{1}{2}\sin^2 x+C.$$

Sposób II. Korzystamy ze wzoru $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$. Mamy

$$\int\sin x\cos x\,dx=\tfrac{1}{2}\int\sin 2x\,dx.$$

Teraz wykonujemy podstawienie $2x=u$, skąd $dx=\frac{1}{2}\,du$. A więc

$$\int\sin x\cos x\,dx=\tfrac{1}{2}\int\sin u\cdot\tfrac{1}{2}du=\tfrac{1}{4}\int\sin u\,du=-\tfrac{1}{4}\cos u+C_1=-\tfrac{1}{4}\cos 2x+C_1.$$

Sposób III. Wykonujemy podstawienie $\cos x = t$; różniczkując otrzymujemy $-\sin x\,dx = dt$. Całkujemy

$$\int \sin x \cos x\,dx = -\int t\,dt = -\tfrac{1}{2}t^2 + C_2 = -\tfrac{1}{2}\cos^2 x + C_2\,.$$

Otrzymaliśmy trzy różne wyniki: $\frac{1}{2}\sin^2 x$, $-\frac{1}{4}\cos 2x$, $-\frac{1}{2}\cos^2 x$. Nie będzie w tym sprzeczności, gdy okażemy, że różnica każdych dwóch wyników jest stała. Mamy

$$\tfrac{1}{2}\sin^2 x - (-\tfrac{1}{4}\cos 2x) = \tfrac{1}{2}\sin^2 x + \tfrac{1}{4}\cos 2x = \tfrac{1}{4}(2\sin^2 x + \cos 2x) =$$
$$= \tfrac{1}{4}(2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x) = \tfrac{1}{4}\,,$$

więc $C = C_1 + \frac{1}{4}$. Podobnie,

$$\tfrac{1}{2}\sin^2 x - (-\tfrac{1}{2}\cos^2 x) = \tfrac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \tfrac{1}{2}\,,$$

więc $C = C_2 + \frac{1}{2}$.

Zadanie 15.13. Obliczyć całkę

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx\,.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x > 0$. Wykonujemy podstawienie $\ln x = t$ i różniczkujemy $\frac{1}{x}\,dx = dt$. Mamy więc

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int t\,dt = \tfrac{1}{2}t^2 + C = \tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C\,.$$

Zadanie 15.14. Obliczyć całkę

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}\,.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $-1 < x < 1$. Wykonujemy podstawienie $x^2 = t$, skąd $2x\,dx = dt$, czyli $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$. Zauważmy, że $0 < t < 1$. Otrzymujemy

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \tfrac{1}{2}\arcsin t + C = \tfrac{1}{2}\arcsin(x^2) + C\,.$$

Zadanie 15.15. Obliczyć całkę $\int xe^x\,dx$.

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując

$$u = x,\quad dv = e^x\,dx,\qquad \text{skąd}\qquad du = dx,\quad v = \int e^x\,dx = e^x.$$

Całkę daną możemy napisać w postaci $\int x\,de^x$; w myśl wzoru (15.3.3) na całkowanie przez części mamy

$$\int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C\,.$$

Zadanie 15.16. Obliczyć całkę $\int x\sin x\,dx$.

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując

$$u = x,\quad dv = \sin x\,dx,\qquad \text{skąd}\qquad du = dx,\quad v = \int \sin x\,dx = -\cos x\,.$$

Otrzymujemy

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x - \int (-\cos x)\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

ZADANIE 15.17. Obliczyć całkę $\int e^x \sin x\, dx$.

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując

$$u = \sin x, \quad dv = e^x\, dx, \quad \text{skąd} \quad du = \cos x\, dx, \quad v = \int e^x\, dx = e^x.$$

Otrzymujemy

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Podobnie całkując przez części całkę po prawej stronie ostatniej równości otrzymujemy

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx.$$

Podstawiając otrzymaną wartość do poprzedniej równości otrzymujemy

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx,$$

skąd po przeniesieniu całki na lewą stronę równości mamy

$$2 \int e^x \sin x\, dx = e^x (\sin x - \cos x).$$

Ostatecznie więc

$$\int e^x \sin x\, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

ZADANIE 15.18. Obliczyć całkę $\int \ln x\, dx$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x > 0$. Całkujemy przez części przyjmując

$$u = \ln x, \quad dv = dx, \quad \text{skąd} \quad du = \frac{1}{x}\, dx, \quad v = \int dx = x.$$

Obliczamy

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int dx =$$

$$= x \ln x - x + C = x (\ln x - 1) + C.$$

ZADANIE 15.19. Obliczyć całkę $\int x^{10} \ln x\, dx$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x > 0$. Całkujemy przez części przyjmując

$$u = \ln x, \quad dv = x^{10}\, dx, \quad \text{skąd} \quad du = \frac{1}{x}\, dx, \quad v = \int x^{10}\, dx = \tfrac{1}{11} x^{11}.$$

Otrzymujemy

$$\int x^{10} \ln x\, dx = \tfrac{1}{11} x^{11} \ln x - \int \tfrac{1}{11} x^{11} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \tfrac{1}{11} x^{11} \ln x - \tfrac{1}{11} \int x^{10}\, dx =$$

$$= \tfrac{1}{11} x^{11} \ln x - \tfrac{1}{11} \cdot \tfrac{1}{11} x^{11} + C = \tfrac{1}{11} x^{11} (\ln x - \tfrac{1}{11}) + C.$$

ZADANIE 15.20. Obliczyć całkę $\int (\ln x)^2\,dx$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>0$. Całkujemy przez części przyjmując

$$u=(\ln x)^2,\ dv=dx, \quad \text{skąd} \quad du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx,\ v=\int dx=x.$$

Obliczamy

$$\int(\ln x)^2\,dx=x(\ln x)^2-\int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx.$$

Na podstawie zadania 15.18 mamy w dalszym ciągu

$$\int(\ln x)^2\,dx=x(\ln x)^2-2x(\ln x-1)+C=x\big((\ln x)^2-2\ln x+2\big)+C.$$

ZADANIE 15.21. Obliczyć całkę $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując

$$u=\operatorname{arctg} x,\ dv=dx, \quad \text{skąd} \quad du=\frac{dx}{x^2+1},\ v=\int dx=x.$$

Wówczas mamy

$$\int\operatorname{arctg} x\,dx=x\operatorname{arctg} x-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}.$$

Ostatnią całkę obliczamy podstawiając $x^2+1=t$, skąd $x\,dx=\frac{1}{2}dt$ (por. zad. 15.8). Zauważmy, że $t>0$. Mamy

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|=\frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int\operatorname{arctg} x\,dx=x\operatorname{arctg} x-\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Zadania

Obliczyć całki (zad. 15.22 - 15.83):

15.22. $\displaystyle\int\left(5x^2-6x+3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)dx.$

15.23. $\displaystyle\int\frac{(x^2-1)^3}{x}\,dx.$

15.24. $\int(x^2-x+1)(x^2+x+1)\,dx.$

15.25. $\int(x^2+4)^5\,x\,dx.$

15.26. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{1+x^2}.$

15.27. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x^2+3)^6}.$

15.28. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{a^3+x^3};\ a\neq 0.$

15.29. $\displaystyle\int\frac{x\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{x^2}\,dx.$

15.30. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{x}-x\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

15.31. $\int (3+2\sqrt[4]{x})^3\,dx.$

15.32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}\,dx.$

15.33. $\displaystyle\int \frac{3+5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}\,dx.$

15.34. $\int \sqrt{3x+1}\,dx.$

15.35. $\int \sqrt{a+bx}\,dx.$

15.36. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x^2-1}}.$

15.37. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx.$

15.38. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-5x^2}}\,dx.$

15.39. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

15.40. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-6}}\,dx.$

15.41. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{x^3+1}}.$

15.42. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx.$

15.43. $\int xe^{-x^2}\,dx.$

15.44. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2 3x}.$

15.45. $\int x\sin(2x^2+1)\,dx.$

15.46. $\int \sin^5 x\cos x\,dx.$

15.47. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx.$

15.48. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{a+b\cos x}\,dx,\ b\neq 0.$

15.49. $\int \cos x\cdot e^{\sin x}\,dx.$

15.50. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\cos^2 x^4}.$

15.51. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx.$

15.52. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\cos^2(x^3+1)}$

15.53. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx.$

15.54. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

15.55. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{2e^x+1}.$

15.56. $\int x\ln(1+x^2)\,dx.$

15.57. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+\ln|x|}}{x}\,dx.$

15.58. $\int 6^{1-x}\,dx.$

15.59. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2|x|}}.$

15.60. $\displaystyle\int \frac{\ln|\operatorname{arctg} x|\,dx}{1+x^2}.$

15.61. $\int xe^{x^2}(x^2+1)\,dx.$

15.62. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

15.63. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

15.64. $\displaystyle\int \frac{(\pi-\arcsin x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

15.65. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$.

15.66. $\int x^4(1+x)^3\,dx$.

15.67. $\int x^2 e^x\,dx$.

15.68. $\int x^3 e^x\,dx$.

15.69. $\int x^4 e^{2x}\,dx$.

15.70. $\int x\cos x\,dx$.

15.71. $\int x^2\cos x\,dx$.

15.72. $\int x^2\sin 5x\,dx$.

15.73. $\int e^x\cos x\,dx$.

15.74. $\int e^{-2x}\sin 3x\,dx$.

15.75. $\int e^x\cos\frac{2}{3}x\,dx$.

15.76. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$.

15.77. $\int (\ln|x|)^3\,dx$.

15.78. $\displaystyle\int \frac{(\ln|x|)^2}{x^5}\,dx$.

15.79. $\int \sqrt{x}(\ln|x|)^3\,dx$.

15.80. $\displaystyle\int \frac{\ln|x|}{x^4}\,dx$.

15.81. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$.

15.82. $\int x^3(\ln x)^2\,dx$.

15.83. $\int x^n\ln x\,dx$, $n\neq -1$.

Rozdział XVI

CAŁKI FUNKCJI WYMIERNYCH

§ 16.1. UWAGI OGÓLNE

Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów. Całka funkcji wymiernej jest więc postaci

$$\int \frac{W_1(x)}{W_2(x)}\,dx = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\,dx. \tag{16.1.1}$$

Można wykazać, że całka funkcji wymiernej jest zawsze równa pewnej kombinacji liniowej (por. notkę na str. 149) następujących funkcji: funkcji wymiernej, logarytmu funkcji liniowej, logarytmu funkcji kwadratowej (o wyróżniku ujemnym) oraz arcustangensa funkcji liniowej. Przy obliczaniu całki (16.1.1) należy postępować w następujący sposób:

1° Jeżeli $n \geqslant m$, to licznik dzielimy przez mianownik i funkcję podcałkową przedstawiamy jako sumę wielomianu oraz funkcji wymiernej, w której już stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika ($n < m$).

2° Jeżeli $n < m$, to funkcję podcałkową rozkładamy na tzw. *ułamki proste*, tj. na wyrażenia postaci

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \quad \text{oraz} \quad \frac{Bx+C}{(cx^2+dx+e)^p},$$

gdzie A, B, C, a, b, c, d, e są stałe, przy czym $d^2 - 4ce < 0$ (wyróżnik trójmianu $cx^2 + dx + e$ jest ujemny), a k i p są liczbami naturalnymi.

Sposób rozkładania funkcji wymiernej na ułamki proste oraz obliczenia całek ułamków prostych zostanie przedstawiony w podanych niżej zadaniach.

§ 16.2. METODY CAŁKOWANIA

ZADANIE 16.1 Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{ax+b} \quad (a \neq 0). \tag{1}$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $ax+b\neq 0$. Wykonujemy podstawienie $ax+b=t$. Różniczkując otrzymujemy $a\,dx=dt$, skąd $dx=\frac{1}{a}\,dt$. Podstawiamy te wartości całki (1):

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\int\frac{\frac{1}{a}\,dt}{t}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$$

Zadanie 16.2. Obliczyć całkę $\int(ax+b)^n\,dx$, $(a\neq 0)$.

Rozwiązanie. Dla $n=-1$ całka powyższa została obliczona w zadaniu poprzednim. Załóżmy więc, że $n\neq -1$. Jeżeli n jest liczbą całkowitą ujemną, to zakładamy ponadto, że $ax+b\neq 0$, a jeżeli n nie jest liczbą całkowitą, to zakładamy, że $ax+b>0$. Wykonujemy podstawienie $ax+b=t$, skąd $a\,dx=dt$, czyli $dx=\frac{1}{a}\,dt$. Obliczamy

$$\int(ax+b)^n dx=\int t^n\cdot\frac{1}{a}\,dt=\frac{1}{a}\int t^n dt=\frac{1}{a}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}+C=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C.$$

Zadanie 16.3. Obliczyć całkę

$$\int\frac{cx+d}{ax+b}\,dx,\qquad a\neq 0$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $ax+b\neq 0$. Zgodnie z uwagą ogólną, jaką zrobiliśmy na początku tego rozdziału, dzielimy licznik przez mianownik

$$\frac{cx+d}{ax+b}=\frac{c}{a}+\frac{d-\frac{bc}{a}}{ax+b},$$

a więc

$$\int\frac{cx+d}{ax+b}\,dx=\frac{c}{a}\int dx+\left(d-\frac{bc}{a}\right)\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{c}{a}\,x+\frac{ad-bc}{a^2}\ln|ax+b|+C.$$

W dalszym ciągu zajmiemy się całkami typu

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx\qquad(a\neq 0). \tag{16.2.1}$$

Przede wszystkim sprawdzamy, czy licznik nie jest pochodną mianownika. Wówczas bowiem wynik otrzymujemy natychmiast posługując się wzorem

$$\int\frac{f'(x)\,dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+C. \tag{16.2.2}$$

Zadanie 16.4. Przyśpieszenie w danym ruchu prostoliniowym wyraża się wzorem

$$a=4t^3+\frac{1}{t+1}.$$

Wyznaczyć wzór określający prędkość v w zależności od czasu t, jeżeli wiadomo, że dla $t=0$ jest $v=v_0$; wyznaczyć również wzór określający drogę x, jeżeli dla $t=0$ jest $x=x_0$.

Rozwiązanie. Mamy

$$v=\int a\,dt=\int\left(4t^3+\frac{1}{t+1}\right)dt=t^4+\ln|t+1|+C;$$

podstawiając $t=0$ otrzymujemy $v_0=C$, a więc

$$v=t^4+\ln|t+1|+v_0.$$

Dalej,

$$x=\int v\,dt=\int(t^4+\ln|t+1|+v_0)\,dt=\tfrac{1}{5}t^5+(t+1)\ln|t+1|-t+v_0t+C_1.$$

Dla $t=0$ mamy $x=x_0=C_1$, a więc

$$x=\tfrac{1}{5}t^5+(t+1)\ln|t+1|+t(v_0-1)+x_0.$$

ZADANIE 16.5. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{6x-1}{3x^2-x+2}\,dx.$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego znajdującego się w mianowniku funkcji podcałkowej: $\Delta=1-24<0$. Z tego wniosek, że mianownik nie staje się zerem przy żadnej wartości x.

Zauważmy że $(3x^2-x+2)'=6x-1$, tzn. że licznik jest pochodną mianownika. Otrzymujemy $I=\ln(3x^2-x+2)+C$.

ZADANIE 16.6. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{x-3}{x^2-6x+5}\,dx.$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyróżnik trójmianu znajdującego się w mianowniku: $\Delta=36-20=4^2$. Mianownik ma pierwiastki $x_1=1$, $x_2=5$. Zakładamy $x\neq 1$ i $x\neq 5$. Zauważmy, że $(x^2-6x+5)'=2x-6=2(x-3)$, tzn. że pochodna mianownika jest proporcjonalna do licznika. Otrzymujemy

$$=\tfrac{1}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+5}\,dx=\tfrac{1}{2}\ln|x^2-6x+5|+C.$$

Jeżeli licznik nie jest pochodną mianownika (ani nie jest do niej proporcjonalny), to sposób obliczania takich całek zależy od znaku wyróżnika $\Delta=b^2-4ac$ trójmianu kwadratowego występującego w mianowniku funkcji podcałkowej. Rozpatrzymy przypadki: $\Delta>0$ (zad. 16.7 - 16.8), $\Delta=0$ (zad. 16.9 i 16.10) oraz $\Delta<0$ (zad. 16.11 - 16.14).

ZADANIE 16.7. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{2x^2+9x-5}.$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyróżnik trójmianu znajdującego się w mianowniku: $\Delta=81+40=121=11^2$. Mianownik ma pierwiastki -5 i $\frac{1}{2}$, a więc

$$2x^2+9x-5\equiv 2(x-\tfrac{1}{2})(x+5)\equiv(2x-1)(x+5).$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy ograniczenia: $x\neq-5$, $x\neq\frac{1}{2}$.

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych

$$\frac{1}{2x^2+9x-5}\equiv\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+5}.$$

Mnożąc obie strony równania przez $(2x-1)(x+5)$ otrzymujemy

$$1\equiv A(x+5)+B(2x-1),\qquad \text{skąd}\qquad 1\equiv(A+2B)x+(5A-B).$$

$Ax+5A+B2x-B$

Mamy tutaj do czynienia z **tożsamością**, czyli związkiem, który ma miejsce dla **każdego** x. Z tożsamości powyższej wynikają następujące zależności (przez przyrównanie współczynników przy równych potęgach x po obu stronach tożsamości):

$$A+2B=0,\ 5A-B=1,\qquad \text{skąd}\qquad A=\tfrac{2}{11},\ B=-\tfrac{1}{11}.$$

Wracając do funkcji podcałkowej otrzymujemy rozkład

$$\frac{1}{2x^2+9x-5}\equiv\frac{\frac{2}{11}}{2x-1}-\frac{\frac{1}{11}}{x+5}.$$

Całkujemy obie strony tożsamości i po prawej stronie wynosimy czynniki stałe przed całki

$$\int\frac{dx}{2x^2+9x-5}=\frac{2}{11}\int\frac{dx}{2x-1}-\frac{1}{11}\int\frac{dx}{x+5}=$$

$$=\tfrac{2}{11}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\ln|2x-1|-\tfrac{1}{11}\ln|x+5|+C=$$

$$=\tfrac{1}{11}\ln|2x-1|-\tfrac{1}{11}\ln|x+5|+C=\tfrac{1}{11}\ln\left|\frac{2x-1}{x+5}\right|+C.$$

ZADANIE 16.8. Obliczyć całkę

$$\int\frac{11x-1}{3x^2-5x-2}\,dx.$$

Rozwiązanie. Postępujemy podobnie, jak w poprzednim zadaniu; mamy $\Delta=25+24=$ $=49$, skąd $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=2$, a więc

$$3x^2-5x-2\equiv 3(x+\tfrac{1}{3})(x-2)\equiv(3x+1)(x-2).$$

Zakładając, że $x\neq-\frac{1}{3}$ i $x\neq2$, rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste

(1) $$\frac{11x-1}{3x^2-5x-2}\equiv\frac{A}{3x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

Mnożąc obie strony przez wspólny mianownik otrzymujemy

$$11x-1 \equiv A(x-2)+B(3x+1). \tag{2}$$

W przykładzie tym zastosujemy inną metodę obliczania współczynników. W miejsce x podstawiamy kolejno pierwiastki mianownika funkcji podcałkowej (tożsamość bowiem jest równością spełnioną dla każdego x). Przyjmując $x=2$([1]) otrzymujemy

$$22-1=B\cdot 7, \quad \text{skąd} \quad B=3.$$

Podobnie przyjmując $x=-\frac{1}{3}$ mamy

$$-\tfrac{11}{3}-1=A(-\tfrac{1}{3}-2), \quad \text{skąd} \quad A=2.$$

A więc

$$\frac{11x-1}{3x^2-5x-2} \equiv \frac{2}{3x+1}+\frac{3}{x-2}.$$

Obliczamy

$$\int \frac{11x-1}{3x^2-5x-2}\,dx = 2\int \frac{dx}{3x+1}+3\int \frac{dx}{x-2} = \frac{2}{3}\ln|3x+1|+3\ln|x-2|+C.$$

Zadanie 16.9. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{9x^2-12x+4}.$$

Rozwiązanie. Mamy $\Delta=144-144=0$, a więc mianownik jest kwadratem zupełnym

$$9x^2-12x+4=(3x-2)^2.$$

Zakładamy, że $x\neq \frac{2}{3}$, i obliczamy

$$\int \frac{dx}{9x^2-12x+4} = \int \frac{dx}{(3x-2)^2} = \int (3x-2)^{-2}dx = \frac{(3x-2)^{-1}}{(-1)3}+C$$

(por. zadanie 16.2). Ostatecznie więc

$$\int \frac{dx}{9x^2-12x+4} = \frac{-1}{3(3x-2)}+C.$$

Zadanie 16.10. Obliczyć całkę

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}\,dx.$$

Rozwiązanie. Mamy $\Delta=36-36=0$. Mianownik jest pełnym kwadratem

$$9x^2-6x+1\equiv(3x-1)^2.$$

([1]) Przy mnożeniu tożsamości (1) przez wspólny mianownik musimy wprawdzie wykluczyć wartości $x=2$, $x=-\frac{1}{3}$, dla których mianownik równa się zeru, ale mimo to tożsamość (2) jest spełniona i dla tych wartości: po obu stronach tożsamości (2) znajdują się bowiem wielomiany, a więc funkcje ciągłe dla każdego x: z ciągłości w punktach $x=2$, $x=-\frac{1}{3}$ i równości wielomianów dla pozostałych x wynika równość wielomianów i dla tych dwóch wartości x.

Zakładamy, że $x \neq \frac{1}{3}$. Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste w następujący sposób:

$$\frac{9x-5}{9x^2-6x+1} \equiv \frac{A}{(3x-1)^2} + \frac{B}{3x-1}.$$

Mnożąc obie strony równości przez wspólny mianownik otrzymujemy

$$9x-5 \equiv A + B(3x-1) \equiv 3Bx + (A-B).$$

Rozwiązujemy układ równań

$$3B=9, \ A-B=-5, \quad \text{skąd} \quad B=3, \ A=-2.$$

Otrzymujemy tożsamość

$$\frac{9x-5}{9x^2-6x+1} \equiv \frac{-2}{(3x-1)^2} + \frac{3}{3x-1}.$$

Całkujemy

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}\,dx = -2\int \frac{dx}{(3x-1)^2} + 3\int \frac{dx}{3x-1} =$$

$$= -2\left(\frac{-1}{3(3x-1)}\right) + 3\cdot\frac{1}{3}\ln|3x-1| + C.$$

Ostatecznie więc

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}\,dx = \frac{2}{3(3x-1)} + \ln|3x-1| + C.$$

Zadanie 16.11. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{x^2+b} \quad (b>0).$$

Rozwiązanie. Wykonujemy podstawienie

(1) $$x = \sqrt{b}\cdot t, \quad \text{skąd} \quad dx = \sqrt{b}\,dt.$$

Na podstawie wzoru na zamianę zmiennych otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x^2+b} = \int \frac{\sqrt{b}\,dt}{bt^2+b} = \frac{\sqrt{b}}{b}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{arctg} t + C.$$

Ostatecznie po podstawieniu na t odpowiedniej wartości ze wzoru (1) otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x^2+b} = \frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{b}} + C \quad (b>0).$$

W szczególności np. mamy

$$\int \frac{dx}{2x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\frac{9}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{9}{2}}} + C = \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}x + C.$$

ZADANIE 16.12. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{(x-k)^2+b} \quad (b>0).$$

Rozwiązanie. W całce tej postaci wykonujemy podstawienie

$$x-k=\sqrt{b}\cdot t, \quad \text{skąd} \quad dx=\sqrt{b}\,dt.$$

Podstawiając powyższe wartości do całki mamy (por. zad. 16.11):

$$\int \frac{dx}{(x-k)^2+b}=\int \frac{\sqrt{b}\,dt}{bt^2+b}=\frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{arctg} t+C.$$

Ale $t=\dfrac{x-k}{\sqrt{b}}$. Ostatecznie więc

$$\int \frac{dx}{(x-k)^2+b}=\frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{arctg}\frac{x-k}{\sqrt{b}}+C \quad (b>0).$$

Do całki omówionej w powyższym zadaniu możemy sprowadzić każdą całkę typu

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad (a\neq 0 \text{ i } b^2-4ac<0), \tag{16.2.3}$$

a to na podstawie postaci kanonicznej trójmianu (por. str. 190):

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right].$$

Mianownik funkcji podcałkowej piszemy w postaci kanonicznej, a następnie czynnik $1/a$ wynosimy przed całkę.

ZADANIE 16.13. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{2x^2-12x+27}.$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyróżnik mianownika $\Delta=144-216=-72$. Sprowadzamy mianownik do postaci kanonicznej

$$2x^2-12x+27=2\left(x-\tfrac{12}{2\cdot 2}\right)^2+\tfrac{72}{4\cdot 2}\equiv 2(x-3)^2+9.$$

A więc

$$\int \frac{dx}{2x^2-12x+27}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-3)^2+\frac{9}{2}}.$$

Wykonujemy podstawienie (patrz zadanie 16.12):

$$x-3=\sqrt{\tfrac{9}{2}}\cdot t, \quad \text{skąd} \quad dx=\sqrt{\tfrac{9}{2}}\,dt.$$

Postępując jak w zadaniu 16.12 otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{2x^2-12x+27}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(x-3)\right)+C.$$

Zadanie 16.14. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{x+1}{2x^2+6x+5}\,dx.$$

Rozwiązanie. Wyróżnik mianownika $\Delta=36-40=-4<0$. Obliczamy pochodną mianownika

$$(2x^2+6x+5)'=4x+6.$$

Dzieląc licznik przez pochodną mianownika otrzymujemy

$$x+1\equiv\tfrac{1}{4}(4x+6)-\tfrac{1}{2},$$

a więc

$$I=\int\frac{x+1}{2x^2+6x+5}\,dx=\int\frac{\frac{1}{4}(4x+6)-\frac{1}{2}}{2x^2+6x+5}\,dx.$$

Całkę rozbijemy na sumę dwóch całek i wynosimy czynniki stałe przed całkę

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{4x+6}{2x^2+6x+5}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2x^2+6x+5}.$$

Obliczamy kolejno obie całki. W pierwszej z nich licznik jest pochodną mianownika, czyli jest to całka typu (16.2.2). W danym przypadku mianownik jest stale dodatni, więc

$$\int\frac{(4x+6)\,dx}{2x^2+6x+5}=\ln(2x^2+6x+5)+C.$$

Druga całka jest typu rozwiązanego w zadaniu 16.12. Obliczymy ją analogicznie

$$\int\frac{dx}{2x^2+6x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}}.$$

Wykonujemy podstawienie

$$x+\tfrac{3}{2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}}\,t,\qquad \text{skąd}\qquad dx=\tfrac{1}{2}\,dt.$$

Podstawiając otrzymujemy

$$\int\frac{dx}{2x^2+6x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}}=\int\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arc\,tg}t+C=$$

$$=\operatorname{arctg}2(x+\tfrac{3}{2})+C=\operatorname{arctg}(2x+3)+C.$$

Wracając do danej całki mamy ostatecznie

$$\int\frac{x+1}{2x^2+6x+5}=\tfrac{1}{4}\ln(2x^2+6x+5)-\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+3)+C.$$

W ten sposób zakończyliśmy badanie całek typu (16.2.1), rozpatrując wszystkie możliwe przypadki w zależności od znaku wyróżnika mianownika. Przechodzimy teraz do obliczania całek funkcji wymiernych, których mianowniki są wielomianami wyższego stopnia niż drugi.

ZADANIE 16.15. Obliczyć całkę

$$I=\int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}dx.$$

Rozwiązanie. Stopień licznika jest niższy niż stopień mianownika. Mianownik funkcji podcałkowej możemy przedstawić w postaci

$$(x^2-2x+1)(x^2-1)\equiv(x-1)^2(x-1)(x+1)\equiv(x-1)^3(x+1).$$

Zakładamy, że $x\neq 1$ i $x\neq -1$. Na podstawie własności funkcji wymiernych, znanych z algebry, możemy funkcję podcałkową rozłożyć na sumę następujących ułamków prostych:

$$\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x-1)^3(x+1)}\equiv\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}.$$

Mnożąc obie strony równości przez wspólny mianownik otrzymujemy

(1) $$3x^3-5x^2+8x\equiv A(x+1)+B(x+1)(x-1)+C(x+1)(x-1)^2+D(x-1)^3.$$

W miejsce x podstawiamy pierwiastki mianownika; gdy $x=1$, mamy $3-5+8=A\cdot 2$, skąd $A=3$, a gdy $x=-1$, mamy $-3-5-8=D\cdot(-8)$, skąd $D=2$.

Aby obliczyć pozostałe współczynniki B i C, musimy jeszcze znaleźć dwa równania. Możemy więc np. porównać współczynniki przy x^3 po obu stronach tożsamości (1):

$$3=C+D,$$

skąd podstawiając $D=2$ otrzymujemy $C=1$; możemy też porównać wyrazy wolne

$$0=A-B+C-D, \qquad \text{skąd} \qquad B=2.$$

Możemy więc przedstawić funkcję podcałkową w postaci

$$\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x-1)^3(x+1)}\equiv\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}.$$

Całkujemy obie strony, wynosimy stałe czynniki przed całki i wprowadzamy potęgi o wykładnikach ujemnych

$$I=3\int(x-1)^{-3}dx+2\int(x-1)^{-2}dx+\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x+1}.$$

Stosujemy wzory otrzymane w zadaniu 16.12; mamy

$$I=3\frac{(x-1)^{-2}}{-2}+2\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+\ln|x-1|+2\ln|x+1|+C,$$

skąd ostatecznie

$$\int\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}dx=\frac{-3}{2(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\ln|x-1|+2\ln|x+1|+C.$$

ZADANIE 16.16. Obliczyć całkę

$$I=\int \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1}\,dx\,.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x\neq 1$ i $x\neq -1$. Jak widzimy, licznik funkcji podcałkowej jest wyższego stopnia niż mianownik, wobec czego dzielimy licznik przez mianownik. Dzielenie daje iloraz $x+1$ oraz resztę $3x^3+x^2+x-1$, a więc

$$\frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1}\equiv x+1+\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\,.$$

Wobec tego

$$I=\int x\,dx+\int dx+\int\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\,dx\,. \tag{1}$$

Pierwszą i drugą całkę obliczamy od razu:

$$\int x\,dx=\tfrac{1}{2}x^2\,,\qquad \int dx=x\,.$$

W trzeciej całce rozkładamy mianownik na czynniki

$$x^4-1\equiv(x^2-1)(x^2+1)\equiv(x-1)(x+1)(x^2+1)\,.$$

Funkcję podcałkową rozkładamy na sumę ułamków prostych

$$\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\,.$$

Uwaga. Jeżeli w mianowniku ułamka prostego znajduje się wyrażenie stopnia pierwszego lub jego potęga, to w liczniku piszemy stałą; jeżeli w mianowniku jest wyrażenie nieprzywiedlne stopnia drugiego lub jego potęga, to w liczniku piszemy dwumian stopnia pierwszego.

Mnożymy obie strony tożsamości przez wspólny mianownik

$$3x^3+x^2+x-1\equiv A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)\,.$$

W miejsce x podstawiamy kolejno pierwiastki mianownika; dla $x=1$ mamy $3+1+1-1=$ $=A\cdot 2\cdot 2$, skąd $A=1$, a dla $x=-1$ mamy $-3+1-1-1=B\cdot(-2)\cdot 2$, skąd $B=1$.

Chcąc znaleźć pozostałe współczynniki C i D przyrównujemy współczynniki przy x^3 oraz wyrazy wolne. Współczynniki przy x^3 dają

$$3=A+B+C\,,\qquad \text{skąd}\qquad C=1\,;$$

wyrazy wolne dają

$$-1=A-B-D\,,\qquad \text{skąd}\qquad D=1\,.$$

A więc

$$\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\equiv\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+1}\,.$$

Całkujemy

$$\int \frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx. \tag{2}$$

Obliczamy poszczególne całki. Mamy

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|, \qquad \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1|.$$

Trzecią całkę rozkładamy na sumę dwóch całek

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} \tag{3}$$

Pierwsza z całek po prawej stronie została obliczona w zadaniu 15.21:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Drugą całkę w równości (3) otrzymujemy bezpośrednio ze wzoru (15.2.10):

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x.$$

Wracając do równości (3) mamy

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x.$$

Na podstawie równości (2) otrzymujemy

$$\int \frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\,dx = \ln|x-1| + \ln|x+1| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x.$$

Ostatecznie, na podstawie równości (1), mamy

$$\int \frac{x^5+x^4+3x^3-x^2-2}{x^4-1}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + x + \ln|x^2-1| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C.$$

Zadanie 16.17. Obliczyć całkę

$$\int \frac{4x^3+x^2-4x-4}{x^4-5x^2+4}\,dx.$$

Rozwiązanie. W mianowniku mamy trójmian dwukwadratowy. Traktując x^2 jako nową zmienną u obliczamy wyróżnik $\Delta = 25-16 = 9 > 0$ i pierwiastki $+1$ i $+4$; rozkładamy trójmian na czynniki na podstawie wzoru iloczynowego trójmianu:

$$x^4-5x^2+4 \equiv (x^2-1)(x^2-4) \equiv (x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

Zakładamy, że $x \neq 1$, $x \neq -1$, $x \neq 2$, $x \neq -2$. Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych

(1) $$\frac{4x^3+x^2-4x-4}{x^4-5x^2+4} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}.$$

Mnożąc obie strony tożsamości przez wspólny mianownik otrzymujemy

$$4x^3+x^2-4x-4 \equiv A(x+1)(x-2)(x+2)+$$
$$+B(x-1)(x-2)(x+2)+C(x-1)(x+1)(x+2)+D(x-1)(x+1)(x-2).$$

W miejsce x podstawiamy kolejno pierwiastki mianownika. Gdy $x=1$, mamy $4+1-4-4=$ $=A(1+1)(1-2)(1+2)$, skąd $-3=-6A$, czyli $A=\frac{1}{2}$; gdy $x=-1$, mamy $-4+1+4-4=$ $=B(-2)(-3)\cdot 1$, skąd $B=-\frac{1}{2}$; gdy $x=2$, mamy $4\cdot 8+4-8-4=C\cdot 3\cdot 4$, skąd $C=2$; gdy $x=-2$, mamy $4\cdot(-8)+4+8-4=D(-3)(-1)(-4)$, skąd $D=2$. Równość (1) przyjmuje więc postać

$$\frac{4x^3+x^2-4x-4}{x^4-5x^2+4} \equiv \frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}.$$

Całkujemy

$$\int \frac{4x^3+x^2-4x-4}{x^4-5x^2+4}\,dx=\tfrac{1}{2}\ln|x-1|-\tfrac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x-2|+2\ln|x+2|+C,$$

lub krócej:

$$\int \frac{4x^3+x^2-4x-4}{x^4-5x^2+4}\,dx=\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+2\ln|x^2-4|+C.$$

Zadanie 16.18. Obliczyć całkę

$$I=\int \frac{x^4+2x^3+5x^2+4x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx.$$

Rozwiązanie. Stopień licznika równa się stopniowi mianownika, a więc dzielimy licznik przez mianownik. Po podzieleniu otrzymujemy

$$\frac{x^4+2x^3+5x^2+4x+2}{x^4+3x^2+2} \equiv 1+\frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2}.$$

A więc

(1) $$I=x+\int \frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2}\,dx.$$

W ostatniej całce mianownik jest trójmianem dwukwadratowym. Ponieważ wyróżnik $\Delta=9-8=1>0$, postępujemy jak w poprzednim zadaniu i otrzymujemy

$$x^4+3x^2+2 \equiv (x^2+1)(x^2+2).$$

Opierając się na tym przekształceniu rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste

$$\frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2},$$

skąd

$$2x^3+2x^2+4x \equiv (Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1).$$

Przyrównując współczynniki po obu stronach tożsamości musielibyśmy rozwiązać układ czterech równań z czteroma niewiadomymi. Zamiast tego podstawimy w miejsce x urojone pierwiastki mianownika. Gdy $x=i$, mamy $-2i-2+4i=(Ai+B)\cdot 1$, skąd $A=2$, $B=-2$ (albowiem dwie liczby zespolone są równe, jeżeli ich części rzeczywiste są równe i części urojone są równe); gdy $x=i\sqrt{2}$, mamy $-4\sqrt{2}i-4+4\sqrt{2}i=(C\sqrt{2}i+D)(-1)$, skąd $C=0$, $D=4$. A więc

$$\frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2} \equiv \frac{2x-2}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+2}.$$

Całkujemy

$$\int \frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} + 4\int \frac{dx}{x^2+2}$$

Obliczamy kolejno całki:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1), \qquad \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x, \qquad \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

(por. zad. 16.11). Na podstawie równości (1) otrzymujemy ostatecznie

$$\int \frac{x^4+2x^3+5x^2+4x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx = x+\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg} x + 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

ZADANIE 16.19. Obliczyć całkę

$$\int \frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)}\,dx.$$

Rozwiązanie. Widzimy, że $x^2-2x+1=(x-1)^2$, natomiast trójmian x^2+2x+5 ma wyróżnik $\Delta=4-20<0$, a więc nie da się rozłożyć na czynniki. Otrzymujemy

$$(x^2-2x+1)(x^2+2x+5) \equiv (x-1)^2(x^2+2x+5).$$

Zakładamy, że $x \neq 1$. Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste

$$\frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)} \equiv \frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+5}.$$

Mnożenie obu stron równości przez wspólny mianownik daje

$$x^2-2x-7 \equiv A(x^2+2x+5)+B(x-1)(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

Przyjmując $x=1$ znajdujemy $A=-1$. Wstawiając obliczoną wartość A otrzymujemy

$$x^2-2x-7 \equiv -x^2-2x-5+B(x-1)(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x-1)^2,$$

czyli

$$2(x-1)(x+1) \equiv B(x-1)(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

Dzielimy obie strony tożsamości przez $x-1$ i otrzymujemy

(1) $$2(x+1) \equiv B(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x-1).$$

Przyjmujemy znowu $x=1$ i otrzymujemy $B=\frac{1}{2}$. Przyrównujemy teraz w tożsamości (1) współczynniki przy x^2 i otrzymujemy $0=B+C$, skąd $C=-\frac{1}{2}$. Następnie przyrównujemy wyrazy wolne, mamy $2=5B-D$, skąd $D=\frac{1}{2}$. Mamy więc

$$\frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)}\equiv\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+2x+5}.$$

Całkujemy

$$\int\frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)}\,dx=-\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{(x-1)\,dx}{x^2+2x+5}. \tag{2}$$

Obliczamy całki:

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\frac{-1}{x-1},\qquad \int\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|.$$

Zostaje obliczenie całki

$$\int\frac{x-1}{x^2+2x+5}\,dx. \tag{3}$$

Jak już obliczyliśmy, wyróżnik mianownika jest ujemny. Dzielimy więc licznik przez pochodną mianownika i otrzymujemy $x-1\equiv\frac{1}{2}(2x+2)-2$. A więc

$$\int\frac{x-1}{x^2+2x+5}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx-2\int\frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Pierwsza całka

$$\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx=\ln(x^2+2x+5).$$

W drugiej całce przekształcamy mianownik

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

i wykonujemy podstawienie $x+1=\sqrt{4}t$, czyli $x+1=2t$, skąd $dx=2dt$. A więc

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{2dt}{4t^2+4}=\frac{2}{4}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}(x+1).$$

Wracając do całki (3) mamy

$$\int\frac{x-1}{x^2+2x+5}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}(x+1).$$

Ostatecznie na podstawie równości (2) otrzymujemy

$$\int\frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)}\,dx=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}(x+1)+C.$$

ZADANIE 16.20. Obliczyć całkę

$$\int \frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9}\,dx.$$

Rozwiązanie. Mianownik jest trójmianem dwukwadratowym o wyróżniku ujemnym, nie możemy go więc rozłożyć metodą podaną w zadaniach 16.17 i 16.18. Możemy natomiast rozłożyć go wtedy na czynniki stopnia drugiego w następujący sposób:

$$x^4+2x^2+9 \equiv (x^2+3)^2-4x^2 \equiv (x^2+3+2x)(x^2+3-2x) \equiv (x^2+2x+3)(x^2-2x+3).$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste

$$\frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+2x+3}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+3}.$$

Mnożąc obie strony równości przez wspólny mianownik otrzymujemy

$$2x^3-x^2+4x-3 \equiv$$

$$\equiv (Ax+B)(x^2-2x+3)+(Cx+D)(x^2+2x+3) \equiv$$

$$\equiv (A+C)x^3+(-2A+B+2C+D)x^2+(3A-2B+3C+2D)x+(3B+3D).$$

Stąd otrzymujemy układ równań

$$A+C=2, \quad -2A+B+2C+D=-1, \quad 3A-2B+3C+2D=4, \quad 3B+3D=-3.$$

Rozwiązanie tego układu daje $A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=-1$. A więc

$$\frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9} \equiv \frac{x}{x^2+2x+3}+\frac{x-1}{x^2-2x+3}.$$

Całkujemy

$$\int \frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9}\,dx = \int \frac{x\,dx}{x^2+2x+3}+\int \frac{x-1}{x^2-2x+3}\,dx. \tag{1}$$

W pierwszej całce dzielimy licznik przez pochodną $2x+2$ mianownika i otrzymujemy $x \equiv \frac{1}{2}(2x+2)-1$. A więc

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+3} \equiv \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx-\int \frac{dx}{x^2+2x+3}. \tag{2}$$

Postępując dalej jak w zadaniu 16.14 otrzymujemy

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Obliczamy teraz drugą całkę w równości (1):

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+3). \tag{4}$$

Podstawiając wartości (3) i (4) do (1) mamy ostatecznie

$$\int \frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9}\,dx=\tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+\tfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+3)+C=$$

$$=\tfrac{1}{2}\ln(x^4+2x^2+9)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C\,.$$

Zadanie 16.21. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} \quad (n \text{ liczba naturalna})\,.$$

Rozwiązanie Będziemy szukali tzw. *wzoru redukcyjnego* (lub *rekurencyjnego*), na podstawie którego wyrazimy daną całkę przez całkę o niższej potędze w mianowniku. W tym celu robimy następujące przekształcenie:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}=\int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}\,dx=\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}-\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^n}\cdot$$

Jeżeli więc oznaczymy krótko $I_n=\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, to otrzymamy wzór

$$(1) \qquad I_n=I_{n-1}-\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^n}\,.$$

Weźmy pod uwagę drugą całkę

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^n}=\int x\cdot\frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}$$

i zastosujmy wzór na całkowanie przez części; mamy

$$u=x,\quad dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^n},\qquad \text{skąd}\qquad du=dx,\quad v=\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}=\frac{-1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$$

(por. zad. 15.8). Mamy więc

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^n}=\frac{-x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}+\int \frac{dx}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}=$$

$$=\frac{-1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\,I_{n-1}\,.$$

Podstawiając ten wynik do równości (1) otrzymujemy

$$I_n=I_{n-1}+\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}-\frac{1}{2n-2}\,I_{n-1}\,.$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór rekurencyjny

(16.2.4) $$I_n=\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}, \quad \text{gdzie} \quad I_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

ZADANIE 10.22. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}.$$

Rozwiązanie. Zastosujemy metodę podaną w poprzednim zadaniu. Szukaną całkę oznaczamy przez I_4. Według wzoru (16.2.4) wyprowadzonego w poprzednim zadaniu mamy

$$I_4=\tfrac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3}+\tfrac{5}{6}I_3$$

i dalej na podstawie tego samego wzoru obliczamy kolejno:

$$I_3=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\tfrac{3}{4}I_2, \quad I_2=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\tfrac{1}{2}I_1.$$

Mamy oczywiście

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x.$$

Cofając się otrzymujemy kolejno:

$$I_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x,$$

$$I_3=\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x,$$

$$I_4=\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}=\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3}+\frac{5}{24}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{5}{16}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg}x+C.$$

ZADANIE 16.23. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{(x^2-4x+13)^2}.$$

Rozwiązanie. Stwierdzamy, że wyróżnik mianownika jest ujemny: $\Delta=16-52<0$. Sprowadzamy mianownik funkcji podcałkowej do postaci kanonicznej

$$\int\frac{dx}{((x-2)^2+9)^2}.$$

Wykonujemy podstawienie $x-2=\sqrt{9}t$, skąd $dx=3dt$. Podstawiając mamy

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+13)^2}=\int \frac{3dt}{(9t^2+9)^2}=\frac{3}{9^2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{1}{27}I_2 .$$

Opierając się na zadaniu 16.22 piszemy

$$I_2=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{x-2}{3}}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}=\tfrac{3}{2}\cdot\frac{x-2}{x^2-4x+13}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}.$$

Ostatecznie więc mamy

$$\int\frac{dx}{(x^2-4x+13)^2}=\tfrac{1}{27}\left(\tfrac{3}{2}\cdot\frac{x-2}{x^2-4x+13}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}\right)+C=$$

$$=\tfrac{1}{18}\cdot\frac{x-2}{x^2-4x+13}+\tfrac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C .$$

ZADANIE 16.24. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{x(x^2+2)^3} .$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x\neq 0$. Rozszerzamy funkcję podcałkową mnożąc licznik i mianownik przez x:

$$\int\frac{x\,dx}{x^2(x^2+2)^3}$$

i wykonujemy podstawienie $x^2=t$; wtedy $t>0$, a różniczkowanie daje $x\,dx=\frac{1}{2}dt$. Otrzymujemy więc

$$\int\frac{dx}{x(x^2+2)^3}=\tfrac{1}{2}\int\frac{dt}{t(t+2)^3} .$$

Funkcję podcałkową rozkładamy na sumę ułamków prostych

(1) $$\frac{1}{t(t+2)^3}\equiv\frac{A}{t}+\frac{B}{(t+2)^3}+\frac{C}{(t+2)^2}+\frac{D}{t+2},$$

skąd otrzymujemy

$$1\equiv A(t+2)^3+Bt+Ct(t+2)+Dt(t+2)^2 .$$

W miejsce t podstawiamy kolejno pierwiastki mianownika; gdy $t=0$, to $A=\frac{1}{8}$, a gdy $t=-2$, to $B=-\frac{1}{2}$. Mamy więc

$$1\equiv\tfrac{1}{8}(t^3+6t^2+12t+8)-\tfrac{1}{2}t+Ct(t+2)+Dt(t+2)^2 .$$

Po przeniesieniu wyrazów o współczynnikach liczbowych na lewą stronę otrzymujemy

$$-\tfrac{1}{8}t^3-\tfrac{3}{4}t^2-t\equiv Ct(t+2)+Dt(t+2)^2 .$$

Widzimy, że prawa strona tożsamości dzieli się przez $t(t+2)$, a więc lewa strona musi dzielić się przez to samo wyrażenie; po podzieleniu obu stron mamy

$$-\tfrac{1}{8}t-\tfrac{1}{2}\equiv C+D(t+2)\,, \qquad \text{czyli} \qquad -\tfrac{1}{8}t-\tfrac{1}{2}\equiv Dt+(C+2D)\,,$$

skąd porównując współczynniki otrzymujemy $D=-\frac{1}{8}$, $C=-\frac{1}{4}$.

Tożsamość (1) przyjmie teraz następującą postać:

$$\frac{1}{t(t+2)^3}\equiv\frac{\frac{1}{8}}{t}-\frac{\frac{1}{2}}{(t+2)^3}-\frac{\frac{1}{4}}{(t+2)^2}-\frac{\frac{1}{8}}{t+2}\,.$$

Całkując otrzymujemy

$$\int\frac{dt}{t(t+2)^3}=\tfrac{1}{8}\int\frac{dt}{t}-\tfrac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+2)^3}-\tfrac{1}{4}\int\frac{dt}{(t+2)^2}-\tfrac{1}{8}\int\frac{dt}{t+2}=$$

$$=\tfrac{1}{8}\ln t-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2(t+2)^2}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{-1}{t+2}-\tfrac{1}{8}\ln(t+2)=$$

$$=\tfrac{1}{8}\ln\frac{t}{t+2}+\frac{1}{4(t+2)^2}+\frac{1}{4(t+2)}\,.$$

Wracając do pierwotnej całki i podstawiając $t=x^2$ otrzymujemy

$$\int\frac{dx}{x(x^2+2)^3}=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{8}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+\frac{1}{4(x^2+2)^2}+\frac{1}{4(x^2+2)}\right)+C=$$

$$=\tfrac{1}{16}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+\frac{1}{8(x^2+2)^2}+\frac{1}{8(x^2+2)}+C\,.$$

ZADANIE 16.25. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1}{(x^4+2x^2+1)(x^4-3x^3+3x^2-x)}\,dx\,.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że mianownik funkcji podcałkowej możemy przedstawić w postaci $x(x-1)^3(x^2+1)^2$. Zakładamy, że $x\neq 0$, $x\neq 1$, i przedstawiamy funkcję podcałkową w postaci sumy ułamków prostych

$$\frac{x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1}{(x^4+2x^2+1)(x^4-3x^3+3x^2-x)}\equiv$$

$$\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}+\frac{Gx+H}{x^2+1}\,.$$

Sprowadzając do wspólnego mianownika mamy

$$x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1=$$

$$\equiv A(x-1)^3(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)^2+Cx(x-1)(x^2+1)^2+$$

$$+Dx(x-1)^2(x^2+1)^2+x(Ex+F)(x-1)^3+x(Gx+H)(x-1)^3(x^2+1)\,.$$

Przyjmując $x=0$ otrzymujemy $A=-1$, a przyjmując $x=1$ otrzymujemy $B=-2$. Podstawiając obliczone wartości otrzymujemy

$$x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1\equiv$$
$$\equiv-(x^3-3x^2+3x-1)(x^4+2x^2+1)-2x(x^4+2x^2+1)+Cx(x-1)(x^2+1)^2+$$
$$+Dx(x-1)^2(x^2+1)^2+x(Ex+F)(x-1)^3+x(Gx+H)(x-1)^3(x^2+1),$$

skąd po redukcji

$$x^7-2x^6+x^5+3x^4-6x^3+3x^2\equiv$$
$$\equiv Cx(x-1)(x^2+1)^2+Dx(x-1)^2(x^2+1)^2+$$
$$+x(Ex+F)(x-1)^3+x(Gx+H)(x-1)^3(x^2+1).$$

Zauważmy, że prawa strona tożsamości dzieli się przez $x(x-1)$, a więc i lewa strona musi dzielić się przez to wyrażenie; po wykonaniu dzielenia obu stron otrzymujemy

$$x^5-x^4+3x^2-3x\equiv$$
$$\equiv C(x^2+1)^2+D(x-1)(x^2+1)^2+(Ex+F)(x-1)^2+(Gx+H)(x-1)^2(x^2+1).$$

Przyjmując $x=1$ otrzymujemy $C=0$. Tożsamość przyjmuje teraz postać

$$x^5-x^4+3x^2-3x\equiv D(x-1)(x^2+1)^2+(Ex+F)(x-1)^2+(Gx+H)(x-1)^2(x^2+1).$$

Dzielimy obie strony tożsamości przez $x-1$:

$$x^4+3x\equiv D(x^2+1)^2+(Ex+F)(x-1)+(Gx+H)(x-1)(x^2+1).$$

Przyjmując $x=1$ otrzymujemy $D=1$. Podstawiając tę wartość do tożsamości otrzymujemy po redukcji

$$-2x^2+3x-1\equiv(Ex+F)(x-1)+(Gx+H)(x-1)(x^2+1).$$

Dzielimy obie strony tożsamości znowu przez $x-1$:

$$-2x+1\equiv Ex+F+(Gx+H)(x^2+1)\equiv Ex+F+Gx^3+Gx+Hx^2+H,$$

skąd $G=0$, $H=0$, $E=-2$, $F=1$.

Mamy więc

$$\frac{x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1}{(x^4+2x^2+1)(x^4-3x^3+3x^2-x)}\equiv-\frac{1}{x}-\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{x-1}+\frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Całkując obie strony tożsamości otrzymujemy

$$I=-\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx=$$
$$=-\ln|x|+\frac{1}{(x-1)^2}+\ln|x-1|-\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Przedostatnią całkę obliczamy według zadania 15.8:

$$\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{-1}{x^2+1}.$$

Ostatnią całkę obliczamy według zadania 16.22:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

Ostatecznie więc po przekształceniu otrzymujemy

$$I=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{(x-1)^2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x+2}{x^2+1}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C.$$

Zadania

Obliczyć całki (zad. 16.26 - 16.98):

16.26. $\int (2x+1)^3\,dx.$

16.27. $\int \frac{dx}{(3x-2)^4}.$

16.28. $\int \frac{3x-4}{x^2-x-6}\,dx.$

16.29. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+3}\,dx.$

16.30. $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5}\,dx.$

16.31. $\int \frac{2x+6}{2x^2+3x+1}\,dx.$

16.32. $\int \frac{6x-13}{x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}}\,dx.$

16.33. $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,dx.$

16.34. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}\,dx.$

16.35. $\int \frac{\frac{5}{6}x-16}{x^2+3x-18}\,dx.$

16.36. $\int \frac{dx}{x^2+2x-1}.$

16.37. $\int \frac{dx}{6x^2-13x+6}.$

16.38. $\int \frac{5+x}{10x+x^2}\,dx.$

16.39. $\int \frac{7x}{4+5x^2}\,dx.$

16.40. $\int \frac{dx}{-5+6x-x^2}.$

16.41. $\int \frac{dx}{1+x-x^2}.$

16.42. $\int \frac{dx}{2x-3x^2}.$

16.43. $\int \frac{3x+2}{x^2-x-2}\,dx.$

16.44. $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}\,dx.$

16.45. $\int \frac{x-1}{4x^2-4x+1}\,dx.$

16.46. $\displaystyle\int \frac{2x-13}{(x-5)^2}\,dx.$

16.47. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x+2)^2}\,dx.$

16.48. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}.$

16.49. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+2x+1}.$

16.50. $\displaystyle\int \frac{dx}{13-6x+x^2}.$

16.51. $\displaystyle\int \frac{3dx}{9x^2-6x+2}.$

16.52. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx.$

16.53. $\displaystyle\int \frac{4x-1}{2x^2-2x+1}\,dx.$

16.54. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-2x+5}\,dx.$

16.55. $\displaystyle\int \frac{2x-10}{x^2-2x+10}\,dx.$

16.56. $\displaystyle\int \frac{2x-20}{x^2-8x+25}\,dx.$

16.57. $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+4x+8}\,dx.$

16.58. $\displaystyle\int \frac{x+6}{x^2-3}\,dx.$

16.59. $\displaystyle\int \frac{x+6}{x^2+3}\,dx.$

16.60. $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+4x+13}\,dx.$

16.61. $\displaystyle\int \frac{10x-44}{x^2-4x+20}\,dx.$

16.62. $\displaystyle\int \frac{4x-5}{x^2-6x+10}\,dx.$

16.63. $\displaystyle\int \frac{5x}{2+3x}\,dx.$

16.64. $\displaystyle\int \frac{x^2}{5x^2+12}\,dx.$

16.65. $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x+20}{x^2+6x+25}\,dx.$

16.66. $\displaystyle\int \frac{7x^2+7x-176}{x^3-9x^2+6x+56}\,dx.$

16.67. $\displaystyle\int \frac{x^3-4x^2+1}{(x-2)^4}\,dx.$

16.68. $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}\,dx.$

16.69. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx.$

16.70. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x-6}{x^2-x-2}\,dx.$

16.71. $\displaystyle\int \frac{2x^3-19x^2+58x-42}{x^2-8x+16}\,dx.$

16.72. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx.$

16.73. $\displaystyle\int \frac{72x^6}{3x^2+2}\,dx.$

16.74. $\displaystyle\int \frac{2x^4-10x^3+21x^2-20x+5}{x^2-3x+2}\,dx.$

16.75. $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+41}{(x+3)(x-1)(x-\frac{1}{2})}\,dx.$

16.76. $\displaystyle\int \frac{17x^2-x-26}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$

16.77. $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx.$

16.78. $\displaystyle\int \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)}\,dx.$

16.79. $\displaystyle\int \frac{4x^3-2x^2+6x-13}{x^4+3x^2-4}\,dx.$

16.80. $\displaystyle\int \frac{10x^3+40x^2+40x+6}{x^4+6x^3+11x^2+6x}\,dx.$

16.81. $\displaystyle\int \frac{6x^3+4x+1}{x^4+x^2}\,dx.$

16.82. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-a^2x}.$

16.83. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}.$

16.84. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$

16.85. $\displaystyle\int \frac{5x^3+3x^2+12x-12}{x^4-16}\,dx.$

16.86. $\displaystyle\int \frac{15x^2+66x+21}{(x-1)(x^2+4x+29)}\,dx.$

16.87. $\displaystyle\int \frac{4x^3+9x^2+4x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}\,dx.$

16.88. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2(x+1)}.$

16.89. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$

16.90. $\displaystyle\int \frac{3x^2-17x+21}{(x-2)^3}\,dx.$

16.91. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4x+8)^3}.$

16.92. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+7x+4}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx.$

16.93. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+64}.$

16.94. $\displaystyle\int \frac{5x^3-11x^2+5x+4}{(x-1)^4}\,dx.$

16.95. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+6x^2+25}.$

16.96. $\displaystyle\int \frac{9x^4-3x^3-23x^2+30x-1}{(x-1)^4(x+3)}\,dx$

16.97. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+5x-8}{x^4+8x^2+16}\,dx.$

16.98. $\displaystyle\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx.$

Rozdział XVII

CAŁKI FUNKCJI NIEWYMIERNYCH

§ 17.1. CAŁKI FUNKCJI ZAWIERAJĄCYCH PIERWIASTKI Z WYRAŻENIA LINIOWEGO

Jeżeli funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną potęg zmiennej x o wykładnikach postaci m/n, gdzie m, n są liczbami naturalnymi względem siebie pierwszymi, to wykonujemy podstawienie

$$x = t^N,$$

gdzie N oznacza wspólny mianownik ułamków postaci m/n.

ZADANIE 17.1. Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x > 0$. Funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną zmiennych $x^{1/2}$ i $x^{1/3}$; wspólnym mianownikiem ułamków $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ jest 6, wobec tego podstawiamy $x = t^6$, $t \geqslant 0$, skąd otrzymujemy $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$. Jest więc

$$I = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= 6\left(\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + t - \ln(t+1)\right) + C = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln(t+1) + C.$$

Na koniec powracamy do zmiennej x i ostatecznie otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

Jeżeli funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną zmiennej x oraz potęg dwumianu $ax+b$ lub funkcji homograficznej

$$\frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{gdzie} \quad ad - bc \neq 0,$$

o wykładnikach postaci m/n, gdzie m, n są liczbami naturalnymi względem siebie pierwszymi, to w pierwszym przypadku wykonujemy podstawienie

$$ax + b = t^N,$$

a w drugim przypadku

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^N,$$

gdzie N oznacza wspólny mianownik ułamków postaci m/n.

ZADANIE 17.2. Obliczyć całkę $\int\sqrt[4]{3x-7}\,dx$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x\geqslant\frac{7}{3}$. Podstawiamy $3x-7=t^4$, gdzie $t\geqslant 0$, skąd przez różniczkowanie otrzymujemy $3dx=4t^3dt$, $dx=\frac{4}{3}t^3dt$. A więc

$$\int\sqrt[4]{3x-7}dx=\int\tfrac{4}{3}t\cdot t^3dt=\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{1}{5}t^5+C=\tfrac{4}{15}(3x-7)^{5/4}+C.$$

ZADANIE 17.3. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}}.$$

Rozwiązanie. Podstawiamy $4-5x=t^3$, skąd $-5dx=3t^2dt$, czyli $dx=-\frac{3}{5}t^2dt$. Mamy

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}}=-\frac{3}{5}\int\frac{t^2dt}{t}=-\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{2}t^2+C=-\tfrac{3}{10}(4-5x)^{2/3}+C.$$

ZADANIE 17.4. Obliczyć całkę $\int x\sqrt{2x-10}\,dx$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x\geqslant 5$. Podstawiamy $2x-10=t^2$, gdzie $t\geqslant 0$, skąd $2dx=2t\,dt$, a więc $dx=t\,dt$. Prócz tego obliczamy x ze związku $2x-10=t^2$ i otrzymujemy $x=\frac{1}{2}(t^2+10)$. W ten sposób po podstawieniu całka przyjmie postać

$$\int x\sqrt{2x-10}dx=\int\tfrac{1}{2}(t^2+10)t\cdot tdt=\tfrac{1}{2}\int(t^4+10t^2)dt=\tfrac{1}{2}\int t^4dt+\tfrac{10}{2}\int t^2dt=$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}t^5+5\cdot\tfrac{1}{3}t^3+C=(\tfrac{1}{10}t^4+\tfrac{5}{3}t^2)t+C$$

i ostatecznie

$$\int x\sqrt{2x-10}dx=2(\tfrac{1}{5}x^2-\tfrac{1}{3}x-\tfrac{10}{3})\sqrt{2x-10}+C.$$

ZADANIE 17.5. Obliczyć całkę

$$I=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x\neq 1$ i $x\neq -1$. Podstawiamy

$$\frac{x+1}{x-1}=t^3,\quad\text{skąd}\quad x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\ dx=\frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$I=-3\int\frac{dt}{t^3-1}.$$

Po rozkładzie na ułamki proste mamy

$$I=\int \frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt-\int \frac{dt}{t-1}.$$

Całkując otrzymujemy

$$I=\tfrac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}-\ln|t-1|+C,\quad \text{gdzie}\quad t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Zadania

Obliczyć całki (zad. 17.6 - 17.35):

17.6. $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

17.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x}}$.

17.8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-4}}$.

17.9. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(2x+1)^3}}$.

17.10. $\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$.

17.11. $\int x\sqrt[3]{3x-1}\,dx$.

17.12. $\int x\sqrt{2+3x}\,dx$.

17.13. $\int x\sqrt{1-5x}\,dx$.

17.14. $\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$.

17.15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{2x+3}}$.

17.16. $\int \frac{x^2\,dx}{3\sqrt[3]{x+2}}$.

17.17. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$.

17.18. $\int x\sqrt[4]{2x+3}\,dx$.

17.19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+a}}$.

17.20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-a}}$.

17.21. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx$.

17.22. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$.

17.23. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$.

17.24. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}}$.

17.25. $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$.

17.26. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x+\sqrt[6]{x^5}}$.

17.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}}$.

17.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x-7}}$.

17.29. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+9}}$.

17.30. $\int x^2 \sqrt[3]{7-2x}dx$.

17.31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

17.32. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \cdot \frac{dx}{(x-1)^2}$.

17.33. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$.

17.34. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$, podstawić $x+1=t^6$.

17.35. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1} dx$, podstawić $x=t^6$.

§ 17.2. CAŁKI FUNKCJI ZAWIERAJĄCYCH PIERWIASTEK KWADRATOWY Z TRÓJMIANU KWADRATOWEGO

Całka funkcji, w której występują tylko działania wymierne (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie) wykonane na zmiennych x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$, daje się zawsze wyrazić przez funkcje elementarne (funkcje wymierne, trygonometryczne, odwrotne do nich funkcje kołowe czyli cyklometryczne oraz funkcje wykładnicze i logarytmiczne).

Podstawowymi całkami funkcji niewymiernych, do których wiele innych da się sprowadzić, są

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} \quad \text{i} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

przy czym drugą znamy bezpośrednio

(17.2.1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Pierwsza całka przy założeniu, że $x^2+k>0$, sprowadza się do całki funkcji wymiernej przez tzw. *pierwsze podstawienie Eulera*:

(1) $$x+\sqrt{x^2+k}=t.$$

Mamy $\sqrt{x^2+k}=t-x$, czyli $x^2+k=t^2-2tx+x^2$, skąd

(2) $$x=\frac{t^2-k}{2t}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{t}\right), \quad t\neq 0,$$

a następnie

(3) $$\sqrt{x^2+k}=t-x=t-\frac{t^2-k}{2t}=\frac{t^2+k}{2t}.$$

Ze wzoru (2) obliczamy

(4) $$dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{t^2}\right)dt=\frac{t^2+k}{2t^2}\,dt.$$

W ten sposób, uwzględniając związki (3) i (4), otrzymujemy

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\int\frac{\dfrac{t^2+k}{2t^2}}{\dfrac{t^2+k}{2t}}\,dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C.$$

Podstawiamy t ze wzoru (1) i otrzymujemy wzór

(17.2.2) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C.$$

ZADANIE 17.36. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+15}}.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że trójmian $x^2-6x+15$ jest dodatni przy wszelkich wartościach x; piszemy go w postaci $x^2-6x+15=(x-3)^2+6$. Podstawiamy $x-3=t$, skąd $dx=dt$. Tak więc

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+15}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+6}}=\ln(t+\sqrt{t^2+6})+C\,(^1).$$

Wracając do zmiennej x otrzymujemy ostatecznie

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+15}}=\ln(x-3+\sqrt{x^2-6x+15})+C.$$

W ten sposób obliczamy każdą całkę postaci

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad \text{gdzie}\quad a>0,$$

w przedziale, w którym wyrażenie podpierwiastkowe przyjmuje wartości dodatnie. W szcze-

---

(1) W wyrażeniu po prawej stronie zastąpiliśmy znak wartości bezwzględnej nawiasem, ponieważ wyrażenie w nawiasie jest dodatnie dla każdej wartości t.

gólności otrzymujemy

(17.2.3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \ln|x+\tfrac{1}{2}p+\sqrt{x^2+px+q}|+C.$$

Zauważmy, że jeżeli wyróżnik Δ trójmianu x^2+px+q jest ujemny, to jest

$$\sqrt{x^2+px+q}=\sqrt{(x+\tfrac{1}{2}p)^2+\tfrac{1}{4}(-\Delta)}>\sqrt{(x+\tfrac{1}{2}p)^2}=|x+\tfrac{1}{2}p|,$$

a więc w tym przypadku we wzorze (17.2.3) możemy znak wartości bezwzględnej zastąpić nawiasem.

Zadanie 17.37. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $a\neq 0$ i $|x|<|a|$. Ponieważ współczynnik przy x^2 jest ujemny, więc sprowadzimy całkę do funkcji $\arcsin t$. W tym celu podstawiamy $x=at$, skąd $dx=a\,dt$. Jest wówczas

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{a\,dt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}}=\frac{a}{|a|}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\operatorname{sgn} a \arcsin t \text{ (}^1\text{)}.$$

Ponieważ $t=x/a$, więc w wyniku otrzymujemy $\operatorname{sgn} a \arcsin\frac{x}{a}$. Następnie zauważmy, że jeżeli $a>0$, otrzymujemy w wyniku $\arcsin\frac{x}{a}$; jeżeli zaś $a<0$, to $-a>0$ i wobec nieparzystości funkcji $\arcsin x$ możemy napisać

$$\operatorname{sgn} a \arcsin\frac{x}{a}=-\arcsin\frac{x}{a}=\arcsin\frac{x}{-a}=\arcsin\frac{x}{|a|}.$$

Niezależnie więc od znaku a otrzymujemy wynik

(17.2.4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{|a|}+C.$$

Zadanie 17.38. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}.$$

Rozwiązanie. Sprowadzamy trójmian kwadratowy do postaci kanonicznej

$$4-2x-x^2=4-(x^2+2x)=4+1-(x^2+2x+1)=5-(x+1)^2.$$

([1]) Symbol $\operatorname{sgn} a$ (czytaj: *signum a*) określamy następująco: $\operatorname{sgn} a=+1$ dla $a>0$, $\operatorname{sgn} a=-1$ dla $a<0$ oraz $\operatorname{sgn} 0=0$. Signum po łacinie oznacza: znak.

Zakładamy, że $|x+1|<\sqrt{5}$, i podstawiamy $x+1=\sqrt{5}t$, skąd $dx=\sqrt{5}dt$. Wówczas $|t|<1$ i otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}=\int \frac{\sqrt{5}dt}{\sqrt{5-5t^2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t.$$

Ponieważ $t=\frac{x+1}{\sqrt{5}}$, więc ostatecznie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}=\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{5}}+C.$$

W ten sposób obliczamy każdą całkę postaci

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \text{gdzie} \quad a<0,$$

w przedziale, w którym wyrażenie podpierwiastkowe przybiera wartości dodatnie.

Zadanie 17.39. Obliczyć całkę

$$\int \frac{(3x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+5x-10}}.$$

Rozwiązanie. Przyjmujemy, że $x^2+5x-10>0$. Jeżeli licznik jest pochodną funkcji znajdującej się pod pierwiastkiem kwadratowym, to ze wzoru z rachunku różniczkowego

$$(\sqrt{U(x)})'=\frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}, \quad \text{gdzie} \quad U(x)>0,$$

otrzymujemy natychmiast wzór rachunku całkowego

$$\int \frac{U'(x)\,dx}{\sqrt{U(x)}}=2\sqrt{U(x)}+C. \tag{17.2.5}$$

Aby naszą całkę sprowadzić do całki (17.2.5) i do całki typu z zadania 17.36, dzielimy licznik $3x+1$ funkcji podcałkowej przez pochodną wyrażenia podpierwiastkowego, tj. przez $2x+5$, i otrzymujemy $3x+1=\frac{3}{2}(2x+5)-\frac{13}{2}$. Uwzględniając powyższe przekształcenie mamy

$$\int \frac{(3x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+5x-10}}=3\int \frac{(2x+5)\,dx}{2\sqrt{x^2+5x-10}}-\frac{13}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x-10}}. \tag{1}$$

Pierwsza całka po prawej stronie wzoru (1) jest podług (17.2.5) równa $3\sqrt{x^2+5x-10}$, a drugą obliczamy przekształcając trójmian w mianowniku w celu skorzystania ze wzoru (17.2.2) jak w zadaniu 17.36:

$$x^2+5x-10=(x+\tfrac{5}{2})^2-\tfrac{25}{4}-10=(x+\tfrac{5}{2})^2-\tfrac{65}{4}.$$

Podstawiamy $x+\frac{5}{2}=t$, skąd $dx=dt$, i według wzoru (17.2.2) mamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x-10}}=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{65}{4}}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2-\tfrac{65}{4}}\right|+C=$$
$$=\ln\left|x+\tfrac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x-10}\right|+C\,.$$

Podstawiając obliczone całki do równości (1) otrzymujemy ostatecznie

$$\int \frac{(3x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+5x-10}}=3\sqrt{x^2+5x-10}-\tfrac{13}{2}\ln\left|x+\tfrac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x-10}\right|+C\,.$$

W ten sposób obliczamy każdą całkę postaci

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,, \quad \text{gdzie} \quad a>0\,,$$

w przedziale, w którym wyrażenie podpierwiastkowe przyjmuje wartości dodatnie. Jeżeli zaś $a<0$, postępujemy podobnie, a wynik różni się oczywiście tym, że druga całka sprowadza się do funkcji $\arcsin t$ (jak w zadaniu 17.37).

Zadanie 17.40. Obliczyć całkę

$$I=\int \frac{2x+1}{\sqrt{2+x-3x^2}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $-\frac{2}{3}<x<1$. Chcemy sprowadzić naszą całkę do całki (17.2.4) oraz do całki rozwiązanej w zadaniu 17.39. W tym celu dzielimy licznik funkcji podcałkowej przez pochodną wyrażenia podpierwiastkowego i otrzymujemy $2x+1=$ $=-\frac{1}{3}(-6x+1)+\frac{4}{3}$. Wstawiając powyższe do danej całki otrzymujemy

$$I=-\tfrac{1}{3}\int \frac{-6x+1}{\sqrt{2+x-3x^2}}\,dx+\tfrac{4}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-3x^2}}\,.$$

Pierwszą całkę obliczamy według wzoru (17.2.5):

$$\int \frac{-6x+1}{\sqrt{2+x-3x^2}}\,dx=2\sqrt{2+x-3x^2}\,.$$

Drugą całkę sprowadzamy do całki (17.2.4):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{36}-(x-\frac{1}{6})^2}}\,.$$

Po podstawieniu $x-\frac{1}{6}=t$, skąd $dx=dt$, i zastosowaniu wzoru (17.2.4) otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x-1}{5}\,.$$

Wracając do całki I otrzymujemy

$$I=-\tfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2+x-3x^2}+\tfrac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x-1}{5}+C=$$

$$=-\tfrac{2}{3}\sqrt{2+x-3x^2}+\tfrac{4}{9}\sqrt{3}\arcsin\frac{6x-1}{5}+C.$$

ZADANIE 17.41. Obliczyć całki

$$I_1=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad \text{i} \quad I_2=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $a\neq 0$ i $|x|<|a|$. Przekształcamy funkcję podcałkową całki I_1 mnożąc ją i dzieląc przez $\sqrt{a^2-x^2}$:

$$I_1=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{2}$$

Pierwszą całkę obliczamy podług wzoru (17.2.4):

$$\int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a^2\arcsin\frac{x}{|a|}.$$

Po podstawieniu wyniku do (2) otrzymujemy

$$I_1=a^2\arcsin\frac{x}{|a|}-I_2. \tag{3}$$

Stosujemy do całki I_1 wzór na całkowanie przez części, otrzymujemy

$$I_1=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int x\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$

czyli

$$I_1=x\sqrt{a^2-x^2}+I_2. \tag{4}$$

Porównajmy wyniki osiągnięte we wzorach (3) i (4). Łatwo zauważyć, że przez dodanie tych równości stronami zredukuje się nie obliczona całka I_2 po prawej stronie obu tych równości i w ten sposób obliczymy całkę I_1; po wykonaniu dodawania otrzymujemy

$$2I_1=a^2\arcsin\frac{x}{|a|}+x\sqrt{a^2-x^2},$$

skąd po podzieleniu przez 2 otrzymamy ostatecznie następującą wartość I_1;

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C. \tag{17.2.6}$$

Ze związków (3) i (4) przez odjęcie stronami możemy obliczyć całkę I_2; otrzymujemy

(17.2.7)
$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Takie dwie całki, jak I_1 i I_2, nazywamy *całkami stowarzyszonymi*, ponieważ obliczanie jednej z nich wiąże się ściśle z obliczaniem drugiej.

ZADANIE 17.42. Obliczyć całkę $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $-3 \leqslant x \leqslant 1$. Ponieważ współczynnik przy x^2 jest ujemny, więc będziemy się starali przez przekształcenie wyrażenia podpierwiastkowego doprowadzić tę całkę do postaci (1) w zadaniu 17.41:

$$\sqrt{3-2x-x^2} = \sqrt{3-(x^2+2x+1)+1} = \sqrt{4-(x+1)^2}.$$

Przyjmując $x+1=u$, skąd $dx=du$, otrzymujemy

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx = \int \sqrt{4-u^2}\, du, \qquad \text{gdzie} \qquad -2 \leqslant u \leqslant 2.$$

Do ostatniej całki stosujemy wzór (17.2.6):

$$\int \sqrt{4-u^2}\, du = 2 \arcsin \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}u\sqrt{4-u^2}$$

i wracając do zmiennej x ostatecznie otrzymujemy

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx = 2 \arcsin \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C.$$

ZADANIE 17.43. Obliczyć całki stowarzyszone

$$I_1 = \int \sqrt{x^2+k}\, dx \quad \text{i} \quad I_2 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+k}},$$

gdzie k jest dowolną stałą (dodatnią lub ujemną).

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x^2+k>0$. Mnożymy i dzielimy funkcję podcałkową całki I_1 przez $\sqrt{x^2+k}$:

(1)
$$I_1 = \int \frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}\, dx = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+k}} + \int \frac{k\, dx}{\sqrt{x^2+k}}.$$

Drugą całkę obliczamy bezpośrednio ze wzoru (17.2.2):

$$\int \frac{k\, dx}{\sqrt{x^2+k}} = k \ln|x+\sqrt{x^2+k}|.$$

Po podstawieniu do wzoru (1) otrzymujemy

(2)
$$I_1 = I_2 + k \ln|x+\sqrt{x^2+k}|.$$

Chcąc znaleźć drugi związek pomiędzy I_1 i I_2 do całki I_1 stosujemy wzór na całkowanie przez części i otrzymujemy

$$I_1=\int\sqrt{x^2+k}\,dx=x\sqrt{x^2+k}-\int x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}\,dx,$$

czyli

(3) $$I_1=x\sqrt{x^2+k}-I_2.$$

Dodając stronami równości (2) i (3) obliczamy wartość I_1:

(17.2.8) $$\int\sqrt{x^2+k}\,dx=\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+k}+\tfrac{1}{2}k\ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C,$$

natomiast przez odjęcie stronami obliczamy całkę stowarzyszoną I_2:

(17.2.9) $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}}=\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+k}-\tfrac{1}{2}k\ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C,$$

przy czym przy $k>0$ znak bezwzględnej wartości można zastąpić nawiasem.

Wzory (17.2.1) (17.2.9) na str. 331-338 są podstawowymi wzorami dotyczącymi całek niewymiernych.

Zadanie 17.44. Obliczyć całkę $\int\sqrt{x^2-2x+5}\,dx$.

Rozwiązanie. Funkcja podpierwiastkowa jest zawsze dodatnia. Całka łatwo sprowadza się do całki $\int\sqrt{u^2+k}\,du$. Sprowadzamy trójmian kwadratowy do postaci kanonicznej

$$x^2-2x+5=(x^2-2x+1)+4=(x-1)^2+4.$$

Przyjmując $x-1=u$, skąd $dx=du$, otrzymujemy

$$\int\sqrt{x^2-2x+5}\,2x=\int\sqrt{u^2+4}\,du.$$

Stosujemy teraz wzór (17.2.8) przyjmując w nim $k=4$:

$$\int\sqrt{u^2+4}\,du=\tfrac{1}{2}u\sqrt{u^2+4}+\tfrac{4}{2}\ln(u+\sqrt{u^2+4})+C.$$

Na koniec wracamy do zmiennej x:

$$\int\sqrt{x^2-2x+5}\,dx=\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+5}+2\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C.$$

Zadanie 17.45. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{(3x^2+2)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Rozwiązanie. Funkcja podpierwiastkowa jest zawsze dodatnia. Przekształcamy ją do postaci

$$x^2+x+1=(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}.$$

Podstawiamy $x+\frac{1}{2}=u$, skąd $dx=du$ oraz $x=u-\frac{1}{2}$. Wyrazimy teraz licznik jako funkcję u:

$$3x^2+2=3(u-\tfrac{1}{2})^2+2=3u^2-3u+\tfrac{11}{4}.$$

W ten sposób nasza całka przyjmuje postać

$$I=\int \frac{3u^2-3u+\frac{11}{4}}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}\,du.$$

Rozbijamy ją na trzy całki:

$$I=3\int \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}-3\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}+\frac{11}{4}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}.$$

Pierwsza całka jest postaci (17.2.9); jest więc

$$\int \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}=\tfrac{1}{2}u\sqrt{u^2+\tfrac{3}{4}}-\tfrac{3}{8}\ln(u+\sqrt{u^2+\tfrac{3}{4}}).$$

Druga całka jest postaci (17.2.5); jest więc

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}=\sqrt{u^2+\tfrac{3}{4}}.$$

Trzecia całka jest postaci (17.2.2); jest więc

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}=\ln(u+\sqrt{u^2+\tfrac{3}{4}}).$$

Uwzględniając wszystkie te równości otrzymujemy

$$I=\tfrac{3}{2}u\sqrt{u^2+\tfrac{3}{4}}-3\sqrt{u^2+\tfrac{3}{4}}+(\tfrac{11}{4}-\tfrac{9}{8})\ln(u+\sqrt{u^2+\tfrac{3}{4}}).$$

Zastępując u przez $x+\frac{1}{2}$ mamy ostatecznie

$$\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=\tfrac{3}{4}(2x-3)\sqrt{x^2+x+1}+\tfrac{13}{8}\ln(x+\tfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+C.$$

§ 17.3. METODA WSPÓŁCZYNNIKÓW NIEOZNACZONYCH

W podanych niżej przykładach będziemy stosowali *metodę współczynników nieoznaczonych*. Metodę tę stosujemy przy obliczaniu całek postaci

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \tag{1}$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia n. Całka (1) równa się wyrażeniu

$$W_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+A\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{2}$$

gdzie $W_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $n-1$, a A pewną stałą.

Współczynniki (nieoznaczone) wielomianu $W_{n-1}(x)$ oraz stałą A obliczamy przyrównując

$$\frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

(to jest pochodną funkcji (1)) do pochodnej wyrażenia (2).

Zadanie 17.46. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{6x^3-22x^2+21x-7}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Będziemy rozważali daną całkę w jednym z przedziałów: bądź $x<1$, bądź $x>3$.

Całkę tę możemy obliczyć metodą współczynników nieoznaczonych. W metodzie tej przewidujemy, że całka nasza będzie równa wyrażeniu następującej postaci:

$$I=\int\frac{6x^3-22x^2+21x-7}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx\equiv \tag{2}$$

$$\equiv(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-4x+3}+A\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

Aby wyznaczyć współczynniki a, b, c, A, różniczkujemy obie strony powyższej tożsamości i otrzymujemy

$$\frac{6x^3-22x^2+21x-7}{\sqrt{x^2-4x+3}}\equiv$$

$$\equiv(2ax+b)\sqrt{x^2-4x+3}+(ax^2+bx+c)\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}}+\frac{A}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

Mnożymy obie strony tożsamości przez $\sqrt{x^2-4x+3}$; mamy

$$6x^3-22x^2+21x-7\equiv(2ax+b)(x^2-4x+3)+(ax^2+bx+c)(x-2)+A\equiv$$

$$\equiv3ax^3+(-10a+2b)x^2+(6a-6b+c)x+(3b-2c+A).$$

Przyrównujemy teraz kolejno współczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej x:

$$\begin{aligned}6&=3a, &&\text{skąd}\quad a=2,\\ -22&=-10a+2b, &&\text{skąd}\quad b=-1,\\ 21&=6a-6b+c, &&\text{skąd}\quad c=3,\\ -7&=3b-2c+A, &&\text{skąd}\quad A=2.\end{aligned}$$

Podstawiając obliczone współczynniki do równości (2) otrzymujemy

$$I=(2x^2-x+3)\sqrt{x^2-4x+3}+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

Ostatnią całkę możemy napisać w postaci

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}}.$$

Podstawiamy $x-2=t$ i na podstawie wzoru (17.2.2) otrzymujemy

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}=\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+3}\right|.$$

Ostatecznie jest więc

$$I=(2x^2-x+3)\sqrt{x^2-4x+3}+2\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+3}\right|+C.$$

ZADANIE 17.47. Obliczyć całkę $I=\int(3x-2)\sqrt{x^2-2x}\,dx$.

Rozwiązanie. Będziemy rozważali daną całkę w jednym z dwóch przedziałów: bądź $x<0$, bądź $x>2$. Funkcję podcałkową mnożymy i dzielimy przez $\sqrt{x^2-2x}$; mamy

$$I=\int\frac{(3x-2)(x^2-2x)\,dx}{\sqrt{x^2-2x}}=\int\frac{3x^3-8x^2+4x}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx.$$

W ten sposób otrzymaliśmy całkę typu rozwiązanego w poprzednim zadaniu. Piszemy

$$\int\frac{3x^3-8x^2+4x}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx\equiv(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-2x}+A\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}},$$

a następnie różniczkujemy powyższą tożsamość

$$\frac{3x^3-8x^2+4x}{\sqrt{x^2-2x}}\equiv(2ax+b)\sqrt{x^2-2x}+(ax^2+bx+c)\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}+\frac{A}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Mnożymy obie strony równości przez $\sqrt{x^2-2x}$; mamy

$$\begin{aligned}3x^3-8x^2+4x&\equiv(2ax+b)(x^2-2x)+(ax^2+bx+c)(x-1)+A\equiv\\&\equiv3ax^3+(-5a+2b)x^2+(-3b+c)x+(-c+A).\end{aligned}$$

Przyrównujemy współczynniki przy kolejnych potęgach x:

$$\begin{aligned}3&=3a, &&\text{skąd}\quad a=1,\\-8&=-5a+2b, &&\text{skąd}\quad b=-\tfrac{3}{2},\\4&=-3b+c, &&\text{skąd}\quad c=-\tfrac{1}{2},\\0&=-c+A, &&\text{skąd}\quad A=-\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Łatwo obliczyć, że

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}} = \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|.$$

Mamy więc ostatecznie

$$\int (3x-2)\sqrt{x^2-2x}\,dx = (x^2-\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{2})\sqrt{x^2-2x}-\tfrac{1}{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+C.$$

Zadanie 17.48. Obliczyć całkę

(1) $$I=\int \frac{dx}{x^5\sqrt{5x^2+2x-3}}.$$

Rozwiązanie. Jest to całka typu

(2) $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

którą przez podstawienie $\dfrac{1}{x-\alpha}=u$ sprowadzamy do całek typu

(3) $$\int \frac{u^{n-1}du}{\sqrt{hu^2+ku+l}}.$$

Rozważamy daną całkę w jednym z przedziałów: bądź $x<-1$, bądź $x>\frac{3}{5}$. Mamy $\alpha=0$. Podstawiamy $1/x=t$, czyli $x=1/t$, skąd $dx=-dt/t^2$, gdzie $-1<t<0$ lub $0<t<\frac{5}{3}$. Po podstawieniu mamy

$$I=\int \frac{-t^5dt}{t^2\sqrt{\dfrac{5}{t^2}+\dfrac{2}{t}-3}}.$$

Przy upraszczaniu postaci tego wyrażenia musimy pamiętać, że w pierwszym przypadku, tj. przy $x<-1$, czyli $-1<t<0$, jest $-t=\sqrt{t^2}$, a więc całka I jest równa

(4) $$I_1=\int \frac{t^4dt}{\sqrt{5+2t-3t^2}}.$$

W drugim natomiast przypadku, tj. przy $x>\frac{3}{5}$, czyli $0<t<\frac{5}{3}$, jest $t=\sqrt{t^2}$, a więc całka I jest równa

(5) $$I_2=\int \frac{-t^4dt}{\sqrt{5+2t-3t^2}}.$$

Ponieważ funkcje podcałkowe w całkach (4) i (5) różnią się znakiem, wystarczy więc obliczyć jedną z nich, np. pierwszą, tj. I_1.

Całkę I_1 obliczamy metodą współczynników nieoznaczonych, jak w. zadaniu 17.46; mamy

$$\int \frac{t^4 dt}{\sqrt{5+2t-3t^2}} = (at^3+bt^2+ct+d)\sqrt{5+2t-3t^2}+A\int \frac{dt}{\sqrt{5+2t-3t^2}}. \tag{6}$$

Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$\frac{t^4}{\sqrt{5+2t-3t^2}} \equiv (3at^2+2bt+c)\sqrt{5+2t-3t^2}+$$
$$+(at^3+bt^2+ct+d)\frac{2-6t}{2\sqrt{5+2t-3t^2}}+A\frac{1}{\sqrt{5+2t-3t^2}}.$$

Mnożąc obie strony równości przez $\sqrt{5+2t-3t^2}$ otrzymujemy

$$t^4 \equiv (3at^2+2bt+c)(5+2t-3t^2)+(at^3+bt^2+ct+d)(1-3t)+A\equiv$$
$$\equiv -12at^4+(7a-9b)t^3+(15a+5b-6c)t^2+(10b+3c-3d)t+(5c+d+A).$$

Przyrównując współczynniki przy jednakowych potęgach t otrzymujemy

$1=$	$-12a$,	skąd	$a=-\frac{1}{12}$,
$0=$	$7a-9b$,	skąd	$b=-\frac{7}{108}$,
$0=$	$15a+5b-6c$,	skąd	$c=-\frac{85}{324}$,
$0=$	$10b+3c-3d$,	skąd	$d=-\frac{155}{324}$,
$0=$	$5c+d+A$,	skąd	$A=\frac{145}{81}$.

Pozostaje do obliczenia całka

$$I_3=\int \frac{dt}{\sqrt{5+2t-3t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{16}{9}-(t-\frac{1}{3})^2}}.$$

Wykonujemy podstawienie $t-\frac{1}{3}=u$, skąd $dt=du$, i według wzoru (17.2.4) otrzymujemy

$$I_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{16}{9}-u^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3}{4}u=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3t-1}{4}.$$

Wracamy do równości (6) i korzystając z uzyskanych wyników otrzymujemy

$$I_1=\frac{-1}{324}(27t^3+21t^2+85t+155)\sqrt{5+2t-3t^2}+\frac{145}{81\sqrt{3}}\arcsin\frac{3t-1}{4}+C.$$

Podstawiając $t=1/x$ wracamy do zmiennej x; po przekształceniach otrzymujemy

$$I_1=\frac{-155x^3-85x^2-21x-27}{324x^3}\sqrt{\frac{5x^2+2x-3}{x^2}}+\frac{145}{81\sqrt{3}}\arcsin\frac{3-x}{4x}+C.$$

Jeżeli $x<-1$, to $I=I_1$, a $\sqrt{x^2}=-x$, więc

$$I=\frac{155x^3+85x^2+21x+27}{324x^4}\sqrt{5x^2+2x-3}+\frac{145}{81\sqrt{3}}\arcsin\frac{3-x}{4x}+C,$$

gdzie $x<-1$. Jeżeli zaś $x>\frac{3}{5}$, to $I=I_2=-I_1$, a $\sqrt{x^2}=x$, więc

$$I=\frac{155x^3+85x^2+21x+27}{324x^4}\sqrt{5x^2+2x-3}+\frac{145}{81\sqrt{3}}\arcsin\frac{3-x}{4x}+C',$$

gdzie $x>\frac{3}{5}$.

ZADANIE 17.49. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{dx}{(x-2)^4\sqrt{x^2-3}}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Rozważmy całkę w przedziałach: bądź $x<-\sqrt{3}$, bądź $\sqrt{3}<x<2$, bądź $x>2$. Wykonujemy podstawienie $\frac{1}{x-2}=t$, czyli $x=\frac{1}{t}+2$, $dx=\frac{-dt}{t^2}$, gdzie t leży w jednym z przedziałów: bądź $-(2-\sqrt{3})<t<0$, bądź $t<-(2+\sqrt{3})$, bądź $t>0$. Upraszczając postać funkcji podcałkowej musimy zwrócić uwagę, że dla $t>0$ jest $t=\sqrt{t^2}$, a więc mamy wówczas

$$I_1=\int\frac{-t^4dt}{t^2\sqrt{\left(\frac{1}{t}+2\right)^2-3}}=\int\frac{-t^3dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t}+1}}=\int\frac{-t^3dt}{\sqrt{t^2+4t+1}}. \tag{2}$$

W przypadku zaś, gdy $t<0$, jest $-t=\sqrt{t^2}$, mamy więc całkę postaci

$$I_2=\int\frac{t^3dt}{\sqrt{t^2+4t+1}}. \tag{3}$$

Z postaci całek I_1 i I_2 widać, że wystarczy obliczyć jedną z nich, np. I_1.

Jest to całka typu rozwiązanego w poprzednim zadaniu; piszemy więc równość

$$\int\frac{-t^3dt}{\sqrt{t^2+4t+1}}=(at^2+bt+c)\sqrt{t^2+4t+1}+A\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4t+1}}.$$

Różniczkując stronami otrzymujemy

$$\frac{-t^3}{\sqrt{t^2+4t+1}}\equiv(2at+b)\sqrt{t^2+4t+1}+(at^2+bt+c)\frac{2t+4}{2\sqrt{t^2+4t+1}}+\frac{A}{\sqrt{t^2+4t+1}}.$$

Po pomnożeniu obu stron przez $\sqrt{t^2+4t+1}$ otrzymujemy

$$-t^3\equiv(2at+b)(t^2+4t+1)+(at^2+bt+c)(t+2)+A\equiv$$
$$\equiv 3at^3+(10a+2b)t^2+(2a+6b+c)t+(b+2c+A).$$

Następnie przyrównując współczynniki przy jednakowych potęgach t otrzymujemy

$$\begin{aligned} -1&=3a, &&\text{skąd}\quad a=-\tfrac{1}{3},\\ 0&=10a+2b, &&\text{skąd}\quad b=\tfrac{5}{3},\\ 0&=2a+6b+c, &&\text{skąd}\quad c=-\tfrac{28}{3},\\ 0&=b+2c+A, &&\text{skąd}\quad A=17. \end{aligned}$$

Łatwo obliczamy

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4t+1}}=\ln\left|t+2+\sqrt{t^2+4t+1}\right|.$$

Otrzymujemy więc

$$I_1=\tfrac{1}{3}(-t^2+5t-28)\sqrt{t^2+4t+1}+17\ln\left|t+2+\sqrt{t^2+4t+1}\right|+C.$$

Wracając do zmiennej x za pomocą podstawienia $t=\dfrac{1}{x-2}$ otrzymujemy

$$I_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{-28x^2+117x-123}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x^2-3}{(x-2)^2}}+17\ln\left|\frac{1}{x-2}+2+\sqrt{\frac{x^2-3}{(x-2)^2}}\right|+C$$

Ponieważ w tym przypadku $t>0$, a więc również $x-2>0$; wówczas $\sqrt{(x-2)^2}=x-2$, wreszcie

$$I_1=\frac{-28x^2+117x-123}{3(x-2)^3}\sqrt{x^2-3}+17\ln\frac{2x-3+\sqrt{x^2-3}}{x-2}+C. \tag{4}$$

W przypadku całki I_2 wszystkie współczynniki a, b, c, A będą różniły się znakiem od tych samych współczynników obliczonych dla całki I_1. Lecz wtedy $t<0$, a więc również $x-2<0$, wobec czego $\sqrt{(x-2)^2}=-(x-2)$. Otrzymujemy

$$I_2=\frac{-28x^2+117x-123}{3(x-2)^3}\sqrt{x^2-3}-17\ln\frac{2x-3-\sqrt{x^2-3}}{x-2}+C_1. \tag{5}$$

Stosując w otrzymanym wyniku do drugiego wyrazu przekształcenie $-\ln u=\ln\dfrac{1}{u}$, a następnie usuwając niewymierność w mianowniku można wykazać identyczność wyników (4) i (5).

Zadanie 17.50. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}.$$

Rozwiązanie. Rozważmy całkę w przedziałach: $x<-1$ i $x>1$. Całkę tę obliczamy stosując podstawienie

$$u=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, \tag{1}$$

gdzie $-1<u<0$ lub $0<u<1$. Stąd

$$x^2=\frac{1}{1-u^2}, \quad \text{skąd} \quad x\,dx=\frac{u\,du}{(1-u^2)^2}.$$

Pomnóżmy licznik i mianownik funkcji podcałkowej przez x:

$$I=\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)\,x\sqrt{x^2-1}}. \tag{2}$$

Wykonujemy obliczenia pomocnicze

$$x^2+1=\frac{1}{1-u^2}+1=\frac{2-u^2}{1-u^2}, \quad x\sqrt{x^2-1}=x\cdot xu=x^2u=\frac{u}{1-u^2}. \tag{3}$$

Zatem całka (2) przez podstawienie (1) przyjmuje postać

$$I=\int\frac{u\,du}{(1-u^2)^2\cdot\dfrac{2-u^2}{1-u^2}\cdot\dfrac{u}{1-u^2}}=\int\frac{du}{2-u^2}.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste

$$\frac{1}{2-u^2}\equiv\frac{A}{\sqrt{2}-u}+\frac{B}{\sqrt{2}+u}. \tag{4}$$

Łatwe obliczenie daje $A=B=\frac{1}{4}\sqrt{2}$. Całkując równość (4) otrzymujemy

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{2}-u}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{2}+u}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-u)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+u)+C=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}+C.$$

Podstawiając $u=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ po przekształceniach otrzymujemy

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}+C=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{(x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1})^2}{x^2+1}+C.$$

Uwaga. Całka rozwiązana powyżej jest całką typu

$$\int\frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{px^2+q}}.$$

Przez podstawienie $\sqrt{px^2+q}=xu$ sprowadzamy ją do całki funkcji wymiernej.

Zadania

Obliczyć całki (zad. 17.51 - 17.123):

17.51. $\int \frac{(8x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+3x+1}}$.

17.52. $\int \frac{(10x-15)\,dx}{\sqrt{36x^2-108x+77}}$.

17.53. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

17.54. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$.

17.55. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

17.56. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2r-x)x}}$, $r>0$.

17.57. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

17.58. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$.

17.59. $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$.

17.60. $\int \frac{6x+5}{\sqrt{6+x-x^2}}\,dx$.

17.61. $\int \frac{x-5}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$.

17.62. $\int \frac{x+1}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx$.

17.63. $\int \sqrt{6x-x^2}\,dx$.

17.64. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

17.65. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$.

17.66. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3x-1}}$.

17.67. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+m}}$, $m>\frac{1}{4}$.

17.68. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-3a)}}$, $a>0$.

17.69. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}}$.

17.70. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{x^2-5x+19}}$.

17.71. $\int \frac{x+a}{\sqrt{x^2-ax}}\,dx$, $a>0$.

17.72. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{4x^2-4x+5}}\,dx$.

17.73. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$.

17.74. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{4x^2+5x-8}}\,dx$.

17.75. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{2x^2+8x-1}}\,dx$.

17.76. $\int \sqrt{2x+x^2}\,dx$.

17.77. $\int \frac{5x-4}{\sqrt{3x^2-2x+1}}\,dx$.

17.78. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

17.79. $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$.

17.80. $\int \sqrt{3x^2+10x+9}\,dx$

17.81. $\int \sqrt{x^2-3x+2}\,dx$.

17.82. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

17.83. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

17.84. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$.

17.85. $\int \frac{2ax^2+1}{\sqrt{ax^2+2x+1}}\,dx, \ a>1$.

17.86. $\int \frac{2x^2+3x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

17.87. $\int \frac{2x^2-ax+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx, \ a\neq 0$.

17.88. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

17.89. $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx$.

17.90. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

17.91. $\int \frac{3x^3+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

17.92. $\int x^2\sqrt{4x-x^2}\,dx$.

17.93. $\int x\sqrt{6+x-x^2}\,dx$.

17.94. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{5x^2+4}}$.

17.95. $\int \frac{x^3+5x^2-3x+4}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

17.96. $\int \frac{5x^2-2x+10}{\sqrt{3x^2-5x+8}}\,dx$.

17.97. $\int \frac{x^3+4x^2-6x+3}{\sqrt{5+6x-x^2}}\,dx$.

17.98. $\int x\sqrt{8+x-x^2}\,dx$.

17.99. $\int (2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}\,dx$.

17.100. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$.

17.101. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$.

17.102. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{3+2x+x^2}}$.

17.103. $\int \frac{dx}{x\sqrt{10x-x^2}}$.

17.104. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

17.105. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{4-x^2}}$.

17.106. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

17.107. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$.

17.108. $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-1}}$.

17.109. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-3x^2}}$.

17.110. $\int \frac{dx}{(3-2x)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

17.111. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

17.112. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

17.113. $\int \frac{dx}{(a-x)\sqrt{a^2-x^2}}$, $a>0$.

17.114. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-6x+1}}$.

17.115. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

17.116. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{10x-x^2}}$.

17.117. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

17.118. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{2x^2+2x+1}}$.

17.119. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{3-2x^2}}$.

17.120. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-4x+x^2}}$.

17.121. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$.

17.122. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{3-2x+x^2}}$.

17.123. $\int \frac{dx}{(x-2)^4\sqrt{1-4x+x^2}}$.

Rozdział XVIII

CAŁKI FUNKCJI PRZESTĘPNYCH

§ 18.1. CAŁKI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

ZADANIE 18.1. Obliczyć całkę $I=\int \sin ax\, dx$ $(a\neq 0)$.
Całkę tę sprowadzimy do znanej całki przez podstawienie $ax=t$, skąd

$$a\,dx=dt, \quad \text{czyli} \quad dx=\frac{1}{a}\,dt.$$

Mamy więc

$$I=\frac{1}{a}\int \sin t\,dt=-\frac{1}{a}\cos t+C=-\frac{1}{a}\cos ax+C.$$

ZADANIE 18.2. Obliczyć całkę

$$I=\int \sin ax \cos bx\, dx \qquad (a\neq 0 \text{ i } b\neq 0).$$

Funkcję podcałkową przedstawiamy jako sumę (łatwiejszą do scałkowania) na podstawie przekształcenia $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$. Podstawiając $A=ax$, $B=bx$ otrzymujemy

$$\sin ax\cdot\cos bx=\tfrac{1}{2}\left(\sin((a+b)x)+\sin((a-b)x)\right).$$

Jest więc

$$I=\tfrac{1}{2}\int \sin\left((a+b)x\right)dx+\tfrac{1}{2}\int \sin\left((a-b)x\right)dx.$$

Jeżeli $a+b=0$ lub $a-b=0$, to na podstawie poprzedniego zadania otrzymujemy

$$I=-\frac{1}{4a}\cos 2ax+C.$$

Jeżeli zaś $a+b\neq 0$ i $a-b\neq 0$, to na podstawie tegoż zadania otrzymujemy

$$\int \sin ax\cos bx\,dx=-\frac{1}{2(a+b)}\cos\left((a+b)x\right)-\frac{1}{2(a-b)}\cos\left((a-b)x\right)+C.$$

ZADANIE 18.3. Obliczyć całki

$$A=\int \cos^2 x\,dx \quad \text{i} \quad B=\int \sin^2 x\,dx.$$

Rozwiązanie: Zadanie rozwiążemy trzema sposobami.

Sposób I. Całki te obliczamy łącznie. Zauważmy, że

$$A+B=\int(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx=\int dx=x,$$

$$A-B=\int(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx=\int\cos 2x\,dx=\tfrac{1}{2}\sin 2x.$$

Z równań tych wyznaczamy

$$A=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}\sin 2x,\qquad B=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}\sin 2x,$$

czyli

(18.1.1) $$\int\cos^2 x\,dx=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}\sin 2x+C_1,$$

(18.1.2) $$\int\sin^2 x\,dx=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}\sin 2x+C_2.$$

Sposób II. Całkę A możemy obliczyć również stosując całkowanie przez części; mamy

$$\int\cos^2 x\,dx=\int\cos x\cos x\,dx.$$

Podstawiamy $\cos x=u$, $\cos x\,dx=dv$, skąd $-\sin x\,dx=du$, $\sin x=v$. Otrzymujemy więc

$$\int\cos^2 x\,dx=\cos x\sin x+\int\sin x\sin x\,dx,$$

a następnie zastępujemy $\sin^2 x$ przez $1-\cos^2 x$:

$$\int\cos^2 x\,dx=\sin x\cos x+x-\int\cos^2 x\,dx+C.$$

Przenosząc całkę z prawej strony na lewą i dzieląc przez 2 otrzymujemy ostatecznie

$$\int\cos^2 x\,dx=\tfrac{1}{2}\sin x\cos x+\tfrac{1}{2}x+C_1,\qquad\text{gdzie}\qquad C_1=\tfrac{1}{2}C.$$

Analogicznie wyznaczamy całkę B.

Sposób III. Korzystamy ze wzorów

$$2\cos^2 x=1+\cos 2x,\qquad 2\sin^2 x=1-\cos 2x.$$

Dzieląc przez 2 i całkując obie strony otrzymujemy najszybciej wynik.

ZADANIE 18.4. Obliczyć całkę

$$I_n=\int\sin^n x\,dx,\qquad\text{gdzie } n \text{ liczba naturalna.}$$

Rozwiązanie. Szukamy wzoru redukcyjnego. W tym celu przedstawiamy całkę w postaci

$$I_n=\int\sin^{n-1}x\sin x\,dx.$$

Całkujemy przez części przyjmując

$$u=\sin^{n-1}x,\ dv=\sin x\,dx,\quad\text{skąd}\quad du=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx,\ v=\int\sin x\,dx=-\cos x.$$

Mamy więc kolejno:

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x) \, dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx.$$

Możemy to napisać w postaci

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.$$

Po przeniesieniu ostatniego wyrazu z prawej strony na lewą i po redukcji otrzymujemy

$$nI_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}$$

i ostatecznie dostajemy wzór redukcyjny

$$(18.1.3) \qquad I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \text{gdzie} \quad I_n = \int \sin^n x \, dx.$$

Uwaga. Wzór ten stosuje się w praktyce przy n parzystym, gdyż przy n nieparzystym łatwiej obliczyć całkę sposobem podanym w zadaniu 18.6.

Zadanie 18.5. Obliczyć całkę $\int \sin^6 x \, dx$.

Rozwiązanie. Mamy tu całkę jak we wzorze (18.1.3), przy czym wykładnik n jest parzysty. Stosując ten wzór redukcyjny otrzymujemy kolejno:

$$I_6 = -\tfrac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \tfrac{5}{6} I_4, \qquad I_4 = -\tfrac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \tfrac{3}{4} I_2,$$

a na podstawie wzoru (18.1.2) mamy (bez stałej całkowania):

$$I_2 = \int \sin^2 x \, dx = \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{4} \sin 2x.$$

Podstawiając otrzymujemy kolejno:

$$I_4 = -\tfrac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \tfrac{3}{8} x - \tfrac{3}{16} \sin 2x,$$

$$I_6 = -\tfrac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \tfrac{5}{24} \sin^3 x \cos x + \tfrac{5}{16} x - \tfrac{5}{32} \sin 2x.$$

Po uporządkowaniu i wprowadzeniu stałej całkowania mamy

$$\int \sin^6 x \, dx = -\tfrac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \tfrac{5}{24} \sin^3 x \cos x - \tfrac{5}{16} \sin x \cos x + \tfrac{5}{16} x + C.$$

Zadanie 18.6. Obliczyć całkę $\int \sin^7 x \, dx$.

Rozwiązanie. Mamy tu całkę tego typu, co w zadaniu 18.4, przy czym wykładnik n jest nieparzysty. W takim przypadku wygodniej jest, zamiast używać wzoru redukcyjnego, zrobić podstawienie $\cos x = t$. W tym celu przekształcamy funkcję podcałkową

$$\int \sin^7 x \, dx = \int \sin^6 x \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x)^3 \sin x \, dx.$$

Wykonujemy podstawienie $\cos x = t$, skąd $-\sin x \, dx = dt$. Otrzymujemy

$$\int \sin^7 x \, dx = -\int (1-t^2)^3 \, dt = -\int (1-3t^2+3t^4-t^6) \, dt = -t + t^3 - \tfrac{3}{5} t^5 + \tfrac{1}{7} t^7 + C.$$

Wracając do dawnej zmiennej mamy ostatecznie

$$\int \sin^7 x\,dx = -\cos x + \cos^3 x - \tfrac{3}{5}\cos^5 x + \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C.$$

ZADANIE 18.7. Obliczyć całkę $\int \cos^n x\,dx$.

Rozwiązanie. Jest to całka podobna do całki z zadania 18.4. Na podstawie wzoru $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi + x)$ mamy

$$\int \cos^n x\,dx = \int \sin^n(\tfrac{1}{2}\pi + x)\,dx.$$

Wykonujemy teraz podstawienie $\frac{1}{2}\pi + x = u$, skąd $dx = du$. W ten sposób otrzymujemy

$$\int \cos^n x\,dx = \int \sin^n u\,du,$$

gdzie $u = \frac{1}{2}\pi + x$. Metodę rozwiązywania ostatniej całki podaliśmy w zadaniu 18.4.

ZADANIE 18.8. Obliczyć całkę $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx$.

Rozwiązanie. Mamy tu całkę typu $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$, gdzie n i m są to liczby naturalne, przy czym chociaż jeden z wykładników n lub m jest nieparzysty. Wówczas postępujemy w następujący sposób:

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x\,dx = \int \sin^4 x(1 - \sin^2 x)\cos x\,dx.$$

Wykonujemy podstawienie $\sin x = t$, skąd $\cos x\,dx = dt$. Otrzymujemy

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx = \int t^4(1-t^2)\,dt = \int (t^4 - t^6)\,dt = \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{7}t^7 + C.$$

Podstawiając $t = \sin x$ mamy ostatecznie

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx = \tfrac{1}{5}\sin^5 x - \tfrac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

ZADANIE 18.9. Obliczyć całkę $\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$.

Rozwiązanie. Mamy tu znowu całkę typu $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$, ale oba wykładniki n i m są parzyste. Postępujemy w następujący sposób:

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx = \int \sin^4 x(1 - \sin^2 x)\,dx = \int \sin^4 x\,dx - \int \sin^6 x\,dx.$$

Otrzymaliśmy dwie całki obliczone w zadaniu 18.5. Po podstawieniu mamy ostatecznie

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{6}\sin^5 x \cos x - \tfrac{1}{24}\sin^3 x \cos x - \tfrac{1}{16}\sin x \cos x + \tfrac{1}{16}x + C.$$

ZADANIE 18.10. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\sin x \neq 0$. Korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta przekształcamy funkcję podcałkową:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \int \frac{dx}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x\cos^2\frac{1}{2}x}.$$

Wykonując podstawienie $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x=u$(1), skąd $\dfrac{dx}{2\cos^2\frac{1}{2}}=du$, otrzymujemy

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C.$$

I ostatecznie

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\right|+C. \tag{18.1.4}$$

Zauważmy przy tym, że jeśli $\sin x\neq 0$, to funkcja $\ln|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x|$ istnieje.

Zadanie 18.11. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{\cos x}.$$

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\cos x\neq 0$. Na podstawie wzoru $\cos x=\sin(\frac{1}{2}\pi+x)$ całkę tę sprowadzamy do całki rozwiązanej w poprzednim zadaniu

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin(\frac{1}{2}\pi+x)}.$$

Wykonujemy podstawienie $\frac{1}{2}\pi+x=u$, skąd $dx=du$. Mamy

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u\right|+C.$$

Podstawiając $u=\frac{1}{2}\pi+x$ otrzymujemy ostatecznie

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)\right|+C. \tag{18.1.5}$$

Zadanie 18.12. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos x}.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $\cos x\neq 0$ i $\sin x\neq 0$. Sprowadzamy całkę do wzoru (18.1.4):

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=2\int\frac{dx}{\sin 2x}.$$

Podstawiamy $2x=u$, skąd $2dx=du$, i otrzymujemy

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}x\right|+C.$$

---

(1) Patrz ogólna metoda, str. 359.

Zadanie 18.13. Obliczyć całkę $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\cos x \neq 0$. Przekształcamy funkcję podcałkową

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx.$$

W otrzymanej całce licznik funkcji podcałkowej jest pochodną mianownika, a więc na podstawie wzoru (16.2.2) otrzymujemy

(18.1.6)
$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C.$$

Zauważmy, że jeżeli $\cos x \neq 0$, to funkcja $\ln|\cos x|$ istnieje.

Zadanie 18.14. Obliczyć całkę $\int \operatorname{ctg} x\, dx$.

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\sin x \neq 0$. Zupełnie podobnie jak w poprzednim zadaniu, otrzymujemy wzór

(18.1.7)
$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C.$$

Zadanie 18.15. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$. Korzystając ze wzoru $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

i ostatecznie

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Zadanie 18.16. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}.$$

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$. Stosujemy, podobnie jak w zadaniu poprzednim, wzór $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ i otrzymujemy

(1)
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx.$$

Pierwszą całkę mamy obliczoną we wzorze (18.1.5):

(2)
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x\right)\right|.$$

Dla obliczenia drugiej całki wykonujemy podstawienie $\sin x = t$ skąd $\cos x\, dx = dt$. Mamy

$$(3) \qquad \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\sin x}.$$

Uwzględniając wartości (2) i (3) otrzymujemy ostatecznie

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x\right)\right| - \frac{1}{\sin x} + C.$$

Zauważmy, że jeżeli $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$, to funkcja po prawej stronie równości istnieje.

ZADANIE 18.17. Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}.$$

Rozwiązanie. Mamy znowu całkę typu

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x},$$

gdzie n i m są liczbami naturalnymi. Zastrzegamy, że $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$. Korzystając ze wzoru $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ otrzymujemy rozkład danej całki na dwie całki prostsze

$$(1) \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^3 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}.$$

Druga całka obliczona została w zadaniu poprzednim. Zajmiemy się przeto pierwszą całką:

$$(2) \qquad \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Drugą z tych całek podaje wzór (18.1.5). Bierzemy więc pod uwagę całkę

$$(3) \qquad \int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^3 x} = \int \sin x \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx.$$

Stosujemy całkowanie przez części

$$u = \sin x, \quad dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx, \qquad \text{skąd} \qquad du = \cos x\, dx, \quad v = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx.$$

Aby obliczyć całkę v, wykonujemy podstawienie $\cos x = t$, skąd $-\sin x\, dx = dt$. Otrzymujemy

$$v = -\int \frac{dt}{t^3} = -\int t^{-3} dt = \frac{-t^{-2}}{-2} = \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2\cos^2 x}.$$

Wracając do całki (3) i stosując wzór na całkowanie przez części otrzymujemy

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \int \frac{1}{2\cos^2 x} \cos x dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Wracając z kolei do całki (2) otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \tfrac{1}{2} \ln |\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x)|.$$

Wstawiając tę wartość całki do równości (1) i korzystając z wyniku zadania poprzedniego otrzymujemy ostatecznie

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{\sin x} + \tfrac{3}{2} \ln |\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x)| + C.$$

Zauważmy, że jeżeli $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$, to funkcja po prawej stronie istnieje.

ZADANIE 18.18. Obliczyć całkę $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\cos x \neq 0$. Weźmy pod uwagę wzór

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{skąd} \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Podstawiając i wykonując całkowanie otrzymujemy

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + C. \tag{18.1.8}$$

ZADANIE 18.19. Obliczyć całkę $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$.

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\sin x \neq 0$. Stosujemy wzór

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \text{skąd} \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

i otrzymujemy

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x - x + C. \tag{18.1.9}$$

Zadanie można też rozwiązać stosując wzór $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - x)$ i sprowadzając zadanie do zadania 18.18 (por. zad. 18.21).

ZADANIE 18.20. Obliczyć całkę $U_n = \int \operatorname{tg}^n x\, dx$, gdzie n jest liczbą naturalną większą niż 2.

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\cos x \neq 0$. Ze wzoru $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ mamy

$$U_n = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx.$$

Stąd otrzymujemy

$$(1) \qquad U_n = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} - U_{n-2}.$$

Wykonujemy podstawienie $\operatorname{tg} x = t$, skąd $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt$. Otrzymujemy

$$\int \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^{n-2} dt = \frac{1}{n-1} t^{n-1} = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x.$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (1) otrzymujemy wzór redukcyjny:

$$(18.1.10) \qquad U_n = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - U_{n-2}, \quad \text{gdzie} \quad U_n = \int \operatorname{tg}^n x dx.$$

ZADANIE 18.21. Obliczyć całkę $V_n = \int \operatorname{ctg}^n x\, dx$, gdzie n jest liczbą naturalną większą niż 2.

Rozwiązanie. Zastępując w poprzednim wzorze x przez $\frac{1}{2}\pi - x$, a U_n i U_{n-2} przez V_n i V_{n-2} i zmieniając po obu stronach znaki otrzymujemy wzór redukcyjny

$$(18.1.11) \qquad V_n = \frac{-1}{n-1} \operatorname{ctg}^{n-1} x - V_{n-2}, \quad \text{gdzie} \quad V_n = \int \operatorname{ctg}^n x dx.$$

ZADANIE 18.22. Obliczyć całkę $\int \operatorname{tg}^6 x\, dx$.

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\cos x \neq 0$. Stosujemy wzór redukcyjny (18.1.10):

$$U_6 = \tfrac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x - U_4, \qquad U_4 = \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - U_2.$$

Na podstawie wzoru (18.1.8) mamy

$$U_2 = \int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x.$$

Podstawiając powyższe kolejno do U_4 otrzymujemy

$$U_4 = \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x,$$

a następnie na podstawie wzoru na U_6 otrzymujemy

$$\int \operatorname{tg}^6 x dx = \tfrac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x - \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x + C.$$

ZADANIE 18.23. Obliczyć całkę $\int \operatorname{ctg}^5 x\, dx$.

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\sin x \neq 0$. Stosujemy wzór redukcyjny (18.1.11):

$$V_5 = -\tfrac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x - V_3, \qquad V_3 = -\tfrac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - V_1.$$

Na podstawie wzoru (18.1.7) mamy

$$V_1 = \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x|.$$

Po podstawieniach i uproszczeniach otrzymujemy

$$\int \operatorname{ctg}^5 x dx = -\tfrac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x + \tfrac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln|\sin x| + C.$$

§ 18.2. OGÓLNE METODY SPROWADZANIA CAŁEK TRYGONOMETRYCZNYCH DO CAŁEK FUNKCJI WYMIERNYCH

A. Rozważmy całkę typu

$$\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)\,dx, \tag{18.2.1}$$

gdzie symbol $R(u, v, w)$ oznacza funkcję wymierną względem zmiennych u, v i w. Aby obliczyć całkę tego typu, wykonujemy podstawienie

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = u, \quad \text{skąd} \quad x = 2\operatorname{arctg} u, \; dx = \frac{2du}{1+u^2}.$$

Znane są wzory trygonometryczne wyrażające w sposób wymierny funkcje danego kąta przez tangens połowy kąta:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}.$$

Korzystając z tych wzorów mamy

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2u}{1-u^2}.$$

W ten sposób całka przekształci się z całki trygonometrycznej na całkę funkcii wymiernej zmiennej u:

$$\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)\,dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1-u^2}\right)\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du. \tag{18.2.2}$$

ZADANIE 18.24. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{2+\cos x}.$$

Rozwiązanie. Mianownik nie przybiera wartości zerowej. Stosujemy podane powyżej podstawienie $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = u$. Otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\dfrac{2du}{1+u^2}}{2+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}} = 2\int \frac{du}{u^2+3}.$$

Otrzymaliśmy całkę funkcji wymiernej. Podstawiamy $u=\sqrt{3}v$, skąd $du=\sqrt{3}\,dv$. Otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = 2\int \frac{\sqrt{3}\,dv}{3v^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dv}{v^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} v = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}}$$

i ostatecznie

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\right) + C.$$

ZADANIE 18.25. Obliczyć całkę

$$I=\int \frac{2+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $\sin x\neq 0$; wtedy także $1+\cos x\neq 0$. Doprowadzamy zadanie do całki funkcji wymiernej za pomocą podstawienia $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x=u$. Stosując wzory jak poprzednio otrzymujemy po uproszczeniu:

$$\int \frac{2+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx=\int \frac{u^2+u+1}{u}\,du=\int\left(u+1+\frac{1}{u}\right)du=$$
$$=\tfrac{1}{2}u^2+u+\ln|u|+C$$

i ostatecznie

$$I=\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}x+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x+\ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\right|+C.$$

Jeżeli $\sin x\neq 0$, to całka powyższa istnieje.

B. Rozważmy całkę typu

(18.2.3) $$\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x)\,dx,$$

gdzie symbol $R(u,v,w)$ oznacza funkcję wymierną względem zmiennych u, v i w. Można tu zastosować poprzednią metodę, ale rachunki upraszczają się znacznie przy podstawieniu

$$\operatorname{tg}x=t,\quad \text{skąd}\quad x=\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Ze wzorów trygonometrycznych

$$\sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},\qquad \sin x\cos x=\frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x},\qquad \cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

otrzymujemy

$$\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\qquad \sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2},\qquad \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$$

i po podstawieniu otrzymujemy całkę

(18.2.4) $$\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x)\,dx=\int R\left(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2},\frac{t}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt,$$

tj. całkę funkcji wymiernej zmiennej t.

ZADANIE 18.26. Obliczyć całkę

$$I=\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}.$$

Rozwiązanie. Wykonując podstawienie $\operatorname{tg} x = t$ otrzymujemy

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+3},$$

stąd (patrz zad. 18.24):

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C.$$

Przyjmując $t = \operatorname{tg} x$ otrzymujemy ostatecznie

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x\right) + C.$$

Zadanie 18.27. Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{1+\sin x \cos x}{(2+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}\, dx.$$

Rozwiązanie. Podobnie jak w poprzednim zadaniu podstawiamy $\operatorname{tg} x = t$ i otrzymujemy

$$I = \int \frac{1+\frac{t}{1+t^2}}{\left(2+\frac{1}{1+t^2}\right)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Stąd po uproszczeniu

$$I = \int \frac{t^2+t+1}{(2t^2+3)(2t^2+1)}\, dt.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste

$$\frac{t^2+t+1}{(2t^2+3)(2t^2+1)} \equiv \frac{At+B}{2t^2+3} + \frac{Ct+D}{2t^2+1}.$$

Łatwy rachunek daje: $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{4}$. Mamy więc

$$\frac{t^2+t+1}{(2t^2+3)(2t^2+1)} \equiv \frac{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}}{2t^2+3} + \frac{\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}}{2t^2+1}.$$

Mamy do obliczenia całki

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{2t^2+3} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{2t^2+3} + \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{2t^2+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{2t^2+1}.$$

Pierwsza całka daje $-\frac{1}{8}\ln(2t^2+3)$. Drugą całkę łatwo obliczymy wykonując podstawienie $t=\sqrt{\frac{3}{2}}u$; otrzymujemy

$$\frac{1}{4}\int\frac{dt}{2t^2+3}=\frac{1}{12}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\operatorname{arctg}u=\frac{1}{4\sqrt{6}}\operatorname{arctg}(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,t)\,.$$

Trzecia całka daje $\frac{1}{8}\ln(2t^2+1)$. Wreszcie czwarta całka (po podstawieniu $t=\frac{1}{2}u\sqrt{2}$) daje

$$\frac{1}{4}\int\frac{dt}{2t^2+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,t)\,.$$

Podstawiając obliczone wartości całek i przyjmując z powrotem $t=\operatorname{tg}x$ otrzymujemy ostatecznie

$$I=\frac{1}{8}\ln\frac{2\operatorname{tg}^2x+1}{2\operatorname{tg}^2x+3}+\frac{1}{4\sqrt{6}}\operatorname{arctg}(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\operatorname{tg}x)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C\,.$$

ZADANIE 18.28. Obliczyć całkę $\int\frac{x\,dx}{\cos^2x}$.

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\cos x\neq 0$. Całkujemy przez części przyjmując

$$u=x,\quad dv=\frac{dx}{\cos^2x},\qquad \text{skąd}\qquad du=dx,\quad v=\int\frac{dx}{\cos^2x}=\operatorname{tg}x\,.$$

Otrzymujemy

$$\int\frac{x\,dx}{\cos^2x}=x\operatorname{tg}x-\int\operatorname{tg}x\,dx\,.$$

Po uwzględnieniu wzoru (18.1.6) mamy

$$\int\frac{x\,dx}{\cos^2x}=x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C\,.$$

Jeżeli $\cos x\neq 0$, to całka powyższa istnieje.

ZADANIE 18.29. Obliczyć całkę $\int x\operatorname{tg}^2x\,dx$.

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $\cos x\neq 0$. Opierając się na wzorze

$$\operatorname{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2x}-1$$

otrzymujemy

$$\int x\operatorname{tg}^2x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)x\,dx=\int\frac{x\,dx}{\cos^2x}-\int x\,dx\,;$$

i na podstawie poprzedniego zadania mamy ostatecznie

$$\int x\operatorname{tg}^2x\,dx=x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|-\tfrac{1}{2}x^2+C\,.$$

Jeżeli $\cos x\neq 0$, to całka powyższa istnieje.

Zadania

Obliczyć całki (zad. 18.30 - 18.87):

18.30. $\int \cos 5x \cos 7x\, dx$.

18.31. $\int \sin 3x \cos 2x\, dx$.

18.32. $\int \cos 2x \cos 3x\, dx$.

18.33. $\int \sin x \cos 3x\, dx$.

18.34. $\int \cos 2x \sin 4x\, dx$.

18.35. $\int \sin 2x \sin 5x\, dx$.

18.36. $\int \cos x \cos 3x\, dx$.

18.37. $\int \sin 3x \sin x\, dx$.

18.38. $\int \sin 5x \sin 2x\, dx$.

18.39. $\int \sin^3 x\, dx$.

18.40. $\int \sin^4 x\, dx$.

18.41. $\int \cos^4 x\, dx$.

18.42. $\int \cos^5 x\, dx$.

18.43. $\int \sin^5 x\, dx$.

18.44. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$.

18.45. $\int \operatorname{ctg}^4 x\, dx$.

18.46. $\int \operatorname{ctg}^6 x\, dx$.

18.47. $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$.

18.48. $\int \sin^7 x \cos^6 x\, dx$.

18.49. $\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx$.

18.50. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

18.51. $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$.

18.52. $\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx$.

18.53. $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^8 x}$.

18.54. $\int \sin x \operatorname{tg} x\, dx$.

18.55. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\, dx$.

18.56. $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{1+2\cos x}}$.

18.57. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$.

18.58. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx$.

18.59. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$.

18.60. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx$.

18.61. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x}\, dx$.

18.62. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

18.63. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

18.64. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

18.65. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^5 x}$.

18.66. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^7 x}$.

18.67. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

18.68. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$.

18.69. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$.

18.70. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

18.71. $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\, dx$.

18.72. $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x\, dx}{\cos x}$.

18.73. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x\, dx}{\sin^3 x}$.

18.74. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^8 x}$.

18.75. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x\, dx}{\cos^3 x}$.

18.76. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\cos x}$.

18.77. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

18.78. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

18.79. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x\, dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

18.80. $\displaystyle\int \frac{3+\sin^2 x}{2\cos^2 x-\cos^4 x}\, dx$.

18.81. $\displaystyle\int \frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x)^2}\, dx$.

18.82. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\, dx$.

18.83. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\, dx$.

18.84. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x+3\cos^2 x)^2}$.

18.85. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\, dx$.

18.86. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

18.87. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}$.

§ 18.3. CAŁKI FUNKCJI CYKLOMETRYCZNYCH (KOŁOWYCH)

ZADANIE 18.88. Obliczyć całkę $\int \arcsin x\, dx$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $-1<x<1$. Całkujemy przez części przyjmując

$$u=\arcsin x, \quad dv=dx, \quad \text{skąd} \quad du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v=\int dx=x.$$

Otrzymujemy

$$\int \arcsin x\, dx = x\arcsin x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1}$$

Całkę tę obliczamy podstawiając $\sqrt{1-x^2}=t$, czyli $1-x^2=t^2$, skąd różniczkując mamy

$-2x\,dx=2t\,dt$, czyli $x\,dx=-t\,dt$. Jest więc

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1\;\;x^2}}=-\int \frac{t\,dt}{t}=-\int dt=-t=-\sqrt{1-x^2}\,.$$

Ostatecznie na podstawie (1) mamy

$$\int \arcsin x\,dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\,.$$

ZADANIE 18.89. Obliczyć całkę $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$.

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując

$$u=\operatorname{arctg} x\,,\qquad dv=x\,dx\,,\qquad \text{skąd}\qquad du=\frac{dx}{1+x^2}\,,\qquad v=\int x\,dx=\tfrac{1}{2}x^2\,.$$

Mamy więc

$$\int x\operatorname{arctg} x\,dx=\tfrac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x-\tfrac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx\,.$$

Obliczamy ostatnią całkę

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx=\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx=\int dx-\int \frac{dx}{1+x^2}=x-\operatorname{arctg} x\,.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int x\operatorname{arctg} x\,dx=\tfrac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x-\tfrac{1}{2}x+C\,.$$

ZADANIE 18.90. Obliczyć całkę $\int (\arcsin x)^2dx$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $-1\leqslant x\leqslant 1$. Wykonujemy podstawienie $\arcsin x=t$, gdzie $-\frac{1}{2}\pi\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\pi$. Mamy $x=\sin t$, skąd $dx=\cos t\,dt$. Po podstawieniu otrzymujemy

(1) $$\int (\arcsin x)^2\,dx=\int t^2\cos t\,dt\,.$$

Stosujemy wzór na całkowanie przez części przyjmując

$$u=t^2\,,\quad dv=\cos t\,dt\,,\qquad \text{skąd}\qquad du=2t\,dt\,,\quad v=\int \cos t\,dt=\sin t\,.$$

Jest więc

(2) $$\int t^2\cos t\,dt=t^2\sin t-2\int t\sin t\,dt\,.$$

Ostatnia całka, obliczona w zadaniu 15.16 (str. 300) daje

$$\int t\sin t\,dt=-t\cos t+\sin t\,.$$

Podstawiając otrzymaną wartość do (2) otrzymujemy

$$\int t^2\cos t\,dt=t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t\,.$$

Zauważmy, że $-\frac{1}{2}\pi \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi$, a więc $\cos t \geqslant 0$. Wracając do (1) i podstawiając z powrotem

$$t = \arcsin x, \quad \sin t = x, \quad \cos t = \sqrt{1-x^2}$$

otrzymujemy

$$\int (\arcsin x)^2\, dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C\,.$$

Zadania

Obliczyć całki (zad. 18.91-18.112);

18.91. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x\, dx.$

18.92. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\, dx.$

18.93. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x\, dx.$

18.94. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+9x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} 3x}}.$

18.95. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+4x^2)(\operatorname{arcctg} 2x)^2}.$

18.96. $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{x^2+1}\, dx.$

18.97. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}.$

18.98. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}.$

18.99. $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arctg} x\, dx}{(1+x^2)^2}.$

18.100. $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x\, dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

18.101. $\displaystyle\int x \arcsin x\, dx.$

18.102. $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arctg} x\, dx}{(x^2-1)^2}.$

18.103. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx.$

18.104. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x}(1+e^x)}\, dx.$

18.105. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x\, dx}{x^2}.$

18.106. $\displaystyle\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\, dx.$

18.107. $\displaystyle\int x^3 \operatorname{arctg} x\, dx.$

18.108. $\displaystyle\int (2x+3)\arccos(2x-3)\, dx.$

18.109. $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$

18.110. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\, dx.$

18.111. $\displaystyle\int x(1+x^2)\operatorname{arctg} x\, dx.$

18.112. $\displaystyle\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\, dx.$

§ 18.4. CAŁKI FUNKCJI WYKŁADNICZYCH I LOGARYTMICZNYCH

Całki typu $R(e^x)$, gdzie $R(v)$ oznacza funkcję wymierną zmiennej v, obliczamy podstawiając

$$e^x = t \quad (t>0,\, t\neq 1), \qquad \text{skąd} \qquad x=\ln t,\ dx=\frac{dt}{t}.$$

ZADANIE 18.113. Obliczyć całkę

$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx.$$

Rozwiązanie. Zastrzegamy, że $x\neq 0$. Wykonujemy podstawienie $e^x=t$, gdzie $t>0$; otrzymujemy

$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx=\int \frac{t+1}{(t-1)t}\,dt.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych

$$\frac{t+1}{(t-1)t}\equiv\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t}.$$

Stąd $t+1\equiv At+Bt-B$ i po obliczeniu mamy $A=2$, $B=-1$. Jest więc

$$\frac{t+1}{t(t-1)}\equiv\frac{2}{t-1}-\frac{1}{t}.$$

Całkujemy

$$\int \frac{(t+1)\,dt}{t(t-1)}=2\ln|t-1|-\ln t.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx=2\ln|e^x-1|-x+C \qquad (x\neq 0).$$

ZADANIE 18.114. Obliczyć całkę

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^x+e^{-x}}.$$

Rozwiązanie. Wykonujemy podstawienie $e^x=u$, gdzie $u>0$. Mamy $e^x dx=du$ i po podstawieniu otrzymujemy

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^x+e^{-x}}=\int \frac{du}{u+\dfrac{1}{u}}=\int \frac{u\,du}{u^2+1}=\tfrac{1}{2}\ln(u^2+1)+C=\tfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C.$$

ZADANIE 18.115. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{a^x+1} \quad (a>0, \ a\neq 1).$$

Rozwiązanie. Podstawiamy $a^x=t$, gdzie $t>0$. Otrzymujemy

$$x \ln a = \ln t, \quad \text{skąd} \quad \ln a\, dx = \frac{dt}{t}, \text{ czyli } dx = \frac{dt}{t \ln a}.$$

Otrzymujemy całkę funkcji wymiernej

$$\int \frac{dx}{a^x+1} = \int \frac{dt}{(t+1)\, t \ln a} = \frac{1}{\ln a} \int \frac{dt}{t\,(t+1)}.$$

Po rozłożeniu funkcji podcałkowej na ułamki proste otrzymujemy

$$\frac{1}{t\,(t+1)} \equiv \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

i po scałkowaniu mamy

$$\int \frac{dt}{t\,(t+1)} = \ln t - \ln (t+1).$$

Podstawiając z powrotem $t=a^x$ mamy

$$\int \frac{dx}{a^x+1} = \frac{1}{\ln a} (\ln a^x - \ln (a^x+1)).$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{a^x+1} = x - \frac{\ln (a^x+1)}{\ln a} + C.$$

ZADANIE 18.116. Obliczyć całkę $\int \log_p x\, dx$ $(p>1$ i $p\neq 1)$.

Rozwiązanie. Przyjmujemy, że $x>0$. Chcemy wyrazić $\log_p x$ przez $\ln x$, czyli przez $\log_e x$. Z definicji logarytmu mamy

$$p^{\log_p x} = x.$$

Logarytmując obie strony przy podstawie e otrzymujemy $\log_p x \ln p = \ln x$, skąd

(1)
$$\log_p x = \frac{1}{\ln p} \ln x.$$

Mamy więc obliczyć całkę

$$\int \log_p x\, dx = \frac{1}{\ln p} \int \ln x\, dx.$$

W zadaniu 15.18 (str. 301) obliczyliśmy całkę $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1)$. Ostatecznie mamy

(2) $$\int \log_p x\, dx = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln p} + C.$$

Uwaga. Czasem może być wygodny wzór zamienny

(3) $$\log_p e = \frac{1}{\ln p}.$$

Wzór ten otrzymujemy ze wzoru (1) przyjmując $x = e$. Wzór (2) można napisać w postaci

$$\int \log_p x\, dx = x\left(\frac{\ln x}{\ln p} - \frac{1}{\ln p}\right) + C$$

i na podstawie wzorów (1) i (3) doprowadzić do postaci

$$\int \log_p x\, dx = x(\log_p x - \log_p e) + C.$$

ZADANIE 18.117. Obliczyć całkę

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx \quad (x>0).$$

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując

$$u = (\ln x)^2,\ dv = \frac{dx}{x^2}, \quad \text{skąd} \quad du = \frac{2\ln x}{x}\, dx,\ v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Otrzymujemy

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = -\frac{(\ln x)^2}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Ostatnią całkę całkujemy przez części przyjmując

$$u = \ln x,\ dv = \frac{dx}{x^2}, \quad \text{skąd} \quad du = \frac{dx}{x},\ v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Otrzymujemy

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

i ostatecznie wracając do pierwotnej całki i porządkując mamy

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = -\frac{1}{x}\left((\ln x)^2 + 2\ln x + 2\right) + C \quad (x>0).$$

Zadania

Obliczyć całki (zad. 18.118 - 18.144):

18.118. $\int (e^{3x} + \sqrt{e^x})\, dx$.

18.119. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$.

18.120. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-1}$.

18.121. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$.

18.122. $\int \sqrt{e^x+1}\,dx$.

18.123. $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$.

18.124. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3+2e^x}}$.

18.125. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$.

18.126. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-1)^2}\,dx$.

18.127. $\int (e^x+e^{-x})^2\,dx$.

18.128. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+5}\,dx$.

18.129. $\displaystyle\int \frac{4e^x+6e^{-x}}{9e^x-4e^{-x}}\,dx$.

18.130. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{2x}}$.

18.131. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x+a)^n}\,dx$.

18.132. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{3-5e^{2x}}}$.

18.133. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.

18.134. $\int x^3 e^{-x}\,dx$.

18.135. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$.

18.136. $\int \ln(x^2+1)\,dx$.

18.137. $\int (\ln|x|)^2\,dx$.

18.138. $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx$.

18.139. $\int \ln|2+5x|\,dx$.

18.140. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+\ln^2|x|)}$.

18.141. $\int x^{-2}\ln|x|\,dx$.

18.142. $\int (4+3x)^2\ln|x|\,dx$.

18.143. $\int x^3\ln(x^2+3)\,dx$.

18.144. $\int xa^x\,dx,\ a>1$.

Rozdział XIX

CAŁKI OZNACZONE

§ 19.1. UWAGI OGÓLNE

Weźmy pod uwagę funkcję $f(x)$, o której stale będziemy zakładali, że jest ograniczona w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, tzn. dla $a \leqslant x \leqslant b$.

Dokonajmy różnych podziałów $P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$ przedziału $\langle a, b\rangle$ na części. Niechaj podział P_m będzie osiągnięty przy pomocy $n_m - 1$ liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{n_m-1}$, przy czym

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_m-1} < x_{n_m} = b,$$

gdzie dla ułatwienia oznaczyliśmy liczbę a jako x_0, a liczbę b jako x_{n_m}. Będziemy nazywali przedziały $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n_m$, przedziałami cząstkowymi podziału P_m, a długości ich $x_i - x_{i-1}$ oznaczali przez Δx_i. Niech δ_m oznacza największą z liczb Δx_i, czyli długość najdłuższego przedziału cząstkowego podziału P_m. Ciąg podziałów $\{P_m\}$ nazywamy *normalnym ciągiem podziałów*, jeżeli $\lim\limits_{m\to\infty} \delta_m = 0$.

Utwórzmy sumę S_m iloczynów wartości funkcji $f(c_i)$ w dowolnym punkcie c_i przedziału $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ przez długości Δx_i tych przedziałów przy podziale P_m:

$$S_m = \sum_{i=1}^{n_m} f(c_i)\,\Delta x_i . \tag{19.1.1}$$

Jeżeli ciąg $\{S_m\}$ dla $m \to \infty$ jest zbieżny i do tej samej granicy przy każdym normalnym ciągu podziałów $\{P_m\}$ niezależnie od wyboru punktów c_i, to funkcję $f(x)$ nazywamy *funkcją całkowalną* w przedziale $\langle a, b\rangle$, a granicę ciągu (19.1.1) nazywamy *całką oznaczoną* funkcji $f(x)$ w granicach od a do b i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx . \tag{19.1.2}$$

Można wykazać, że *jeżeli przy jakimś ciągu normalnym podziałów ciąg $\{S_m\}$ ma granicę niezależną od wyboru punktów c_i, to funkcja $f(x)$ jest całkowalna.*

Jednym z prostych sposobów tworzenia ciągu normalnego podziałów jest kolejne przepoławianie przedziałów cząstkowych; wówczas

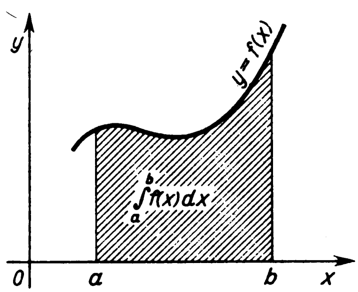
$$n_m = 2^m, \qquad \Delta x_i = \frac{b-a}{2^m} = \delta_m .$$

Można wykazać, że *funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest całkowalna* a nawet ogólniej, że *funkcja ograniczona w przedziale domkniętym oraz ciągła w nim z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów jest całkowalna.*

§ 19.2. INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA CAŁKI OZNACZONEJ

Jeżeli w przedziale $\langle a, b\rangle$ jest $f(x)\geqslant 0$, to *pole obszaru* ograniczonego łukiem krzywej $y=f(x)$, odcinkiem osi Ox oraz prostymi $x=a$ i $x=b$ (rys. 19.1) równa się całce oznaczonej

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$



Rys. 19.1

Jeżeli zaś w przedziale $\langle a, b\rangle$ jest $f(x)\leqslant 0$, to analogiczne pole równa się

$$-\int_a^b f(x)\,dx.$$

Zawsze więc pole wyżej określonego obszaru można wyrazić całką oznaczoną

$$\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Przez $\int_a^b f(x)\,dx$, gdzie $a>b$, rozumiemy całkę $-\int_b^a f(x)\,dx$. Przyjmujemy również, że

$$\int_a^a f(x)\,dx=0.$$

§ 19.3. WŁASNOŚCI CAŁKI OZNACZONEJ

Jeżeli $a\leqslant b\leqslant c$, *to*

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\,; \tag{19.3.1}$$

jest to tzw. *addytywność całek oznaczonych względem przedziału całkowania.*

Uwzględniając definicje podane § 19.2 łatwo stwierdzić, że wzór (19.3.1) jest prawdziwy przy dowolnym układzie liczb a, b, c, tak więc założenie $a\leqslant b\leqslant c$ możemy opuścić.

Stały czynnik można wyłączyć przed znak całki oznaczonej:

$$\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{19.3.2}$$

Całka sumy równa się sumie całek, tzn.

(19.3.3) $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx;$$

jest to tzw. *addytywność całki względem funkcji podcałkowej.*

Całka oznaczona posiada więc własność tzw. *liniowości* (własności druga i trzecia). Wzory powyższe należy rozumieć w ten sposób, że z istnienia całek po prawej stronie wynika istnienie całki po lewej stronie oraz podana równość.

Prawdziwy jest również następujący wzór:

(19.3.4) $$\int_a^b f(x)\,dx=K\,(b-a),$$

gdzie K jest pewną liczbą spełniającą nierówność $m\leqslant K\leqslant M$, przy czym m oznacza kres dolny, a M — kres górny funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Na podstawie znanej własności Darboux mówiącej, że funkcja ciągła przybiera wszystkie wartości pośrednie pomiędzy swymi kresami górnym i dolnym, wzór powyższy możemy napisać w postaci

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)\,(b-a),$$

gdzie c jest pewną liczbą spełniającą nierówność $a\leqslant c\leqslant b$, jeżeli funkcja podcałkowa $f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$.

(19.3.5) CAŁKA JAKO FUNKCJA GÓRNEJ GRANICY. *Jeżeli funkcja $f(t)$ jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$, to funkcja*

$$h(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

jest ciągła i różniczkowalna względem zmiennej x w przedziale $\langle a, b\rangle$ i w każdym punkcie tego przedziału zachodzi związek $h'(x)=f(x)$.

(19.3.6) ZWIĄZEK MIĘDZY CAŁKĄ OZNACZONĄ A NIEOZNACZONĄ. *Jeżeli przez $F(x)$ oznaczymy funkcję pierwotną funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale $\langle a, b\rangle$, tzn. jeżeli $F'(x)=$ $=f(x)$, to ma miejsce wzór*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

przy czym oczywiście różnica $F(b)-F(a)$ nie zależy od stałej całkowania C.

Uwaga. Prawą stronę powyższego wzoru oznacza się symbolem

$$[F(x)]_a^b \quad \text{lub} \quad F(x)|_a^b.$$

(19.3.7) *Jeżeli u, v są funkcjami zmiennej x mającymi ciągłą pochodną, to*

$$\int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du.$$

Jest to *wzór na całkowanie przez części dla całek oznaczonych.*

(19.3.8) *Jeżeli $g'(x)$ jest funkcją ciągłą, $g(x)$ funkcją rosnącą w przedziale $\langle a, b\rangle$, a $f(u)$ funkcją ciągłą w przedziale $\langle g(a), g(b)\rangle$, to zachodzi następujący wzór*:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du\,.$$

Jest to *wzór na całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych.*

PRZYKŁAD 1. Obliczyć $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\sin x\,dx$.

Rozwiązanie. Stosując wzór na całkowanie przez części otrzymujemy

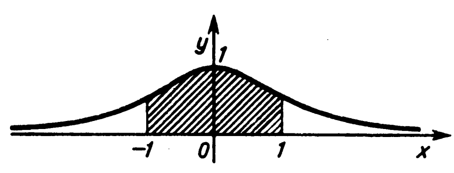
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\sin x\,dx = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\,d(\cos x) = \big[-x\cos x\big]_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos x\,dx = \big[\sin x\big]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1\,.$$

PRZYKŁAD 2. Obliczyć $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\cos x\,dx$.

Rozwiązanie. Stosując wzór na całkowanie przez podstawienie i przyjmując $\sin x = u$ otrzymujemy

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\cos x\,dx = \int_0^1 u^2\,du = \big[\tfrac{1}{3}u^3\big]_0^1 = \tfrac{1}{3}\,.$$

Uwaga. Przykłady 1 i 2 można rozwiązać obliczając najpierw całki nieoznaczone, a następnie korzystając ze związku pomiędzy całką oznaczoną a nieoznaczoną.



Rys. 19.2

ZADANIE 19.1. Obliczyć pole (rys. 19.2) ograniczone odcinkiem osi Ox od $x=-1$ do $x=1$, rzędnymi w tych punktach oraz łukiem linii

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

(por. zad. 10.12, str. 194).

Rozwiązanie. Zauważmy, że przy dowolnym x mamy $y>0$. Wiemy, że

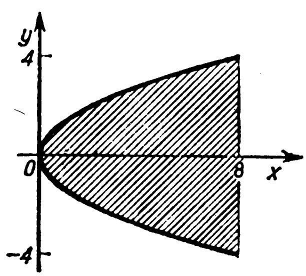
$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\,,$$

a więc poszukiwane pole wyraża się wzorem

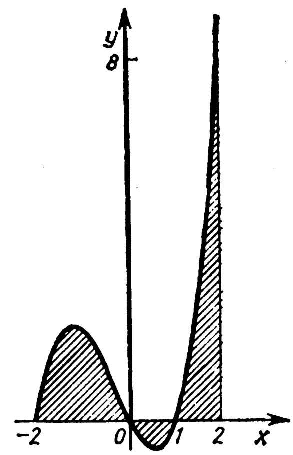
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(+1) - \operatorname{arctg}(-1) = \tfrac{1}{4}\pi - (-\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Zadanie 19.2. Obliczyć pole ograniczone łukiem paraboli $y^2=2x$ oraz prostą $x=8$ (rys. 19.3).

Rozwiązanie. Ze względu na symetrię paraboli $y^2=2x$ względem osi Ox wystarczy obliczyć pole ograniczone osią Ox, prostą $x=8$ i łukiem paraboli w pierwszej ćwiartce i otrzymany wynik podwoić.



Rys. 19.3



Rys. 19.4

Obliczamy całkę oznaczoną

$$P=\int_0^8 \sqrt{2x}\,dx=\sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx=\sqrt{2}\left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^8=\tfrac{2}{3}\sqrt{2}\cdot 8^{\frac{3}{2}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{2}(\sqrt{8})^3=\tfrac{64}{3}.$$

Poszukiwane pole wynosi $\frac{128}{3}$.

Zadanie 19.3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej $y=x^3+x^2-2x$, odcinkiem osi Ox oraz rzędnymi w punktach $x=-2$, $x=2$ (rys. 19.4).

Rozwiązanie. Stosujemy wzór

$$P=\int_{-2}^{2}|x^3+x^2-2x|\,dx.$$

Aby obliczyć wartość całki, musimy znać znaki wartości funkcji $y=x^3+x^2-2x$. W tym celu znajdziemy pierwiastki równania

$$x^3+x^2-2x=0, \quad \text{czyli} \quad x(x^2+x-2)=0.$$

Stąd mamy pierwiastki

$$x=-2, \quad x=0, \quad x=1.$$

Przedział $\langle -2, +2\rangle$ rozbijamy na takie podprzedziały $\langle -2, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 1, 2\rangle$, żeby w każdym z tych podprzedziałów funkcja $y=x^3+x^2-2x$ miała stały znak: w pierwszym i trzecim podprzedziale dodatni, w drugim ujemny. Mamy więc

$$P=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)\,dx-\int_{0}^{1}(x^3+x^2-2x)\,dx+\int_{1}^{2}(x^3+x^2-2x)\,dx.$$

Obliczamy pola w poszczególnych podprzedziałach:

$$\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)\,dx=\left[\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}=0-\left[\tfrac{16}{4}-\tfrac{8}{3}-4\right]=\tfrac{8}{3},$$

$$-\int_{0}^{1}(x^3+x^2-2x)\,dx=-\left[\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{1}=-\left[\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-1\right]=\tfrac{5}{12}.$$

$$\int_{1}^{2}(x^3+x^2-2x)\,dx=\left[\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{1}=\left[\tfrac{16}{4}+\tfrac{8}{3}-4\right]-\left[\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-1\right]=\tfrac{37}{12}.$$

Całe pole wynosi $P=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}+\frac{37}{12}=\frac{37}{6}$.

ZADANIE 19.4. Obliczyć całkę oznaczoną

$$I(\alpha)=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2},\qquad \text{gdzie}\qquad -\pi<\alpha<\pi.$$

Rozwiązanie. Badamy wyróżnik mianownika

$$\Delta=4\cos^2\alpha-4=4(\cos^2\alpha-1)=-4\sin^2\alpha.$$

Widzimy więc, że $\Delta=0$ dla $\alpha=k\pi$, a przy pozostałych wartościach kąta α jest $\Delta<0$.

Przypadek 1: $\alpha=k\pi$. Oznaczając krótko naszą całkę przez I mamy

$$I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+2x+x^2}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{(x+1)^2}=\left[-\frac{1}{x+1}\right]_{0}^{1}=-\tfrac{1}{2}+1=\tfrac{1}{2}.$$

Przypadek 2: $-\pi<\alpha<0$ lub $0<\alpha<\pi$. Funkcja podcałkowa jest wówczas stale dodatnia.

Bierzemy pod uwagę najpierw całkę nieoznaczoną

$$\int\frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}=\int\frac{dx}{(x+\cos\alpha)^2+1-\cos^2\alpha}=\int\frac{dx}{(x+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}.$$

Podstawiamy $x+\cos\alpha=t\sin\alpha$, skąd $dx=\sin\alpha\,dt$. Mamy

$$\int\frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}=\int\frac{\sin\alpha\,dt}{t^2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arctg} t=\frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Obliczamy teraz całkę oznaczoną

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}=\left[\frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]_0^1=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}-\operatorname{arctg}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

Biorąc pod uwagę wzory $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha$ i $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$ otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\alpha)-\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\alpha)\right),$$

gdzie $-\pi<\alpha<0$ lub $0<\alpha<\pi$.

Na mocy definicji funkcja $\operatorname{arctg} x$ przyjmuje wartości z przedziału $-\frac{1}{2}\pi<\operatorname{arctg}x<\frac{1}{2}\pi$. Jeżeli liczba β spełnia warunek $-\frac{1}{2}\pi<\beta<\frac{1}{2}\pi$, to dla tej wartości mamy równość $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\beta)=\beta$. Jeżeli natomiast β nie leży między $-\frac{1}{2}\pi$ i $\frac{1}{2}\pi$, to wzór powyższy nie jest prawdziwy.

Postawmy sobie zadanie: dobrać takie liczby β i γ, żeby było

$$-\tfrac{1}{2}\pi<\beta<\tfrac{1}{2}\pi \text{ i } \operatorname{tg}\beta=\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\alpha, \qquad -\tfrac{1}{2}\pi<\gamma<\tfrac{1}{2}\pi \text{ i } \operatorname{tg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha .$$

Wówczas poszukiwana całka przyjmie postać

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}=\frac{\beta-\gamma}{\sin\alpha}.$$

Jeżeli $0<\alpha<\pi$, to bierzemy $\beta=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\alpha$, $\gamma=\frac{1}{2}\pi-\alpha$ i otrzymujemy wzór

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}=\frac{\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Jeżeli zaś $-\pi<\alpha<0$, to należy wziąć $\beta=-\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\alpha$, $\gamma=-\frac{1}{2}\pi-\alpha$ i wzór ostateczny pozostaje taki sam.

Ostatecznie więc mamy

$$I(\alpha)=\frac{\alpha}{2\sin\alpha} \text{ dla } \alpha\neq 0 \qquad \text{oraz} \qquad I(0)=\tfrac{1}{2}.$$

Widzimy stąd, że tak określona funkcja

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}$$

jest ciągła także w punkcie $\alpha=0$, ponieważ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{1}{2}$.

Zadania

Obliczyć całki (zad. 19.5 - 19.35):

19.5. $\int\limits_3^5 \frac{x}{x^2-4}\,dx.$

19.6. $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^2+a^2},\ a>0.$

19.7. $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2+2x+1}.$

19.8. $\int\limits_{-2/5}^{2/5} \frac{dx}{4+25x^2}.$

19.9. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{3dx}{4x^2+4x-3}.$

19.10. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$

19.11. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(2x-3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}.$

19.12. $\int\limits_{-\sqrt{3/5}}^{\sqrt{3/5}} \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}.$

19.13. $\int\limits_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}\,dx.$

19.14. $\int\limits_0^6 \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}\,dx.$

19.15. $\int\limits_0 3x\sqrt{x^2+4a^2}\,dx,\ a>0.$

19.16. $\int\limits_3^4 \sqrt{x^2-2x-1}\,dx.$

19.17. $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$

19.18. $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0.$

19.19. $\int\limits_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\,dx.$

19.20. $\int\limits_0^2 \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}.$

19.21. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx.$

19.22. $\int\limits_1^2 x(x^2+1)\,e^{x^2}dx.$

19.23. $\int\limits_{-2}^{-1} x^2e^{-2x}dx.$

19.24. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{2x}\sin^2 x\,dx.$

19.25. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$.

19.26. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{4dx}{3+5\cos x}$.

19.27. $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x\,dx$.

19.28. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$.

19.29. $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

19.30. $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x\,dx}{25+\sin^2 x}$.

19.31. $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx$.

19.32. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} (x+1)\cos x\,dx$.

19.33. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx$.

19.34. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx$.

19.35. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

19.36. Obliczyć pole ograniczone odcinkiem osi Ox od $x=0$ do $x=a$, rzędną w punkcie $x=a$ oraz łukiem paraboli $y=x^2$. Jaką część pola prostokąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a^2), $(0,a^2)$ stanowi obliczone pole?

19.37. Obliczyć pole zawarte pomiędzy parabolami $y=x^2$, $y^2=x$.

19.38. Obliczyć pole zawarte pomiędzy parabolami $y^2=x$, $x^2=8y$.

19.39. Obliczyć pole zawarte pomiędzy liniami $y=x^3$, $y=4x$.

19.40. Obliczyć pole wspólnego obszaru ograniczonego krzywymi $y=2x^3$, $y^2=4x$.

19.41. Obliczyć pole wspólnego obszaru ograniczonego krzywymi $y=x^3$, $y^2=x$.

19.42. Obliczyć pole obszaru ograniczonego łukami parabol $y=x^2-x-6$ i $y=-x^2+5x+14$.

19.43 Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolami $y^2=8x$, $8y=x^2$.

19.44. Obliczyć pole obszaru ograniczonego łukami paraboli $y^2=2x$ i okręgu $x^2+y^2-4x=0$.

19.45. Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolą $y=x^2$ i prostą $2x-y+3=0$.

19.46. Obliczyć pole wspólnego obszaru ograniczonego parabolami $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ i prostą $y=3x$.

19.47. Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolą $y=2x-x^2$ i prostą $x+y=0$.

19.48. W jakim stosunku parabola $y^2=2x$ dzieli pole koła $x^2+y^2=8$.

19.49. Obliczyć pole zawarte pomiędzy hiperbolą $xy=4$ a prostą $x+y=5$.

19.50. Obliczyć pole wspólnej części wnętrza okręgu $(x-6)^2+y^2=36$ i paraboli $y^2=6x$.

19.51. Obliczyć pole ograniczone linią $y=x\sin 4x$, odcinkiem osi Ox w przedziale $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{8}\pi$ oraz rzędną w punkcie $x=\frac{1}{8}\pi$.

19.52. Obliczyć pole ograniczone linią $y=xe^{-2x}$, odcinkiem osi Ox w przedziale $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ i rzędną w punkcie $x=\frac{1}{2}$.

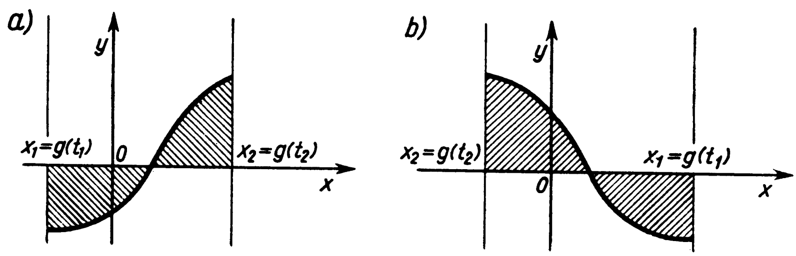
19.53. Obliczyć pole ograniczone linią $y=x\cos\frac{1}{3}x$, odcinkiem osi Ox w przedziale $\frac{1}{2}\pi\leqslant x\leqslant\pi$ i rzędnymi w punktach $x=\frac{1}{2}\pi$ i $x=\pi$.

Rozdział XX

ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁEK

§ 20.1. OBLICZANIE PÓL, GDY LINIA OGRANICZAJĄCA JEST OKREŚLONA W POSTACI PARAMETRYCZNEJ LUB WE WSPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH

Jeżeli dana krzywa jest określona równaniami w postaci parametrycznej $x=g(t)$, $y=h(t)$, gdzie funkcje $g(t)$ i $h(t)$ są ciągłe w przedziale $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, a przy tym funkcja $g(t)$ jest rosnąca (rys. 20.1a) i ma w tym przedziale pochodną ciągłą, to *pole obszaru* (rys. 20.1)



Rys. 20.1

ograniczonego łukiem danej krzywej, odcinkiem osi Ox oraz prostymi $x=x_1$, $x=x_2$, gdzie $x_1=g(t_1)$, $x_2=g(t_2)$, wyraża się wzorem

(20.1.1)
$$P=\int_{x_1}^{x_2}|y|dx=\int_{t_1}^{t_2}|h(t)|g'(t)\,dt.$$

Jeżeli przy tych samych założeniach funkcja $g(t)$ jest malejąca (rys. 20.1b) w przedziale $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, to *pole obszaru* wyraża się wzorem

(20.1.2)
$$P=\int_{x_1}^{x_2}|y|dx=-\int_{t_1}^{t_2}|h(t)|g'(t)\,dt.$$

Jeżeli krzywa dana jest we współrzędnych biegunowych $r=f(\theta)$, gdzie $f(\theta)$ jest funkcją nieujemną ciągłą w przedziale $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, a przy tym $0<\beta-\alpha<2\pi$, to *pole obszaru* (rys. 20.2) ograniczonego łukiem krzywej $r=f(\theta)$ oraz promieniami wodzącymi o amplitudach α i β wyraża się wzorem

(20.1.3)
$$P=\tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta=\tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(f(\theta))^2\,d\theta.$$

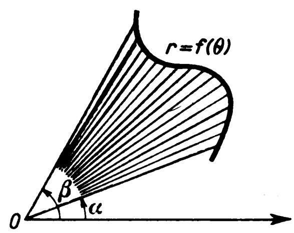
ZADANIE 20.1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego linią

(1) $$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,$$

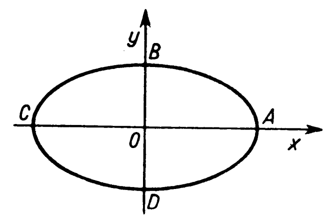
gdzie $a>0$, $b>0$, a parametr t przebiega przedział $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Rozwiązanie. Z układu równań (1) mamy

$$\frac{x}{a}=\cos t,\quad \frac{y}{b}=\sin t.$$



Rys. 20.2



Rys. 20.3

Podnosząc te równości do kwadratu i dodając stronami otrzymujemy

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t,\quad \text{czyli}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Szukamy więc pola ograniczonego elipsą (rys. 20.3).

Funkcja $x=a\cos t$ w przedziale $0\leqslant t\leqslant\pi$ jest malejąca, a więc pole ograniczone łukiem ABC i odcinkiem CA obliczamy według wzoru (20.1.2). Zauważmy, że w przedziale $0\leqslant t\leqslant\pi$ funkcja $y=b\sin t$ jest nieujemna. Mamy więc

$$P_1=-\int_0^{\pi} b\sin t(-a\sin t)\,dt=ab\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt.$$

Natomiast w przedziale $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$ funkcja $x=a\cos t$ jest rosnąca, a więc pole ograniczone łukiem CDA i odcinkiem CA obliczymy według wzoru (20.1.1). Ale w przedziale $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$ mamy równość $|\sin t|=-\sin t$, a więc wzór (20.1.1) daje

$$P_2=\int_{\pi}^{2\pi}|b\sin t|(-a\sin t)\,dt=ab\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2 t\,dt.$$

Sumę pól można wyrazić jedną całką

$$P=P_1+P_2=ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt.$$

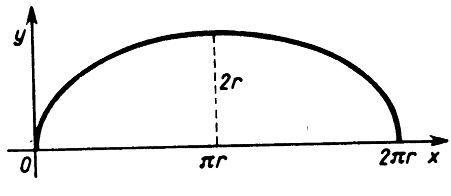
Biorąc z zadania 18.3 (str. 350) całkę $\int\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t$ otrzymujemy

$$P=ab\left[\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=\pi ab.$$

ZADANIE 20.2. Obliczyć pole ograniczone odcinkiem osi Ox i łukiem *cykloidy* określonej równaniami parametrycznymi (por. zad. 7.20):

$$x = r(t - \sin t), \qquad y = r(1 - \cos t),$$

gdzie $r > 0$, a parametr t przebiega przedział $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (rys. 20.4).



Rys. 20.4

Rozwiązanie. Badamy, czy równania cykloidy spełniają warunki podanego twierdzenia. W tym celu obliczamy pochodną $\frac{dx}{dt} = r(1 - \cos t)$. Biorąc pod uwagę, że $1 - \cos t \geqslant 0$, stwierdzamy, że $\frac{dx}{dt} \geqslant 0$, a więc funkcja $x = r(t - \sin t)$ jest rosnąca. Do obliczania pola obszaru stosujemy więc wzór (20.1.1); mamy

$$P = \int_0^{2\pi} |r(1 - \cos t)| r(1 - \cos t)\, dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt.$$

Obliczamy całkę nieoznaczoną

$$\int (1 - \cos t)^2\, dt = \tfrac{3}{2}t - 2\sin t + \tfrac{1}{4}\sin 2t.$$

Obliczamy poszukiwane pole

$$P = r^2 \left[\tfrac{3}{2}t - 2\sin t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi r^2.$$

Pole ograniczone łukiem cykloidy oraz osią Ox równa się potrojonemu polu toczącego się koła.

ZADANIE 20.3. Obliczyć pole ograniczone asteroidą określoną równaniami parametrycznymi (por. zad. 7.21 i 20.22):

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t,$$

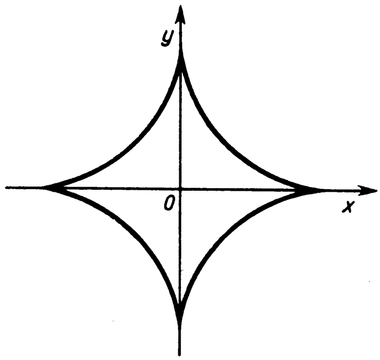
gdzie $a > 0$, a parametr t przebiega przedział $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (rys. 20.5).

Rozwiązanie. Rozważania takie, jak w zadaniu 20.1 doprowadzają do wniosku, że pole P_1 w przedziale $0 \leqslant t \leqslant \pi$ należy obliczyć według wzoru (20.1.2), a pole P_2 w przedziale $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$ według wzoru (20.1.1); ostatecznie otrzymamy pole asteroidy $P = P_1 + P_2$.

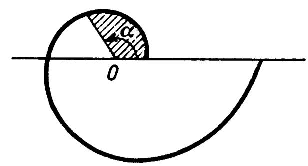
Można jednak wyzyskać symetrię asteroidy (rys. 20.5):

1° Niechaj danej wartości $t=t_0$ odpowiada punkt (x_0, y_0); wówczas wartości $t=-t_0$ będzie odpowiadał punkt $(x_0, -y_0)$, a to oznacza, że asteroida jest symetryczna względem osi Ox.

2° Jeżeli wartości $t=t_0$ odpowiada punkt (x_0, y_0), to wartości $t=\pi-t_0$ odpowiadać będzie punkt $(-x_0, y_0)$, a więc asteroida jest symetryczna względem osi Oy.



Rys. 20.5



Rys. 20.6

Gdy zmienna t przebiega przedział $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi$, otrzymujemy część asteroidy zawartą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. Pole tej ćwiartki asteroidy wyraża się wzorem

$$P' = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} |a\sin^3 t|(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt = 3a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 t\sin^4 t\,dt.$$

a pole całej asteroidy wyrazi się wzorem $P=4P'$.

Obliczamy całkę nieoznaczoną

$$I = \int \cos^2 t\sin^4 t\,dt = \int (1-\sin^2 t)\sin^4 t\,dt = \int \sin^4 t\,dt - \int \sin^6 t\,dt.$$

Całki te obliczone zostały w zadaniu 18.5 (str. 352); otrzymujemy zatem

$$V_4 = \int \sin^4 t\,dt = \tfrac{3}{8}t - \tfrac{3}{8}\sin t\cos t - \tfrac{1}{4}\sin^3 t\cos t,$$

$$V_6 = \int \sin^6 t\,dt = \tfrac{5}{16}t - \tfrac{5}{16}\sin t\cos t - \tfrac{5}{24}\sin^3 t\cos t - \tfrac{1}{6}\sin^5 t\cos t,$$

a więc

$$I = V_4 - V_6 = \tfrac{1}{16}t - \tfrac{1}{16}\sin t\cos t - \tfrac{1}{24}\sin^3 t\cos t + \tfrac{1}{6}\sin^5 t\cos t.$$

Otrzymujemy $P' = 3a^2 \cdot I\big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{3}{32}\pi a^2$ i ostatecznie mamy

$$P = 4P' = \tfrac{3}{8}\pi a^2.$$

Uwaga. Z układu równań parametrycznych asteroidy mamy

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos t, \quad \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \sin t.$$

Podnosząc stronami do kwadratu i dodając te równości otrzymujemy równanie asteroidy w postaci

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \text{czyli} \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Zadanie 20.4. Obliczyć pole ograniczone *spiralą logarytmiczną* $r=ae^{k\theta}$, gdzie $a>0$ i $k>0$, oraz promieniami wodzącymi o amplitudach 0 i α, gdzie $0<\alpha<2\pi$ (rys. 20.6).

Rozwiązanie. Mamy

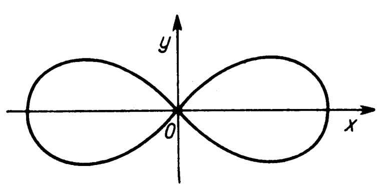
$$P=\frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha r^2 d\theta=\frac{1}{2}a^2\int\limits_0^\alpha e^{2k\theta}d\theta=\frac{1}{2}a^2\left[\frac{1}{2k}e^{2k\theta}\right]_0^\alpha=\frac{a^2}{4k}(e^{2k\alpha}-1).$$

Zadanie 20.5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego *lemniskatą* określoną równaniem $r=a\sqrt{\cos 2\theta}$, gdzie $a>0$, a θ przebiega przedziały $-\frac{1}{4}\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{4}\pi$ i $\frac{3}{4}\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{5}{4}\pi$ (rys. 20.7).

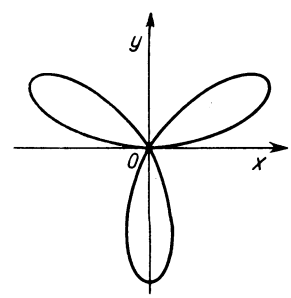
Rozwiązanie. W podanych przedziałach mamy $\cos 2\theta\geqslant 0$, a więc funkcja $r=a\sqrt{\cos 2\theta}$ istnieje.

1° Jeżeli danej wartości $\theta=\theta_0$ odpowiada punkt, $(\theta_0\ r_0)$, to wartości $\theta=-\theta_0$ odpowiada, ze względu na parzystość funkcji cosinus, punkt lemniskaty $(-\theta_0, r_0)$, co oznacza, że lemniskata jest symetryczna względem osi Ox.

2° Jeżeli danej wartości $\theta=\theta_0$ odpowiada punkt lemniskaty (θ_0, r_0), to wartości $\theta=\pi-\theta_0$ odpowiada punkt $(\pi-\theta_0, r_0)$, a to oznacza, że lemniskata jest symetryczna względem osi Oy.



Rys. 20.7



Rys. 20.8

Wystarczy więc obliczyć pole P' ćwiartki lemniskaty, a pole całej lemniskaty wyniesie $P=4P'$.

Pole ćwiartki lemniskaty wyraża się wzorem

$$P'=\tfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi} r^2 d\theta=\tfrac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi}\cos 2\theta\, d\theta=\tfrac{1}{2}a^2\left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}=\tfrac{1}{4}a^2,$$

a więc poszukiwane pole wynosi $P=a^2$.

Zadanie 20.6. Obliczyć pole ograniczone *rozetą trójkątną* $r=a\sin 3\theta$, gdzie $a>0$, a θ przebiega przedziały: $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$, $\frac{4}{3}\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{5}{3}\pi$ (rys. 20.8).

Rozwiązanie. W każdym z podanych przedziałów mamy $\sin 3\theta\geqslant 0$, a więc $r\geqslant 0$. Z rysunku widzimy, że dana krzywa ma trzy osie symetrii o równaniach

$$\theta=\tfrac{1}{6}\pi,\qquad \theta=\tfrac{5}{6}\pi,\qquad \theta=\tfrac{3}{2}\pi.$$

Niechaj będzie $\theta=\frac{1}{6}\pi-\theta_0$; wówczas $r=a\cos 3\theta_0$. Jeżeli zaś $\theta=\frac{1}{6}\pi+\theta_0$, to również otrzymujemy $r=a\cos 3\theta_0$. Stąd wniosek, że punktowi $(\frac{1}{6}\pi-\theta_0, a\cos 3\theta_0)$ należącemu do danej krzywej odpowiada punkt $(\frac{1}{6}\pi+\theta_0, a\cos 3\theta_0)$ również należący do danej krzywej i symetryczny do poprzedniego punktu względem osi $\theta=\frac{1}{6}\pi$. Podobnie można dowieść, że proste $\theta=\frac{5}{6}\pi$ oraz $\theta=\frac{3}{2}\pi$ są osiami symetrii.

Jak łatwo zauważyć, funkcja $f(\theta)=\sin 3\theta$ ma okres $\frac{2}{3}\pi$. Prawdziwa jest więc równość

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sin 3\theta\, d\theta=\int_{\alpha+k2\pi/3}^{\beta+k2\pi/3}\sin 3\theta\, d\theta$$

przy k całkowitych; dla dowodu bowiem tej równości wystarczy w całce po prawej stronie dokonać zamiany zmiennych $\theta+k\cdot\frac{2}{3}\pi=\tau$. Z równości tej w szczególności wynika, że listki rozety mają te same pola, a więc pole całej rozety jest $P=3P'$, gdzie P' oznacza pole jednego listka.

Pole P' obliczamy w postaci całki

$$P'=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}\pi} r^2 d\theta=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{1}{3}\pi}\sin^2 3\theta\, d\theta=\frac{1}{4}a^2\left[\theta-\frac{1}{6}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{1}{3}\pi}=\frac{1}{12}\pi a^2.$$

Pole całej rozety wynosi więc $P=\frac{1}{4}\pi a^2$.

Uwaga. W układzie współrzędnych biegunowych można rozważać ujemne wartości promienia wodzącego r, a to w sposób następujący: jeżeli $r_0>0$, to przez punkt $(\theta_0, -r_0)$ rozumiemy punkt $(\theta_0+\pi, r_0)$; np. punkt $(\frac{1}{3}\pi, -1)$ rozumiemy jako punkt $(\frac{4}{3}\pi, 1)$. Przyjmując taką umowę możemy określić rozetę trójlistną jako krzywą określoną równaniem $r=a\sin 3\theta$, gdzie $a>0$, a θ przebiega przedział $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Pole całej rozety obliczymy w postaci całki

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\theta=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}\sin^2 3\theta\, d\theta=\frac{1}{4}a^2\left[\theta-\frac{1}{6}\sin 6\theta\right]_0^{\pi}=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

Zadania

20.7. Obliczyć pole ograniczone linią krzywą $r=a\sin\theta$, gdzie $a>0$, a argument θ przebiega przedział $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Następnie wykreślić tę linię.

20.8. Obliczyć pole ograniczone linią $r=a\sin 2\theta$, gdzie $a>0$, a argument θ przebiega przedział $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

20.9. Obliczyć pole ograniczone linią $r=a\sin 6\theta$, gdzie $a>0$, a argument θ przebiega przedział $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

20.10. Obliczyć pole ograniczone osią Ox oraz *kardioidą* wyrażoną równaniem $r=a(1+\cos\theta)$, gdzie $a>0$, a argument θ przebiega przedział $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

20.11. Obliczyć pole zakreślone promieniem wodzącym *spirali Archimedesa* $r=a\theta$, gdzie $a>0$, przy jednym jego obrocie, począwszy od $\theta=0$ a skończywszy na $\theta=2\pi$.

20.12. Obliczyć pole koła $r=a\cos\theta$, $a>0$ i $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

20.13. Obliczyć pole elipsy $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, $0<\varepsilon<1$

20.14. Obliczyć pole ograniczone osią Ox i łukiem cykloidy $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$, gdzie $a>0$, a parametr φ przebiega przedział $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

20.15. Obliczyć pole pętli linii $x=3t^2$, $y=3t-t^3$, gdzie parametr t przebiega przedział $-\sqrt{3}\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$.

20.16. Obliczyć pole pętli *liścia Kartezjusza*

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3},$$

gdzie $a>0$, a parametr t przebiega przedział $0\leqslant t\leqslant+\infty$.

20.17. Obliczyć pole ograniczone osią Ox i łukiem *cisoidy Dioklesa* $x=2r\sin^2\varphi$, $y=2r\sin^2\varphi\operatorname{tg}\varphi$, $\frac{1}{12}\pi\leqslant\varphi\leqslant\frac{1}{6}\pi$.

20.18. Obliczyć pole pętli linii $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^3$, $0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$.

20.19. Obliczyć pole pętli linii $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$.

20.20. Obliczyć pole *ewolwenty koła* $x=3(\cos t+t\sin t)$, $y=3(\sin t-t\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

20.21. Obliczyć pole pętli linii $x=2(2\cos t-\cos 2t)$, $y=2(2\sin t-\sin 2t)$.

20.22. Obliczyć pole asteroidy (ewoluty elipsy) $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$, $c^2=a^2-b^2$.

§ 20.2. OBLICZANIE DŁUGOŚCI ŁUKU

Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem postaci $y=f(x)$, przy czym funkcja $f(x)$ ma w przedziale $a\leqslant x\leqslant b$ pochodną ciągłą, to *długość łuku* w tym przedziale wyraża się wzorem

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \tag{20.2.1}$$

a *różniczka łuku* wyraża się wtedy wzorem

$$dL=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{20.2.2}$$

Jeżeli krzywa dana jest parametrycznie za pomocą równań $x=g(t)$, $y=h(t)$, przy czym funkcje $g(t)$ i $h(t)$ mają w przedziale $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ ciągłe pochodne oraz łuk nie ma części wielokrotnych, to *długość łuku* wyraża się wzorem

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt, \tag{20.2.3}$$

a *różniczka łuku* wzorem

(20.2.4)
$$dL=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Jeżeli krzywa dana jest równaniem we współrzędnych biegunowych $r=f(\theta)$, przy czym funkcja $f(\theta)$ ma w przedziale $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ ciągłą pochodną i łuk nie ma części wielokrotnych, to *długość łuku* wyraża się wzorem

(20.2.5)
$$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta,$$

a *różniczka łuku* wzorem

(20.2.6)
$$dL=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

Uwaga. Gdy $\beta-\alpha\leqslant\pi$ (albo $\beta-\alpha\leqslant 2\pi$ oraz $r\geqslant 0$), łuk $r=f(\theta)$ na pewno nie ma części wielokrotnych.

Zadanie 20.23. Obliczyć długość łuku paraboli $y=x^2$ w przedziale $0\leqslant x\leqslant 2$.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (20.2.1). Obliczamy pochodną $\dfrac{dy}{dx}=2x$, a następnie
$$L=\int\limits_0^2\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Obliczmy całkę nieoznaczoną $I=\int\sqrt{1+4x^2}\,dx$. Wykonujemy podstawienie $2x=t$, skąd po zróżniczkowaniu $2dx=dt$, czyli $dx=\frac{1}{2}dt$. Mamy więc
$$I=\tfrac{1}{2}\int\sqrt{1+t^2}\,dt.$$

Całkę taką obliczyliśmy w zadaniu 17.43 (str. 337) (przyjmujemy $k=1$):
$$I=\tfrac{1}{4}t\sqrt{t^2+1}+\tfrac{1}{4}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right).$$

Podstawiając $t=2x$ otrzymujemy
$$I=\tfrac{1}{2}x\sqrt{4x^2+1}+\tfrac{1}{4}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right).$$

Obliczamy długość łuku podstawiając granice całkowania:
$$L=\sqrt{17}+\tfrac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})-\tfrac{1}{4}\ln 1,\quad \text{czyli}\quad L=\sqrt{17}+\tfrac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17}).$$

Zadanie 20.24. Obliczyć długość łuku asteroidy $x\neq a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, gdzie $a>0$, a parametr t przebiega przedział $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ (por. zad. 20.3).

Rozwiązanie. Obliczamy pochodne
$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t,\qquad \frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t.$$

Stosujemy wzór (20.2.3); mamy

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=3a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt.$$

Ale $\cos^2 t+\sin^2 t=1$, $\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}=|\sin t\cos t|=\frac{1}{2}|\sin 2t|$, mamy więc

$$L=\tfrac{3}{2}a\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,dt.$$

Asteroida jest symetryczna zarówno względem osi Ox, jak i względem osi Oy, wystarczy więc przeprowadzić całkowanie w przedziale $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\pi$; obliczymy wówczas $\frac{1}{4}$ łuku (patrz rys. 20.5). Jest wtedy

$$\tfrac{1}{4}L=\tfrac{3}{2}a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin 2t\,dt=\tfrac{3}{2}a\left[-\tfrac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\tfrac{3}{2}a.$$

Ostatecznie $L=6a$.

Zadanie 20.25. Obliczyć długość łuku cykloidy $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, gdzie $a>0$, a parametr t zmienia się w przedziale $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ (por. zad. 20.2).

Rozwiązanie. Obliczamy pochodne

$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\qquad \frac{dy}{dt}=a\sin t$$

i stosujemy wzór (20.2.3); mamy

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt.$$

Stosujemy teraz wzór trygonometryczny $1-\cos t=2\sin^2\frac{1}{2}t$ i otrzymujemy

$$L=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\tfrac{1}{2}t\right|dt.$$

Ale w granicach całkowania, tj. dla $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, jest $\sin\frac{1}{2}t\geqslant 0$, mamy więc

$$L=2a\int_0^{2\pi}\sin\tfrac{1}{2}t\,dt=2a\left[-2\cos\tfrac{1}{2}t\right]_0^{2\pi}=8a.$$

Długość łuku cykloidy jest więc równa poczwórnej średnicy toczącego się okręgu (patrz rys. 20.4).

Zadanie 20.26. Obliczyć długość łuku spirali logarytmicznej $r=ae^{k\theta}$, gdzie $a>0$, $k\neq 0$, a parametr θ zmienia się w przedziale $0\leqslant\theta\leqslant\alpha$ (por. zad. 20.4).

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (20.2.5); mamy

$$r=ae^{k\theta},\quad\text{skąd}\quad \frac{dr}{d\theta}=ake^{k\theta},$$

więc

$$L=a\int_0^\alpha \sqrt{e^{2k\theta}+k^2e^{2k\theta}}\,d\theta=a\int_0^\alpha \sqrt{(1+k^2)e^{2k\theta}}\,d\theta=$$

$$=a\sqrt{1+k^2}\int_0^\alpha e^{k\theta}d\theta=a\sqrt{1+k^2}\left[\frac{1}{k}e^{k\theta}\right]_0^\alpha$$

i ostatecznie

$$L=a\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}(e^{k\alpha}-1).$$

Uwaga. Przyjmujemy $a>0$. Jeżeli $k<0$, to $e^{k\alpha}-1<0$, ale ponieważ $\frac{e^{k\alpha}-1}{k}>0$, przeto $L>0$.

Zadania

Obliczyć długości następujących łuków (zad. 20.27 - 20.62):

20.27. $y^2=4x^3$, $y>0$, $0\leqslant x\leqslant\frac{8}{9}$.

20.28. $9y^2=4x^3$, $0\leqslant x\leqslant 3$.

20.29. $9y^2=2x^3$, $0\leqslant x\leqslant 2$.

20.30. $3y^2=4x^3$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

20.31. $9y^2=x^3$, $0\leqslant x\leqslant 12$.

20.32. $2y^2-3x^3=0$, $0\leqslant x\leqslant 2$.

20.33. $2y^2-x^3=0$, $0\leqslant x\leqslant 2$.

20.34. $y=2\sqrt{x}$, $A(1,2)$, $B(9,6)$.

20.35. $y^2=2x-x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

20.36. $2y^2=x-2x^2$, $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$.

20.37. $y=2\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

20.38. $y=2\sqrt{3x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

20.39. Łuk paraboli półsześciennej (paraboli Neila) $y=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ w przedziale $1\leqslant x\leqslant 4$.

20.40. Łuk krzywej $y=\ln\sin x$ w przedziale $\frac{1}{3}\pi\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\pi$.

20.41. Łuk krzywej $y=1-\ln\cos x$ w przedziale $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}\pi$.

20.42. Łuk linii łańcuchowej $y=a\cosh\frac{x}{a}$, $a>0$, w przedziale $-a\leqslant x\leqslant a$.

20.43. Łuk krzywej logarytmicznej $y=\ln x$ w przedziale $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$.

20.44. Łuk krzywej $y=\ln(1-x^2)$ w przedziale $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$.

20.45. Łuk krzywej $y=-\ln\operatorname{tgh}\frac{1}{2}x$ w przedziale $1\leqslant x\leqslant 2$.

20.46. $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

20.47. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$, $0\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}a$.

20.48. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$, $1\leqslant y\leqslant 2$.

20.49. $y=e^x$, $A(0,1)$, $B(1,e)$.

20.50. Łuk kardioidy $r=a(1+\cos\theta)$, $a>0$, w przedziale $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

20.51. Łuk spirali Archimedesa $r=a\theta$, $a>0$, w przedziale $0\leqslant\theta\leqslant 1$.

20.52. Łuk spirali hiperbolicznej $r=a/\theta$, $a>0$, w przedziale $\frac{2}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{4}$.

20.53. $r=2a\cos\theta$ (okrąg).

20.54. $r=\dfrac{p}{1+\cos\varphi}$, $-\frac{1}{2}\pi\leqslant\varphi\leqslant\frac{1}{2}\pi$.

20.55. Łuk krzywej $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^3$ w przedziale $0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$.

20.56. Łuk rozwijającej okręgu $x=r(\cos t+t\sin t)$, $y=r(\sin t-t\cos t)$, $r>0$, w przedziale $0\leqslant t\leqslant\pi$.

20.57. Łuk krzywej $x=2t\cos t+(t^2-2)\sin t$, $y=2t\sin t-(t^2-2)\cos t$, w przedziale $0\leqslant t\leqslant\pi$.

20.58. Łuk krzywej $x=a\cos^5\frac{1}{2}t$, $y=a\sin^5\frac{1}{2}t$, $a>0$, w przedziale $0\leqslant t\leqslant\pi$.

20.59. Łuk cisoidy Dioklesa $x=2a\sin^2 t$, $y=2a\sin^2 t\operatorname{tg} t$, $0\leqslant t\leqslant t_1$.

20.60. Łuk kardioidy $x=5\cos t\,(1+\cos t)$, $y=5\sin t\,(1+\cos t)$ w przedziale $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

20.61. $x=a\cos^4 t$, $y=a\sin^4 t$, $a>0$, w przedziale $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\pi$.

20.62. $x=a\cos^5 t, y=a\sin^5 t$, $a>0$, w przedziale $0<x<a$.

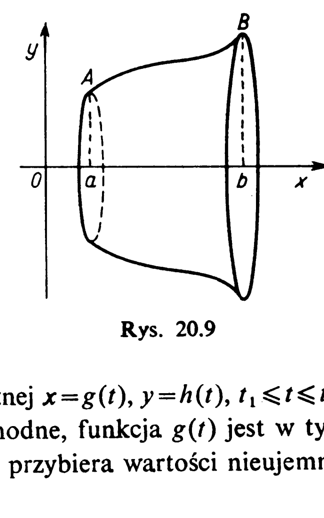
§ 20.3. OBLICZANIE OBJĘTOŚCI I POLA POWIERZCHNI BRYŁ OBROTOWYCH

Niech dany będzie łuk AB (rys. 20.9) krzywej o równaniu $y=f(x)$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i nieujemną w przedziale $\langle a, b\rangle$. Wówczas *objętość bryły obrotowej* ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk AB wraz z rzędnymi w końcach łuku obraca się dookoła osi Ox, obliczamy według wzoru

(20.3.1) $$V=\pi\int_a^b y^2 dx.$$

Pole powierzchni obrotowej powstałej przez obrót łuku AB dookoła osi Ox obliczamy według wzoru

(20.3.2) $$S=2\pi\int_A^B y\,dL=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$



Rys. 20.9

przy założeniu dodatkowym, że funkcją $y=f(x)$ ma w przedziale $a\leqslant x\leqslant b$ ciągłą pochodną.

Jeżeli równanie łuku AB dane jest w postaci parametrycznej $x=g(t)$, $y=h(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, przy czym obie funkcje mają w tym przedziale ciągłe pochodne, funkcja $g(t)$ jest w tym przedziale stale rosnąca albo stale malejąca, a funkcja $h(t)$ przybiera wartości nieujemne, to na *objętość bryły obrotowej* mamy wzór

(20.3.3) $$V=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2\frac{dx}{dt}\,dt,$$

a na *pole powierzchni obrotowej* wzór

(20.3.4) $$S=2\pi\int_A^B y\,dL=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

ZADANIE 20.63. Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu łuku paraboli $y^2=4x$ w granicach $0 \leqslant x \leqslant 3$ dokoła osi Ox oraz objętość bryły ograniczonej tą powierzchnią i płaszczyzną $x=3$.

Rozwiązanie. Aby obliczyć pole powierzchni obrotowej, trzeba znaleźć najpierw różniczkę łuku dL (por. wzór (20.2.2)). Mamy $y=2\sqrt{x}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, więc

$$dL=\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx.$$

Stosujemy wzór na obliczanie pola powierzchni obrotowej

$$S=2\pi\int_0^3 y\,dL=2\pi\int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx=4\pi\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx=$$

$$=4\pi\cdot\tfrac{2}{3}\left[(x+1)^{3/2}\right]_0^3=\tfrac{8}{3}\pi\left[4^{3/2}-1^{3/2}\right]=\tfrac{8}{3}\pi(8-1),$$

czyli ostatecznie $S=\frac{56}{3}\pi$.

Obliczamy objętość bryły obrotowej

$$V=\pi\int_0^3 y^2\,dx=\pi\int_0^3 4x\,dx=2\pi\left[x^2\right]_0^3=18\pi.$$

ZADANIE 20.64. Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu cykloidy

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t),$$

gdzie $a>0$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, dookoła osi Ox (por. zad. 20.2 i rys. 20.4), a także objętość bryły ograniczonej tą powierzchnią.

Rozwiązanie. Zauważmy, że pochodną $\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$ jest nieujemna, a więc $x=g(t)$ jest funkcją rosnącą; funkcja $y=h(t)$ przybiera wartości nieujemne.

Objętość bryły obrotowej obliczamy według wzoru (20.3.3), gdzie $t_1=0$, $t_2=2\pi$. Obliczamy $\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$, więc mamy

$$V=\pi\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3\,dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt=$$

$$=\pi a^3\Big(\int_0^{2\pi} dt-3\int_0^{2\pi}\cos t\,dt+3\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt-\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt\Big)=$$

$$=\pi a^3\Big(\left[t\right]_0^{2\pi}-3\left[\sin t\right]_0^{2\pi}+3\left[\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}-\left[\sin t-\tfrac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi}\Big),$$

skąd po obliczeniu ostatecznie otrzymujemy $V=5\pi^2a^3$.

Pole powierzchni bryły obrotowej obliczamy ze wzoru (20.3.4), gdzie $t_1=0$, $t_2=2\pi$. W zadaniu 20.25 obliczyliśmy, że dla cykloidy jest $dL=2a\sin\frac{1}{2}t\,dt$. Mamy więc

$$S=2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin\tfrac{1}{2}t\,dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\tfrac{1}{2}t\,dt,$$

gdyż $1-\cos t=2\sin^2\frac{1}{2}t$. Aby obliczyć całkę nieoznaczoną, wykonujemy podstawienie $\frac{1}{2}t=u$, skąd $dt=2du$; otrzymujemy

$$\int\sin^3\tfrac{1}{2}t\,dt=2\int\sin^3 u\,du=-2\int(1-\cos^2 u)\,d(\cos u)=$$

$$=-2(\cos u-\tfrac{1}{3}\cos^3 u)=-2(\cos\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{3}\cos^3\tfrac{1}{2}t).$$

Podstawiając powyższą wartość do wzoru na S mamy

$$S=8\pi a^2(-2)\left[\cos\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{3}\cos^3\tfrac{1}{2}t\right]_0^{2\pi}=-16\pi a^2((-1+\tfrac{1}{3})-(1-\tfrac{1}{3})).$$

Ostatecznie więc po redukcji otrzymujemy $S=\frac{64}{3}\pi a^2$.

Zadanie 20.65. Obliczyć objętość oraz pole powierzchni elipsoidy powstałej z obrotu elipsy dookoła osi Ox.

Rozwiązanie. Aby obliczyć objętość, z równania elipsy $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ wyznaczamy

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Połowa objętości elipsoidy wyrazi się więc wzorem

$$\tfrac{1}{2}V=\pi\int_0^a\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)dx,$$

skąd

$$V=2\pi b^2\left(\int_0^a dx-\frac{1}{a^2}\int_0^a x^2\,dx\right)=2\pi b^2\left(a-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}\right)=\tfrac{4}{3}\pi ab^2.$$

Dla obliczenia pola powierzchni wygodniej będzie skorzystać z równań parametrycznych elipsy $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ (por. zad. 20.1). Funkcja $x=a\cos t$ w przedziale $0\leqslant t\leqslant\pi$ jest stale malejąca, a funkcja $y=b\sin t$ przybiera wartości nieujemne. Pole powierzchni bryły obrotowej wyraża się wzorem (por. wzór (20.3.4):

$$S=2\pi\int_0^{\pi} b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt.$$

Podstawiamy $\cos t=u$, skąd $-\sin t\,dt=du$, i odpowiednio zmieniając granice całkowania otrzymujemy

$$S=2\pi b\int_{-1}^{1}\sqrt{a^2(1-u^2)+b^2u^2}\,du=2\pi b\int_{-1}^{1}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)u^2}\,du.$$

1° Jeżeli $a=b$, to mamy $S=4\pi a^2$.

2° Jeżeli $a>b$, to podstawiając $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\varepsilon$, gdzie ε jest mimośrodem elipsy, otrzymujemy

$$S=2\pi ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,du.$$

Podstawiamy $\varepsilon u=v$, a następnie stosujemy wzór (17.2.6) (str. 336):

$$S=2\pi ab\left(\frac{u}{2}\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}+\frac{1}{2\varepsilon}\arcsin(\varepsilon u)\right)_{-1}^{+1}=$$

$$=2\pi ab\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)=2\pi ab\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right).$$

3° Jeżeli $a<b$, to podstawiając $\sqrt{b^2-a^2}=c$ otrzymujemy

$$S=2\pi b\int_{-1}^{1}\sqrt{a^2+c^2u^2}\,du=2\pi b\left(\frac{u}{2}\sqrt{a^2+c^2u^2}+\frac{a^2}{2c}\ln(cu+\sqrt{a^2+c^2u^2})\right)_{-1}^{+1}=$$

$$=2\pi b\left(\sqrt{a^2+c^2}+\frac{a^2}{2c}\ln\frac{\sqrt{a^2+c^2}+c}{\sqrt{a^2+c^2}-c}\right)=2\pi b\left(b+\frac{a^2}{2\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{b-\sqrt{b^2-a^2}}\right)=$$

$$=2\pi b\left(b+\frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right).$$

Zadania

20.66. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót dookoła osi Ox linii $xy^2=1$ oraz płaszczyznami $x=a$ i $x=b$, gdzie $b>a>0$.

20.67. Obliczyć objętość bryły utworzonej przez obrót dookoła osi Ox hiperboli $y=1/x$, $1\leqslant x<+\infty$, wraz z rzędną w punkcie $x=1$.

20.68. Obliczyć objętość oraz pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót dookoła osi Ox sinusoidy $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$.

20.69. Obliczyć objętość bryły utworzonej przez obrót dookoła osi Ox linii $y^2(x-4)=$ $=x(x-3)$, $0\leqslant x\leqslant 3$.

20.70. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi Ox hiperboli $x^2-y^2=a^2$, $a>0$, $a\leqslant x\leqslant a\sqrt{2}$, wraz z rzędną końcową w punkcie $x=a\sqrt{2}$.

20.71. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót dookoła osi Ox paraboli $3y-x^3=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$, wraz z rzędną końcową w punkcie $x=1$.

20.72. Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej bryły powstałej z obrotu łuku linii łańcuchowej $y=a\cosh\frac{x}{a}$, $a>0$, $-a\leqslant x\leqslant a$, wraz z rzędnymi końcowymi w punktach $x=-a$ i $x=a$.

20.73. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi Ox krzywej $y=\sqrt{2rx-x^2}$ w przedziale $\langle 0, 2\rangle$.

20.74. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi Ox cisoidy Dioklesa $x^3=y^2(2r-x)$, gdzie $1\leqslant x\leqslant 2$.

Obliczyć objętość i powierzchnię bryły obrotowej (dookoła osi Ox) (zad. 20.75 - 20.87):

20.75. $y=\sin^{7/2}x$, $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\pi$.

20.76. $y=\cos^{7/2}x$, $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\pi$.

20.77. $y=a\cos\frac{2\pi}{b}$, $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}b$.

20.78. $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt[4]{x^2-6x+15}}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

20.79. $4x^2+9y^2=36$.

20.80. $16x^2+8y^2=144$.

20.81. $25x^2+4y^2=100$.

20.82. $x^2+y^2-20y+75=0$.

20.83. $3y^2=4x$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

20.84. $y=2x^3$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

20.85. $y=\dfrac{1}{x-1}$, $2\leqslant x\leqslant 4$.

20.86. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $2\leqslant x\leqslant 4$.

20.87. $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$, $0\leqslant x\leqslant\pi$.

20.88. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót dookoła osi Ox asteroidy $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $a>0$, $0\leqslant t\leqslant\pi$.

20.89. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi Ox krzywej $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^3$, $0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$.

§ 20.4. MOMENT BEZWŁADNOŚCI, MOMENT STATYCZNY, ŚRODEK CIĘŻKOŚCI

Momentem bezwładności mas $m_1, m_2, \ldots, m_k$ względem osi Ox nazywamy sumę

$$I_x=\sum_{i=1}^{k} m_i y_i^2, \tag{20.4.1}$$

gdzie y_i oznacza odległość masy m_i od osi Ox.

Moment bezwładności łuku krzywej AB względem osi Ox wyraża się całką

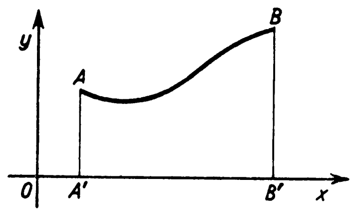
$$I_x=\int_{(A)}^{(B)}\lambda y^2 dL, \tag{20.4.2}$$

gdzie λ oznacza gęstość liniową, a dL jest różniczką łuku AB (por. wzór (20.2.2)).

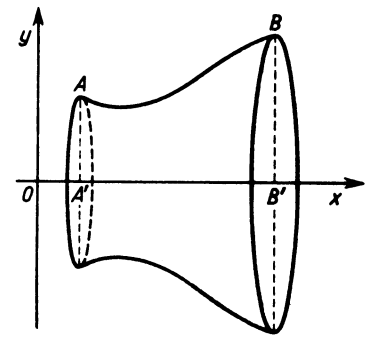
Jeżeli $y=f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, przybierającą w tym przedziale wartości nieujemne, i jeżeli $A'A$ jest rzędną początkową krzywej $y=f(x)$ w punkcie $x=a$, a $B'B$ jest rzędną końcową tej krzywej w punkcie $x=b$, to *moment bezwładności trapezu krzywoliniowego* $A'ABB'$ (rys. 20.10), względem osi Ox, czyli obszaru ograniczonego odcinkiem $A'B'$ osi Ox, rzędnymi $A'A$ i $B'B$ oraz łukiem AB krzywej $y=f(x)$, wyraża się całką

(20.4.3) $$I_x = \tfrac{1}{3}\rho \int_a^b y^3 dx,$$

gdzie ρ oznacza stałą gęstość powierzchniową.



Rys. 20.10



Rys. 20.11

Jeżeli trapez krzywoliniowy $A'ABB'$ obraca się dookoła osi Ox (rys. 20.11), to *moment bezwładności bryły obrotowej* względem osi Ox, która przy tym powstaje, wyraża się wzorem

(20.4.4) $$I_x = \tfrac{1}{2}\pi\sigma \int_a^b y^4 dx,$$

gdzie σ oznacza stałą gęstość przestrzenną.

Momentem statycznym mas $m_1, m_2, \ldots, m_k$ względem osi Ox nazywamy sumę

(20.4.5) $$M_x = \sum_{i=1}^{k} m_i y_i,$$

gdzie y_i oznacza odległość masy m_i od osi Ox.

Moment statyczny łuku AB względem osi Ox wyraża się całką

(20.4.6) $$M_x = \lambda \int_A^B y\,dL,$$

gdzie λ oznacza gęstość liniową, a dL jest różniczką łuku AB (por. wzór (20.2.2)).

Moment statyczny trapezu krzywoliniowego względem osi Ox (rys. 20.10), ograniczonego łukiem AB krzywej $y=f(x)$ leżącym nad osią Ox, rzędną początkową $A'A$ w punkcie $x=a$, rzędną końcową $B'B$ w punkcie $x=b$ oraz odcinkiem $A'B'$ osi Ox, wyraża się całką

(20.4.7) $$M_x = \tfrac{1}{2}\rho \int_a^b y^2 dx,$$

gdzie ρ oznacza stałą gęstość powierzchniową.

Współrzędne środka ciężkości mas $m_1, m_2, \dots, m_k$ wyrażają się wzorami

(20.4.8)
$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i},$$

gdzie x_i, y_i są to współrzędne masy m_i.

Współrzędne środka ciężkości łuku krzywej AB o stałej gęstości liniowej λ wyrażają się wzorami

(20.4.9)
$$\xi = \frac{\int_A^B x\,dL}{\int_A^B dL}, \quad \eta = \frac{\int_A^B y\,dL}{\int_A^B dL},$$

gdzie dL jest różniczką łuku AB (por. wzór (20.2.2)).

Współrzędne środka ciężkości trapezu krzywoliniowego (rys. 20.10), ograniczonego łukiem AB krzywej $y=f(x)$ leżącym nad osią Ox, rzędną początkową $A'A$ w punkcie $x=a$, rzędną końcową $B'B$ w punkcie $x=b$ oraz odcinkiem $A'B'$ osi Ox, wyrażają się wzorami

(20.4.10)
$$\xi = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}, \quad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx},$$

przy założeniu, że gęstość powierzchniowa ρ jest stała.

Jeżeli trapez krzywoliniowy $A'ABB'$ obraca się dookoła osi Ox, to *środek ciężkości bryły obrotowej*, która przy tym powstaje, leży na osi Ox i ma współrzędne

(20.4.11)
$$\xi = \frac{\int_a^b xy^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}, \quad \eta = 0.$$

Często do obliczenia współrzędnych środka ciężkości pomocna bywa następująca

REGUŁA GULDINA. *Jeżeli obszar płaski G obraca się dookoła osi nie przecinającej go i położonej w tej samej płaszczyźnie, to objętość V powstałej przez obrót bryły równa się iloczynowi pola P tego obszaru przez długość okręgu $2\pi r$ opisanego w tym obrocie przez środek ciężkości obszaru G.*

ZADANIE 20.90. Obliczyć moment bezwładności względem osi Ox łuku asteroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, znajdującego się ponad osią Ox w przedziale $0 \leqslant x \leqslant a$, zakładając, że gęstość liniowa λ jest stała.

Rozwiązanie. Moment bezwładności łuku krzywej względem osi Ox znajdujemy ze wzoru (20.4.1). W danym zadaniu mamy $y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$. Stąd

$$y'=\tfrac{3}{2}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(-\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})=-\frac{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Obliczamy różniczkę łuku krzywej

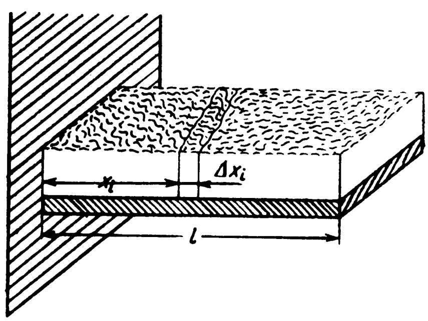
$$dL=\sqrt{1+\frac{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx.$$

Teraz obliczamy poszukiwany moment bezwładności

$$I_x=\int_0^a \lambda(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3\,a^{\frac{1}{3}}\,x^{-\frac{1}{3}}\,dx=\lambda a^{\frac{1}{3}}\int_0^a (a^2x^{-\frac{1}{3}}-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x-x^{\frac{5}{3}})\,dx=$$

$$=\lambda a^{\frac{1}{3}}\left[\tfrac{3}{2}a^2x^{\frac{2}{3}}-\tfrac{9}{4}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}+\tfrac{3}{2}a^{\frac{2}{3}}x^2-\tfrac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\right]_0^a=\tfrac{3}{8}\lambda a^3.$$

ZADANIE 20.91. Deska o długości l zamocowana z jednej strony, została pokryta równomiernie śniegiem. Ciężar śniegu przypadający na jednostkę długości deski wynosi p. Obliczyć całkowity moment zginający deskę, wywołany ciężarem śniegu (rys. 20.12).



Rys. 20.12

Rozwiązanie. Ciężar śniegu obciążającego deskę na długości Δx wynosi $\Delta P=p\,\Delta x$. Moment wywołany tym ciężarem wynosi $\Delta M=xp\,\Delta x$. Całkowity moment wywołany ciężarem śniegu wynosi

$$M=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}px_i\Delta x_i=\int_0^l px\,dx=p\int_0^l x\,dx=p\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^l=\tfrac{1}{2}pl^2.$$

ZADANIE 20.92. Obliczyć moment bezwładności łuku cykloidy $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $a>0$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, względem osi Ox zakładając, że gęstość liniowa λ jest stała.

Rozwiązanie. Wiemy, że dla cykloidy $dL=2a\sin\frac{1}{2}t\,dt$ (por. zad. 20.25). Mamy więc

$$I_x=\int_0^{2\pi}\lambda a^2(1-\cos t)^2\,2a\sin\tfrac{1}{2}t\,dt=8\lambda a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\tfrac{1}{2}t\,dt,$$

gdyż $1-\cos t=2\sin^2 \frac{1}{2}t$. Aby obliczyć całkę nieoznaczoną, wykonujemy podstawienie $\cos\frac{1}{2}t=u$, skąd $-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}t\,dt=du$, czyli $\sin\frac{1}{2}t\,dt=-2\,du$. Mamy więc

$$\int \sin^5 \tfrac{1}{2}t\,dt=\int (1-\cos^2\tfrac{1}{2}t)^2 \sin\tfrac{1}{2}t\,dt=-2\int (1-u^2)^2\,du=-2\int (1-2u^2+u^4)\,du=$$
$$=-2\left(u-\tfrac{2}{3}u^3+\tfrac{1}{5}u^5\right)=-2\left(\cos\tfrac{1}{2}t-\tfrac{2}{3}\cos^3\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{5}\cos^5\tfrac{1}{2}t\right).$$

Korzystając z tego wyniku otrzymujemy

$$I_x=8\lambda a^3(-2)\left[\cos\tfrac{1}{2}t-\tfrac{2}{3}\cos^3\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{5}\cos^5\tfrac{1}{2}t\right]_0^{2\pi}=-16\lambda a^3\left(\left(-1+\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{5}\right)-\left(1-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{5}\right)\right)$$

i po redukcji ostatecznie otrzymujemy $I_x=\frac{256}{15}\lambda a^3$.

Zadanie 20.93. Długi zbiornik w kształcie prostopadłościanu napełniony jest wodą do wysokości h. Obliczyć moment M przypadający na jednostkę długości zbiornika, wywołany ciśnieniem p wody, dążący do odgięcia ścianki bocznej zbiornika u jej podstawy.

Rozwiązanie. Na głębokości $h-x_i$ panuje ciśnienie $p_{x_i}=dg(h-x_i)$, gdzie d oznacza gęstość wody, a g — przyśpieszenie ziemskie. Siła działająca na element ścianki o powierzchni $1\cdot\Delta x_i$ wynosi

$$P_{x_i}=p_{x_i}\cdot 1\cdot\Delta x_i=dg\,(h-x_i)\,\Delta x_i,$$

moment wywołany tą siłą jest równy

$$\Delta M_{x_i}=\Delta P_{x_i}x_i=dg\,(hx_i-x_i^2)\,\Delta x_i.$$

Całkowity moment odginający ściankę wynosi więc

$$M=\lim_{\Delta M_{x_i}\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta M_{x_i}=\lim_{x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}dg\,(hx_i-x_i^2)\,\Delta x_i=$$
$$=\int_0^h dg\,(hx-x^2)\,dx=dg\int_0^h (hx-x^2)\,dx=$$
$$=dg\left[\tfrac{1}{2}hx^2-\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^h=dg\left(\tfrac{1}{2}h^3-\tfrac{1}{3}h^3\right)=\tfrac{1}{6}\,dgh^3.$$

Zadanie 20.94. Obliczyć moment bezwładności względem osi Ox obszaru ograniczonego łukiem paraboli $y^2=2px$ znajdującym się ponad osią Ox, odcinkiem osi Ox oraz rzędnymi w punktach $x=a$ i $x=b$, gdzie $0<a<b$, przy założeniu, że gęstość powierzchniowa ρ jest stała.

Rozwiązanie. Moment bezwładności trapezu krzywoliniowego względem osi Ox obliczamy ze wzoru (20.4.3). W danym zadaniu mamy

$$I_x=\tfrac{1}{3}\rho\int_a^b (2px)^{\frac{3}{2}}\,dx=\tfrac{1}{3}(2p)^{\frac{3}{2}}\rho\int_a^b x^{\frac{3}{2}}\,dx=\tfrac{2}{3}p\sqrt{2p}\,\rho\cdot\tfrac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_a^b=\tfrac{4}{15}p\sqrt{2p}\,\rho\,(b^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}).$$

Zadanie 20.95. Obliczyć moment bezwładności B koła zamachowego o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R, szerokość koła a. Koło zamachowe wykonane jest z materiału o gęstości γ.

Rozwiązanie. Moment bezwładności pierścienia o grubości Δx_i i promieniu x_i wynosi $\Delta B_i = \Delta m_i x_i^2$, gdzie $\Delta m_i = 2\pi x_i a \Delta x_i \gamma$, masa danego pierścienia, zatem otrzymujemy

$$\Delta B_i = 2\pi x_i a \Delta x_i \gamma x_i^2 = 2\pi a \gamma x_i^3 \Delta x_i .$$

Moment bezwładności całego koła zamachowego wynosi więc

$$B = \lim_{\Delta B_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta B_i = 2\pi a \gamma \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \Delta x_i =$$

$$= 2\pi a \gamma \int_r^R x^3 dx = 2\pi a \gamma \left[\tfrac{1}{4} x^4\right]_r^R = \tfrac{1}{2}\pi a \gamma (R^4 - r^4).$$

ZADANIE 20.96. Parabola $y^2 = 2px$, gdzie $p > 0$, obraca się dookoła osi Ox. Obliczyć moment bezwładności względem osi Ox odcinka paraboloidy obrotowej w przedziale $0 \leqslant x \leqslant a$, zakładając stałą gęstość przestrzenną σ

Rozwiązanie. Mamy

$$I_x = \tfrac{1}{2}\pi\sigma \int_0^a y^4 dx = 2\pi\sigma p^2 \int_0^a x^2 dx = \tfrac{2}{3}\pi\sigma p^2 a^3$$

ZADANIE 20.97. Obliczyć moment statyczny względem osi Ox łuku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, gdzie $a > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, przy założeniu, że gęstość liniowa λ jest stała.

Rozwiązanie. Moment statyczny łuku AB obliczamy ze wzoru (20.4.6). Całkę $\int y\,dL$ dla cykloidy obliczyliśmy w zadaniu 20.64. Mamy więc $M_x = \frac{32}{3}\lambda a^2$.

ZADANIE 20.98. Obliczyć moment statyczny względem osi Ox obszaru górnej półelipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

przy założeniu, że gęstość powierzchniowa ρ jest stała.

Rozwiązanie. Moment statyczny trapezu krzywoliniowego względem osi Ox obliczamy ze wzoru (20.4.7). Z równania elipsy obliczamy $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Mamy

$$M_x = \tfrac{1}{2}\rho \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = \rho \frac{b^2}{2a^2}\left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{+a} = \tfrac{2}{3}\rho a b^2 .$$

ZADANIE 20.99. Obliczyć współrzędne środka ciężkości łuku asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, gdzie $a > 0$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $y \geqslant 0$.

Rozwiązanie. Wzory na środek ciężkości łuku AB są

$$\xi = \frac{1}{L}\int_A^B x\,dL, \qquad \eta = \frac{1}{L}\int_A^B y\,dL,$$

gdzie $L=\int\limits_A^B dL$ oznacza długość łuku (por. wzór (20.4.9)). W zadaniu 20.90 dla asteroidy znaleźliśmy $dL=a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx$. Obliczamy

$$\int\limits_A^B x\,dL=\int\limits_0^a xa^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx=a^{\frac{1}{3}}\int\limits_0^a x^{\frac{2}{3}}dx=a^{\frac{1}{3}}\cdot\tfrac{3}{5}\left[x^{\frac{5}{3}}\right]_0^a=\tfrac{3}{5}a^2,$$

$$\int\limits_A^B dL=\int\limits_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx=a^{\frac{1}{3}}\cdot\tfrac{3}{2}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_0^a=\tfrac{3}{2}a.$$

Stąd

$$\xi=\frac{\frac{3}{5}a^2}{\frac{3}{2}a}=\tfrac{2}{5}a.$$

Zupełnie podobnie znajdziemy $\int\limits_0^a y\,dL=\frac{3}{5}a^2$ i następnie $\eta=\frac{2}{5}a$.

Uwaga. Jeżeli w równaniu asteroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ zastąpimy x przez y i na odwrót, to równanie nie ulegnie zmianie. Z tego wniosek, że asteroida jest symetryczna względem prostej $y=x$ (por. zad. 20.3) i że na tej prostej leży środek ciężkości ćwiartki asteroidy. Wiemy, że $\xi=\frac{2}{5}a$, możemy więc wnioskować, że $\eta=\frac{2}{5}a$.

Zadanie 20.100. Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego ćwiartką elipsy

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

gdzie $a>0$, $b>0$, $0\leqslant x\leqslant a$, oraz osiami współrzędnych Ox i Oy.

Rozwiązanie. Zadanie rozwiążemy dwoma sposobami.

Sposób I. Współrzędne środka ciężkości obliczymy według wzorów (20.4.10), tzn.

$$\xi=\frac{\int\limits_0^a xy\,dx}{\int\limits_0^a y\,dx},\qquad \eta=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_0^a y^2dx}{\int\limits_0^a y\,dx}.$$

Obliczamy kolejno:

$$\int\limits_0^a xy\,dx=\frac{b}{a}\int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{b}{2a}\left[-\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{1}{3}a^2b,$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^a y^2dx=\frac{b^2}{2a^2}\int\limits_0^a (a^2-x^2)\,dx=\frac{b^2}{2a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{1}{3}ab^2,$$

$$\int\limits_0^a y\,dx=\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a=\frac{1}{4}\pi ab.$$

(por. wzór (17.2.6)). Wyznaczamy współrzędne środka ciężkości

$$\xi=\frac{\frac{1}{3}a^2b}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4a}{3\pi},\qquad \eta=\frac{\frac{1}{3}ab^2}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4b}{3\pi}.$$

Sposób II (z zastosowaniem reguły Guldina). Pole ćwiartki elipsy wynosi $\frac{1}{4}\pi ab$ (por. zad. 20.1, str. 382). Objętość bryły powstałej przez obrót ćwiartki elipsy dookoła osi Ox równa się $\frac{2}{3}\pi ab^2$ (por. zad. 20.65, str. 393). Na podstawie reguły Guldina mamy

$$\tfrac{2}{3}\pi ab^2=\tfrac{1}{4}\pi ab\cdot 2\pi\eta,\qquad \text{skąd}\qquad \eta=\frac{4b}{3\pi}.$$

Dla znalezienia odciętej środka ciężkości ćwiartki elipsy stosujemy obrót dookoła osi Oy i mamy

$$\tfrac{2}{3}\pi a^2b=\tfrac{1}{4}\pi ab\cdot 2\pi\xi,\qquad \text{skąd}\qquad \xi=\frac{4a}{3\pi}.$$

Zadanie 20.101. Wyznaczyć środek ciężkości bryły powstałej z obrotu dookoła osi Ox paraboli $y^2=2px$, gdzie $p>0$, a odcięta x przebiega przedział $0\leqslant x\leqslant a$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\xi=\frac{\int\limits_0^a xy^2dx}{\int\limits_0^a y^2dx}=\frac{\int\limits_0^a x^2dx}{\int\limits_0^a xdx}=\frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{2}a^2}=\tfrac{2}{3}a,\qquad \eta=0.$$

Zadania

20.102. Obliczyć moment bezwładności prostokąta o bokach a i b względem boku a, przyjmując stałą gęstość powierzchniową ρ.

20.103. Obliczyć moment bezwładności względem osi obrotu walca obrotowego o promieniu r i wysokości h, przyjmując stałą gęstość przestrzenną δ.

20.104. Obliczyć moment bezwładności powierzchni trójkąta o podstawie a i wysokości h względem podstawy, przyjmując stałą gęstość powierzchniową ρ.

Wskazówka. Wystarczy obliczyć moment bezwładności trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i h.

20.105. Obliczyć moment bezwładności stożka obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h względem osi obrotu, przyjmując stałą gęstość przestrzenną δ.

20.106. Obliczyć moment bezwładności okręgu o promieniu r względem średnicy okręgu, przyjmując stałą gęstość liniową λ.

20.107. Obliczyć moment bezwładności koła o promieniu r względem średnicy koła, przyjmując stałą gęstość powierzchniową ρ.

20.108. Obliczyć moment bezwładności kuli o promieniu r względem średnicy kuli, przyjmując stałą gęstość przestrzenną δ.

20.109. Obliczyć moment bezwładności względem osi Ox bryły otrzymanej z obrotu dookoła tej osi elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$, $b>0$, przyjmując stałą gęstość przestrzenną δ.

20.110. Obliczyć moment bezwładności względem osi Ox linii łańcuchowej $y=\frac{1}{2}a(e^{x/a}+ +e^{-x/a})$, $a>0$, $-a\leqslant x\leqslant a$, przyjmując stałą gęstość liniową λ.

20.111. Obliczyć moment statyczny prostokąta o podstawie a i wysokości h względem podstawy, przyjmując stałą gęstość powierzchniową ρ.

20.112. Obliczyć momenty statyczne trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b względem boków trójkąta, przyjmując stałą gęstość powierzchniową ρ.

20.113. Obliczyć moment statyczny względem osi Ox parabolicznego odcinka ograniczonego parabolą $y=h\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, $a>0$, $h>0$, i osią Ox, przyjmując stałą gęstość powierzchniową ρ.

20.114. Obliczyć moment statyczny względem osi Ox i Oy parabolicznego odcinka ograniczonego parabolą $y=\sqrt{2px}$, osią Ox i prostą $x=x_0$.

20.115. Obliczyć moment statyczny względem osi Ox i Oy pola ograniczonego krzywą $y=a\cos\frac{2\pi}{b}x$, osią Ox i Oy.

20.116. Obliczyć moment statyczny względem osi Ox łuku paraboli $y=\sqrt{2px}$, $0\leqslant x\leqslant 2$.

20.117. Obliczyć moment statyczny względem osi Ox i Oy pola ograniczonego krzywą $x=t^2-t$, $y=t^3+t^2$ i osią Ox.

20.118. Obliczyć moment statyczny łuku tangensoidy w przedziale $\langle 0, \frac{1}{4}\pi\rangle$.

20.119. Znaleźć współrzędne środka ciężkości łuku półokręgu $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r\leqslant x\leqslant r$.

20.120. Obliczyć współrzędne środka ciężkości półkola ograniczonego osią odciętych i półokręgiem $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r\leqslant x\leqslant r$.

20.121. Wyznaczyć środek ciężkości półkuli powstałej z obrotu ćwiartki koła $y= =\sqrt{r^2-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant r$ dookoła osi Ox.

20.122. Wyznaczyć środek ciężkości stożka obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h.

20.123. Wyznaczyć środek ciężkości części paraboloidy obrotowej odciętej płaszczyzną prostopadłą do osi paraboloidy, mając dany promień r podstawy bryły oraz wysokość bryły h.

Wskazówka. Bryła powstaje z obrotu dookoła osi Ox paraboli

$$y^2=r^2\left(1-\frac{x}{h}\right),\quad 0\leqslant x\leqslant h.$$

20.124. Wyznaczyć środek ciężkości łuku linii łańcuchowej $y=\frac{1}{2}a(e^{x/a}+e^{-x/a})$, $a>0$, $-a\leqslant x\leqslant a$.

20.125. Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego cykloidą $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $a>0$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, i osią Ox.

20.126. Wyznaczyć środek ciężkości bryły powstałej z obrotu dookoła osi Ox kardioidy $r=a(1+\cos\theta)$, $a>0$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

Wskazówka. $x=a\cos\theta\,(1+\cos\theta)$, $y=a\sin\theta\,(1+\cos\theta)$.

20.127. Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego cisoidą Dioklesa $x=2r\sin^2 t$, $y=2r\sin^2 t\cdot\operatorname{tg} t$, $\frac{1}{12}\pi\leqslant t\leqslant\frac{1}{6}\pi$, i osią Ox.

20.128. Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego asteroidą $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\pi$.

20.129. Obliczyć współrzędne środka ciężkości pola ograniczonego krzywą $y=a\cos\frac{2\pi}{b}x$, osią Ox i Oy.

20.130. Wyznaczyć środek ciężkości bryły powstałej z obrotu dookoła osi Ox cykloidy $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant\pi$.

20.131. Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego linią $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^3$.

20.132. Wyznaczyć środek ciężkości łuku linii $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^3$, $0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$.

20.133. Obliczyć środek ciężkości pola ograniczonego krzywą $x=t^2-t$, $y=t^3+t^2$ i osią Ox.

20.134. Obliczyć współrzędne środka ciężkości pola ograniczonego parabolami $y^2=ax$, $x^2=ay$, $a>0$.

20.135. Obliczyć współrzędne środka ciężkości pola ograniczonego łukiem kardioidy $r=a(1+\cos\theta)$.

20.136. Obliczyć współrzędne środka ciężkości odcinka parabolicznego ograniczonego parabolą $y=\sqrt{2px}$, osią Ox i prostą $x=x_0$.

§ 20.5. INNE ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁEK

ZADANIE 20.137. Pręt metalowy o masie m osadzony jest na wale wirującym z prędkością kątową ω. Długość pręta wynosi l, promień wału r. Obliczyć siłę odśrodkową F działającą na pręt w miejscu zamocowania go w wale (rys. 20.13).

Rozwiązanie. Siła dośrodkowa wywołana ruchem masy elementu pręta o długości Δx_i wynosi

$$\Delta F_i=\frac{m\Delta x_i}{l}\,\omega^2 x.$$

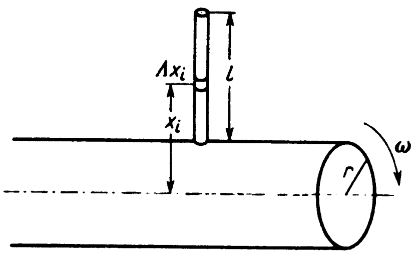
Całkowita siła dośrodkowa działająca na cały pręt wynosi

$$F=\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}\frac{m\Delta x_i}{l}\,\omega^2 x_i=\int_r^{r+l}\frac{m\omega^2}{l}\,x\,dx=\frac{m\omega^2}{l}\left[\frac{x^2}{2}\right]_r^{r+l}=$$

$$=\frac{m\omega^2}{l}\cdot\frac{r^2+2rl+l^2-r^2}{2}=\tfrac{1}{2}m\omega^2(2r+l).$$

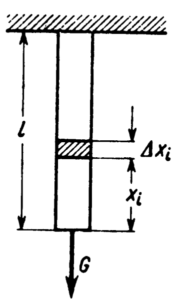
Szukana siła odśrodkowa działająca na przekrój pręta w miejscu zamocowania go równa się sile dośrodkowej działającej na cały pręt:

$$F=\tfrac{1}{2}m\omega^2(2r+l).$$

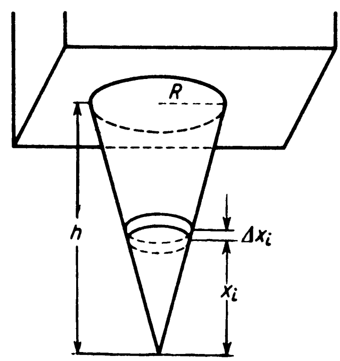


Rys. 20.13

ZADANIE 20.138. Obliczyć wydłużenie pręta pod wpływem własnego ciężaru. Ciężar pręta wynosi G, długość l, powierzchnia przekroju S. Pręt jest zawieszony na jednym swoim końcu (rys. 20.14).



Rys. 20.14



Rys. 20.15

Rozwiązanie. Wydłużenie elementu pręta o długości Δx_i wynosi

$$\Delta W_i=\frac{Gx_i}{l}\cdot\frac{x_i}{ES},$$

gdzie E — jest współczynnikiem sprężystości (moduł Younga). Całkowite wydłużenie wynosi

$$W=\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}\frac{Gx_i}{l}\cdot\frac{\Delta x_i}{ES}=\int_0^l\frac{Gx}{l}\cdot\frac{dx}{ES}=\frac{G}{ElS}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l=\frac{Gl}{2ES}.$$

ZADANIE 20.139. Obliczyć wydłużenie się stożka pod wpływem własnego ciężaru G, jeżeli stożek zamocowany, jak na rysunku 20.15. Wysokość stożka wynosi h, promień podstawy R. Stożek jest wykonany z materiału o ciężarze właściwym γ i module Younga E.

Rozwiązanie. Wydłużenie elementu stożka o wysokości Δx_i pod wpływem działania ciężaru G zgodnie z prawem Hooke'a wynosi

$$\Delta W_i = \frac{\Delta x_i G}{E \cdot S_{x_i}}, \quad \text{gdzie} \quad G = \frac{\pi \rho_{x_i}^2 x_i}{3} \gamma,$$

pole zaś przekroju S_{x_i} wyżej wymienionego elementu stożka wynosi $S_{x_i} = \pi \rho_{x_i}^2$. Zatem mamy

$$\Delta W_i = \frac{\Delta x_i \pi \rho_{x_i}^2 x_i \gamma}{E3 \cdot \pi \rho_{x_i}^2} = \frac{\gamma x_i \Delta x_i}{3E}.$$

Całkowite wydłużenie wynosi

$$W = \lim_{\substack{\Delta W_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n} \Delta W_i = \frac{\gamma}{3E} \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n} x_i \Delta x_i = \frac{\gamma}{3E} \int_0^h x\,dx = \frac{\gamma}{3E} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h = \frac{\gamma h^2}{6E}.$$

Zadanie 20.140. Wielkość siły F działającej wzdłuż drogi x zmienia się według wzoru

$$F = 10 \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{3}{1+x^2}.$$

Obliczyć pracę L wykonaną przy pokonywaniu danej siły wzdłuż drogi $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Rozwiązanie. Mamy

$$L = \int_0^1 F\,dx = \int_0^1 \left(10 \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{3}{1+x^2} \right) dx = \left[\frac{20}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} + 3 \operatorname{arctg} x \right]_0^1 =$$

$$= \frac{20}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} + 3 \operatorname{arctg} 1 - \frac{20}{\pi} \sin 0 - 3 \operatorname{arctg} 0 = \frac{20}{\pi} + \frac{3\pi}{4} = \frac{80 + 3\pi^2}{4\pi}.$$

Zadanie 20.141. Opory ruchu zmieniają się według wzoru $R = 5x^4 + \operatorname{tg} x$. Obliczyć, jaką pracę L trzeba wykonać, aby dane ciało przesunąć wzdłuż drogi $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\pi$.

Rozwiązanie. Mamy

$$L = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} R\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (5x^4 + \operatorname{tg} x)\,dx = [x^5 - \ln(\cos x)]_0^{\frac{1}{4}\pi} =$$

$$= (\tfrac{1}{4}\pi)^5 - \ln(\cos \tfrac{1}{4}\pi) + \ln(\cos 0) = \tfrac{1}{1024}\pi^5 - \ln \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{1024}\pi^5 - \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

Zadanie 20.142. Moc P obciążenia pewnej maszyny zmienia się w czasie t według zależności

$$P = \frac{2t}{t^2+1} + t.$$

Wyznaczyć energię A zużytą w ciągu czasu $0 \leqslant t \leqslant 10$.

Rozwiązanie. Mamy

$$A=\int_0^{10} P\,dt=\int_0^{10}\left(\frac{2t}{t^2+1}+t\right)dt=\left[\ln(t^2+1)+\tfrac{1}{2}t^2\right]_0^{10}=\ln 101+50.$$

ZADANIE 20.143. Moc P silnika w czasie pracy zmieniała się według zależności $P=t\sin t+3t$. Obliczyć pracę L wykonaną w ciągu czasu $0\leqslant t\leqslant\pi$.

Rozwiązanie. Mamy

$$L=\int_0^{\pi} P\,dt=\int_0^{\pi}(t\sin t+3t)\,dt=\left[-t\cos t+\sin t+\tfrac{3}{2}t^2\right]_0^{\pi}=$$

$$=-\pi\cos\pi+\sin\pi+\tfrac{3}{2}\pi^2+0\cos 0-\sin 0-\tfrac{3}{2}0^2=\pi+\tfrac{3}{2}\pi^2=(1+\tfrac{3}{2}\pi)\pi.$$

ZADANIE 20.144. Do źródła prądu zmiennego o napięciu $U=U_m\sin\omega t$, gdzie ω — pulsacja prądu ($\omega=2\pi/T$, T — okres zmian), został włączony odbiornik o oporze czynnym R. Obliczyć energię elektryczną pobraną ze źródła w ciągu czasu $t_1=200T$.

Rozwiązanie. Energię elektryczną pobraną ze źródła w ciągu czasu t_1 obliczamy ze wzoru

$$A=\int_0^{t_1} Ui\,dt,$$

gdzie U chwilowa wartość napięcia $U=U_m\sin\omega t$, a i chwilowa wartość natężenia prądu w obwodzie. Z prawa Ohma wyznaczamy $i=\dfrac{U}{R}=\dfrac{U_m}{R}\sin\omega t$, zatem

$$A=\int_0^{200\,T} U_m\sin\omega t\cdot\frac{U_m}{R}\sin\omega t\,dt=\frac{U_m^2}{R}\int_0^{200\,T}\sin^2\omega t\,dt=$$

$$=\frac{U_m^2}{2R}\int_0^{200\,T}(1-\cos 2\omega t)\,dt=\frac{U_m^2}{2R}\left[t-\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^{200\,T}.$$

Jak wiemy, $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$, zatem $A=\dfrac{U_m^2}{2R}\left(200\,T-\dfrac{T}{4\pi}\sin 800\pi\right)=100\,\dfrac{U_m^2T}{R}$.

ZADANIE 20.145. W pewnym obwodzie prądu zmiennego natężenie prądu i zmienia się według zależności $i=e^{-3t}\sin\frac{1}{2}\pi t$. Obliczyć ilość elektryczności $q=\int_0^{t_1} i\,dt$, jaka przepłynie w danym obwodzie w czasie $0\leqslant t\leqslant 2$.

Rozwiązanie. Mamy

$$q=\int_0^{t_1} i\,dt=\int_0^{2} e^{-3t}\sin\tfrac{1}{2}\pi t\,dt.$$

Całkę nieoznaczoną obliczamy całkując przez części:

$$\int e^{-3t}\sin\tfrac{1}{2}\pi t\,dt = -\tfrac{1}{3}e^{-3t}\sin\tfrac{1}{2}\pi t+\tfrac{1}{6}\pi\int e^{-3t}\cos\tfrac{1}{2}\pi t\,dt=$$

$$=-\tfrac{1}{3}e^{-3t}\sin\tfrac{1}{2}\pi t-\tfrac{1}{18}\pi e^{-3t}\cos\tfrac{1}{2}\pi t-\tfrac{1}{36}\pi^2\int e^{-3t}\sin\tfrac{1}{2}\pi t\,dt\ ;$$

otrzymujemy

$$\frac{36+\pi^2}{36}\int e^{-3t}\sin\tfrac{1}{2}\pi t\,dt=-\tfrac{1}{3}e^{-3t}\sin\tfrac{1}{2}\pi t-\tfrac{1}{18}\pi e^{-3t}\cos\tfrac{1}{2}\pi t+C\,,$$

skąd

$$\int e^{-3t}\sin\tfrac{1}{2}\pi t\,dt=-\frac{12}{36+\pi^2}e^{-3t}\sin\tfrac{1}{2}\pi t-\frac{2\pi}{36+\pi^2}e^{-3t}\cos\tfrac{1}{2}\pi t+C_1\,,$$

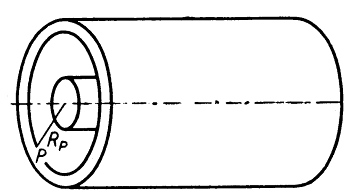
a więc

$$q=\left[-\frac{12}{36+\pi^2}e^{-3t}\sin\tfrac{1}{2}\pi t-\frac{2\pi}{36+\pi^2}e^{-3t}\cos\tfrac{1}{2}\pi t\right]_0^2=$$

$$=-\frac{12}{36+\pi^2}e^{-6}\sin\pi-\frac{2\pi}{36+\pi^2}e^{-6}\cos\pi+\frac{12}{36+\pi^2}e^{0}\sin 0+\frac{2\pi}{36+\pi^2}e^{0}\cos 0=$$

$$=\frac{2\pi}{36+\pi^2}e^{-6}+\frac{2\pi}{36+\pi^2}=\frac{2\pi}{36+\pi^2}(e^{-6}+1)\,.$$

ZADANIE 20.146. Wyznaczyć napięcie U pomiędzy punktami A i B pola elektrycznego wytworzonego między okładkami kondensatora walcowego o długości l (rys. 20.16). Od-



Rys. 20.16

ległość punktu A od osi symetrii wynosi R_A, punktu zaś B jest R_B. Natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie P pola, odległym o R_P od osi symetrii kondensatora, wyraża się wzorem $K=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon Rl}$, gdzie Q – ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze, ε – stała dielektryczna.

Rozwiązanie. Mamy

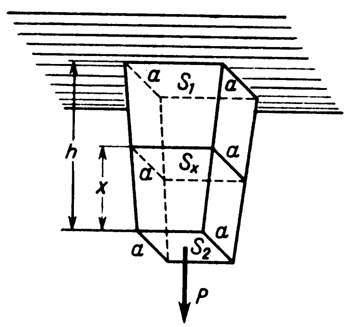
$$U=\int_{R_A}^{R_B}K\,dR=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\int_{R_A}^{R_B}\frac{dR}{R}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}(\ln R_B-\ln R_A)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{R_B}{R_A}.$$

ZADANIE 20.147. Naładowany elektrycznością kondensator jest rozładowany przez pewien opór czynny tak, że natężenie prądu w obwodzie przedstawia wzór $i=5e^{-t/10}$. Obliczyć, jaka ilość elektryczności $q=\int_{t_1}^{t_2} i\,dt$ przepływa przez obwód w czasie $0\leqslant t\leqslant 10$.

Rozwiązanie. Mamy

$$q=\int_0^{10} i\,dt=5\int_0^{10} e^{-t/10}dt=-50\left[e^{-t/10}\right]_0^{10}=-50(e^{-1}-1)=50\frac{e-1}{e}.$$

ZADANIE 20.148. Obliczyć, o ile wydłuży się pręt o kształcie podanym na rysunku 20.17 pod wpływem obciążenia siłą P.



Rys. 20.17

Rozwiązanie. Wiemy, że zgodnie z prawem Hooke'a przyrost długości

(1) $$\Delta x=\int_0^h \frac{P}{ES_x}dx,$$

gdzie h długość pręta, S_x przekrój poprzeczny pręta w odległości x od początku pręta, a E moduł Younga. Oznaczmy przez S_1 pole górnej podstawy, a przez S_2 pole dolnej podstawy; wówczas

$$\frac{S_1-S_2}{h}=\frac{S_x-S_2}{x}, \quad \text{skąd} \quad S_x=\frac{S_1-S_2}{h}x+S_2.$$

Szukany przyrost długości wynosi

$$\Delta x=\int_0^h \frac{P}{ES_x}dx=\frac{P}{E}\int_0^h \frac{dx}{\frac{S_1-S_2}{h}x+S_2}=\frac{Ph}{E(S_1-S_2)}\int_0^h \frac{dx}{x+\frac{hS_2}{S_1-S_2}}=$$

$$=\frac{Ph}{E(S_1-S_2)}\left[\ln\left|x+\frac{hS_2}{S_1-S_2}\right|\right]_0^h=\frac{Ph}{E(S_1-S_2)}\left(\ln\left|h+\frac{hS_2}{S_1-S_2}\right|-\ln\left|\frac{hS_2}{S_1-S_2}\right|\right)=$$

$$=\frac{Ph}{E(S_1-S_2)}\ln\frac{S_1}{S}.$$

ZADANIE 20.149. Pręt w kształcie ściętego stożka jest obciążony siłą P. Promień podstawy górnej wynosi R, dolnej r ($R>r$), wysokość stożka h. Obliczyć wydłużenie Δx pręta pod wpływem działania siły P stosując wzór wynikający z prawa Hooke'a (por. wzór (1), zad. 20.148).

Rozwiązanie. Promień r_x przekroju pręta w odległości x od dolnej podstawy wyznaczamy z proporcji

$$\frac{R-r}{h}=\frac{r_x-r}{x}, \quad \text{skąd} \quad r_x=\frac{R-r}{h}x+r.$$

Pole przekroju wynosi $S_x=\pi r_x^2=\pi\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2$, zatem

$$\Delta x=\int_0^h \frac{P}{ES_x}dx=\frac{P}{\pi E}\int_0^h \frac{dx}{\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2}.$$

Stosując podstawienie $\frac{R-r}{h}x+r=z$, skąd $\frac{R-r}{h}dx=dz$, obliczamy całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2}=\frac{h}{R-r}\int\frac{dz}{z^2}=\frac{h}{R-r}\left(-\frac{1}{z}\right)=\frac{-h}{R-r}\cdot\frac{1}{\frac{R-r}{h}x+r}.$$

Stąd

$$\Delta x=\frac{P}{\pi E}\cdot\frac{-h}{R-r}\left[\frac{1}{\frac{R-r}{h}x+r}\right]_0^h=\frac{P}{\pi E}\cdot\frac{-h}{R-r}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)=\frac{Ph}{\pi ErR}.$$

ZADANIE 20.150. Skuteczną wartość natężenia prądu elektrycznego zmiennego określa wzór

$$J=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2dt},$$

gdzie T jest okresem zmian. Obliczyć skuteczną wartość natężenia prądu sinusoidalnego zmiennego $i=J_m\sin\frac{2\pi}{T}t$.

Rozwiązanie. Mamy

$$J=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T J_m^2\sin^2\frac{2\pi}{T}t\,dt}=J_m\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\sin^2\frac{2\pi}{T}t\,dt}.$$

Obliczamy całkę nieoznaczoną

$$\int \sin^2 \frac{2\pi}{T} t\,dt = \tfrac{1}{2}\int \left(1-\cos\frac{4\pi}{T}t\right)dt = \tfrac{1}{2}\left(t-\frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{T}t\right)+C.$$

Zatem otrzymujemy

$$J = J_m\sqrt{\frac{1}{2T}\left[t-\frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{T}t\right]_0^T} = J_m\sqrt{\frac{1}{2T}\left(T-\frac{T}{4\pi}\sin 4\pi\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}J_m.$$

Zadanie 20.151. Do obwodu elektrycznego zawierającego oporność czynną i indukcyjność przyłożone jest napięcie sinusoidalnie zmienne

$$U = U_m \sin\frac{2\pi}{T}t.$$

Sinusoida prądu płynącego w tym obwodzie przesunięta jest względem sinusoidy napięcia o kąt φ, a więc

$$i = J_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right).$$

Średnią moc prądu zwaną mocą czynną określa wzór

$$P = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{1}{2}T} Ui\,dt,$$

gdzie T jest okresem zmian. Obliczyć średnią moc prądu w danym obwodzie.

Rozwiązanie. Mamy

$$P = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{1}{2}T} Ui\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{1}{2}T} U_m J_m \sin\frac{2\pi}{T}t\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)dt.$$

Stosując wzór trygonometryczny $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ możemy napisać

$$P = \frac{2U_mJ_m}{T}\int_0^{\frac{1}{2}T}\frac{1}{2}\left[\cos\varphi-\cos\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right]dt = \frac{U_mJ_m}{T}\left[t\cos\varphi-\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right]_0^{\frac{1}{2}T} =$$

$$= \frac{U_mJ_m}{T}\left(\frac{T}{2}\cos\varphi-\frac{T}{4\pi}\sin(2\pi+\varphi)+\frac{T}{4\pi}\sin\varphi\right) = \tfrac{1}{2}U_mJ_m\cos\varphi.$$

Zadanie 20.152. Ilość ciepła potrzebna do ogrzania ciała o masie m i cieple właściwym c od temperatury t_1 do t_2 wyraża się wzorem

$$q = m\int_{t_1}^{t_2} c\,dt.$$

Gazy wieloatomowe wykazują zależność ciepła właściwego od temperatury według równania $c=c_0+at+bt^2$. Obliczyć ilość ciepła potrzebną do ogrzania danej masy gazu m od temperatury $t_1=0$ do $t_2=\tau$.

Rozwiązanie. Mamy

$$q=m\int_{t_1}^{t_2} c\,dt=m\int_0^{\tau}(c_0+at+bt^2)\,dt=m\left(c_0t+\frac{at^2}{2}+\frac{bt^3}{3}\right)_0^{\tau}=m\left(c_0\tau+\frac{a\tau^2}{2}+\frac{b\tau^3}{3}\right).$$

Zadanie 20.153. Wskutek działania ciśnienia p następuje zmiana objętości gazu od v_1 do v_2. Praca wykonana przez ten gaz, wyraża się wzorem $L=\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$. Wyznaczyć pracę przy przemianie izobarycznej, tzn. przy $p=\text{const}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$L=\int_{v_1}^{v_2} p\,dv=p\int_{v_1}^{v_2} dv=p(v_2-v_1).$$

Zadanie 20.154. Obliczyć pracę $L=\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$ wykonaną przez rozprężający się gaz. Objętość początkowa gazu wynosiła $v_1=2500\ \text{cm}^3$, końcowa zaś $v_2=7500\ \text{cm}^3$, ciśnienie początkowe $p_1=5\ \text{kG/cm}^2$, rozprężanie odbywało się przy stałej temperaturze ($pv=\text{const}$).

Rozwiązanie. Wyznaczamy funkcję określającą objętość v w zależności od ciśnienia p: mamy

$$pv=p_1v_1=2500\cdot 5=12500. \qquad \text{skąd} \qquad p=\frac{12500}{v}.$$

Szukana praca wynosi więc

$$L=\int_{v_1}^{v_2} p\,dv=12\,500\int_{2500}^{7500}\frac{dv}{v}=12\,500\ln v\Big|_{2500}^{7500}=$$

$$=12\,500\ln\tfrac{7500}{2500}=12\,500\ln 3\ \text{kGcm}=125\ln 3\ \text{kGm}.$$

Zadanie 20.155. Obliczyć pracę $L=\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$ wykonaną przez rozprężający się adiabatycznie gaz, jeżeli objętość początkowa wynosiła v_1, końcowa zaś v_2, a ciśnienie początkowe wynosiło p_1. Równanie adiabaty ma postać $pv^k=p_1v_1^k$, gdzie $k=\text{const}$.

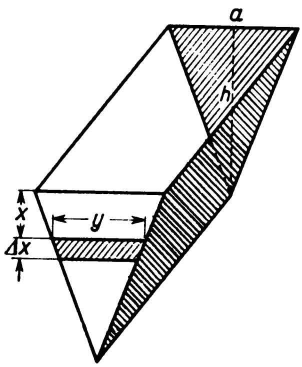
Rozwiązanie. Z równania adiabaty wyznaczamy ciśnienie $p=\dfrac{p_1v_1^k}{v^k}$, a więc szukana praca wynosi

$$L=\int_{v_1}^{v_2} p\,dv=p_1v_1^k\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v^k}=p_1v_1^k\left[\frac{v^{1-k}}{1-k}\right]_{v_1}^{v_2}=p_1v_1^k\,\frac{v_2^{1-k}-v_1^{1-k}}{1-k}=\frac{p_1v_1-p_1v_1^kv_2^{1-k}}{k-1}.$$

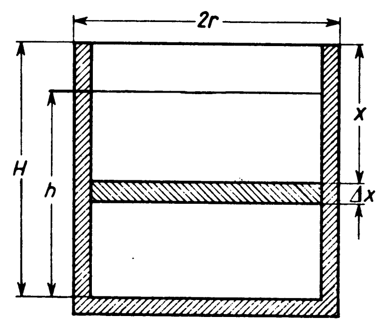
Podstawiając $p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$ otrzymujemy ostatecznie

$$L = \frac{p_1 v_1 - p_2 v_2}{k-1}.$$

ZADANIE 20.156. Obliczyć siłę nacisku wody na pionową ścianę w kształcie trójkąta (rys. 20.18). Powierzchnia wody w zbiorniku sięga podstawy trójkąta a, tzn. że jej poziom jest równy wysokości trójkąta h (przyjąć ciężar właściwy wody $\delta = 1$ G/cm³).



Rys. 20.18



Rys. 20.19

Rozwiązanie. Siłę nacisku obliczamy jako całkę z ciśnienia p względem ds (powierzchni).

(1) $$F = \int_0^{s_1} p\,ds,$$

gdzie $ds = y\,dx$, $p = \delta x$, a x, y jak na rysunku 20.18. Wyznaczamy związek między x a y; mamy

$$\frac{h-x}{h} = \frac{y}{a}, \quad \text{skąd} \quad y = a \cdot \frac{h-x}{h}.$$

Wstawiając wyznaczoną wartość na y i $p = \delta x$ oraz $ds = y\,dx$ do całki (1) otrzymujemy

$$F = \int_0^h \delta x a \cdot \frac{h-x}{h}\,dx = \frac{a\delta}{h}\int_0^h (hx - x^2)\,dx = \frac{a\delta}{h}\left[\frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{6}a\delta h^2 = \frac{1}{6}ah^2.$$

ZADANIE 20.157. Obliczyć pracę, jaką trzeba wykonać, ażeby wypompować wodę z cylindrycznego basenu (rys. 20.19). Promień podstawy basenu wynosi $r = 0{,}5$ m, głębokość $H = 3$ m, poziom wody liczony od dna $h = 2{,}8$ m (przyjąć ciężar właściwy wody $\delta = 1000$ kG/m³).

R o z w i ą z a n i e. Przez x oznaczamy wysokość, na jaką pompujemy wodę o objętości $\Delta v = \pi r^2 \Delta x$. Praca wykonana przy pompowaniu równa się

$$L = \int_0^{v_1} \delta x\, dv = \pi r^2 \delta \int_{H-h}^{H} x\, dx = \pi\, 0{,}5^2 \cdot 1000 \int_{0,2}^{3} x\, dx = 250\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0,2}^{3} =$$

$$= 250\pi \frac{3^2 - 0{,}2^2}{2} = 1120\pi \text{ kGm}.$$

Z a d a n i e 20.158. Obliczyć pracę, jaka zostanie wykonana, jeżeli drut miedziany o długości $l = 1$ m i promieniu przekroju $r = 2$ mm zostanie wydłużony o $\Delta l = 0{,}001$ m. Moduł sprężystości dla miedzi przyjąć $E = 12000$ kG/mm^2.

R o z w i ą z a n i e. Jeżeli przez x oznaczymy chwilowy przyrost długości, to zgodnie z prawem Hooke'a siła działająca na pręt wyniesie $F = Esx/l$, gdzie $s = \pi r^2$ jest polem przekroju pręta. Zatem praca wykonana przy rozciąganiu wynosi

$$L = \int_0^{\Delta l} F\, dx = \frac{E\pi r^2}{l} \int_0^{\Delta l} x\, dx = \frac{E\pi r^2 \Delta l^2}{2l} = \frac{12000\pi 4 \cdot 1}{2 \cdot 1000} = 24\pi \text{ kGmm} = 0{,}024\pi \text{ kGm}.$$

Z a d a n i e 20.159. Naczynie cylindryczne o powierzchni podstawy $S = 420$ cm^2 napełnione jest wodą do wysokości $H = 40$ cm. Na dnie naczynia znajduje się otwór o powierzchni $s = 2$ cm^2. Obliczyć czas t, w ciągu którego woda wycieknie z naczynia.

U w a g a. Szybkość wyciekania v w zależności od różnicy poziomów x wyraża się wzorem $v = \mu\sqrt{2gx}$, gdzie μ jest współczynnikiem zależnym od lepkości cieczy oraz od kształtu otworu i naczynia. Przyjmiemy $\mu = 0{,}6$.

R o z w i ą z a n i e. Szybkość obniżania się poziomu wody w naczyniu wynosi

$$v_2 = \frac{dx}{dt} = \mu\sqrt{2gx}\,\frac{s}{S}$$

$\left(\text{z proporcji } \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{S}{s}\right)$, zatem szukany czas równa się

$$t = \int_0^H \frac{S\, dx}{\mu s \sqrt{2gx}} = \frac{S}{\mu s\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{S}{\mu s\sqrt{2g}} [2\sqrt{x}]_0^H =$$

$$= \frac{S}{\mu s\sqrt{2g}} 2\sqrt{H} = \frac{420}{0{,}6 \cdot 2\sqrt{2 \cdot 981}} 2\sqrt{40} \approx 100\, s$$

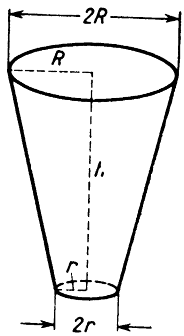
Zadania

20.160. Obliczyć w ciągu jakiego czasu wyciecze woda z lejka (rys. 20.20) w kształcie stożka ściętego całkowicie napełnionego wodą. Promień górnej podstawy wynosi R, dolnej r, wysokość lejka h. (Współczynnik μ przyjąć jak w zadaniu 20.159, tzn. $\mu = 0{,}6$).

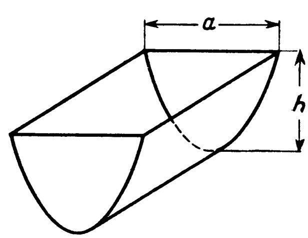
20.161. Obliczyć siłę nacisku wody na śluzę prostokątną, pionową o wysokości $h=6$ m i szerokości $b=8$ m. Obliczyć również nacisk na dolną połowę tej śluzy (przyjąć ciężar właściwy wody $\delta=1000$ kG/m^3).

20.162. Pionowa boczna ścianka zbiornika ma kształt trapezu o podstawie dolnej $a=10$ m i górnej $b=20$ m oraz wysokości $h=6$ m. Obliczyć nacisk wody na tę ścianę przy pełnym zbiorniku (ciężar właściwy wody przyjąć $\delta=1000$ kG/m^3).

20.163. Wyznaczyć nacisk wody na pionową sciankę zbiornika w kształcie okręgu o promieniu R, jeżeli poziom wody sięga środka okręgu (ciężar właściwy wody przyjąć $\delta=1$ G/cm^3).



Rys. 20.20



Rys. 20.21

20.164. Wyznaczyć pracę potrzebną na wypompowanie wody z pełnego zbiornika w kształcie półkuli o promieniu R (ciężar właściwy wody $\delta=1000$ kG/m^3).

20.165. Wyznaczyć nacisk wody na pionową ściankę trójkątną o wysokości h. Podstawa trójkąta a jest równoległa do powierzchni wody i znajduje się na głębokości h (przyjąć ciężar właściwy wody $\delta=1$ G/cm^3).

20.166. Obliczyć nacisk wody na pionową ściankę zbiornika (rys. 20.21), która ma kształt łuku paraboli zwróconej wierzchołkiem na dół. Szerokości ścianki u góry wynosi $a=4$ m, wysokość $h=4$ m, zbiornik jest całkowicie napełniony wodą, tzn. wysokość wody jest również $h=4$ m (przyjąć ciężar właściwy wody $\delta=1000$ kG/m^3).

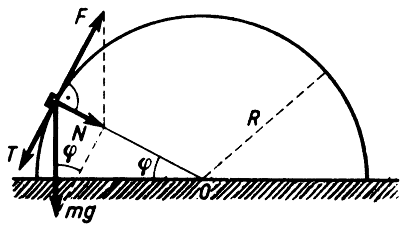
20.167. Obliczyć głębokość x, na jakiej należałoby podzielić poziomo prostokątną śluzę zanurzoną na głębokości h, ażeby nacisk wody na obydwie części był jednakowy.

20.168. Cylindryczna cysterna o poziomej osi napełniona jest całkowicie olejem (ciężar właściwy 0,9 t/m^3). Obliczyć nacisk oleju na płaską pionową ściankę cylindra, jeżeli promień $r=2$ m.

20.169. Obliczyć pracę, jaką trzeba wykonać, ażeby wypompować wodę z jamy w kształcie stożka (o pionowej osi), którego wysokość $H=2$ m i promień podstawy $R=0{,}3$ m (ciężar właściwy wody $\delta=1000$ kG/m^3).

20.170. Obliczyć pracę, która zostanie wykonana przy adiabatycznym sprężaniu powietrza od objętości $v_0=0,1\ \mathrm{m}^3$ i ciśnieniu $p_0=10330\ \mathrm{kG/m}$ do objętości $v_1=0,03\ \mathrm{m}^3$ (równanie adiabaty $pv^k=p_0v_0^k$, gdzie $k=1,4$).

20.171. Obliczyć, w ciągu jakiego czasu wyciecze woda z naczynia w kształcie półkuli o promieniu R, jeżeli naczynie jest całkowicie napełnione wodą, a pole powierzchni otworu



Rys. 20.22

znajdującego się na samym spodzie wynosi s (współczynnik uwzględniający straty energii przy wypływie wynosi μ).

20.172. Wyznaczyć pracę L, jaką trzeba wykonać, by ciało o masie m wciągnąć na wierzchołek półkuli o promieniu R (rys. 20.22). Współczynnik tarcia pomiędzy powierzchnią ciała i półkuli wynosi μ.

Rozdział XXI

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

§ 21.1. CAŁKI FUNKCJI NIEOGRANICZONYCH

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona i całkowalna w każdym przedziale $a \leqslant x \leqslant c-h$. $h>0$, oraz w każdym przedziale $c+k \leqslant x \leqslant b$, $k>0$, i jeżeli istnieją granice

$$\lim_{h \to +0} \int_a^{c-h} f(x)\,dx \quad \text{oraz} \quad \lim_{k \to +0} \int_{c+k}^{b} f(x)\,dx, \tag{21.1.1}$$

to sumę tych granic nazywamy *całką niewłaściwą funkcji* $f(x)$ w przedziale $\langle a, b\rangle$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{21.1.2}$$

Uwaga. W punkcie $x=c$ funkcja $f(x)$ może nawet nie być określona; w podanej definicji chodzi o funkcje, które w każdym otoczeniu $(c-\delta, c+\delta)$, $\delta>0$, są nieograniczone. Dla funkcji $f(x)$ ograniczonej i całkowalnej w całym przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ podana suma granic równa jest całce $\int_a^b f(x)\,dx$, rozumianej w zwykłym sensie.

Jeżeli któraś z granic (21.1.1) (lub obie) nie istnieje, to mówimy że *całka niewłaściwa jest rozbieżna*.

Jeżeli punktem nieograniczoności jest jeden z końców przedziału $\langle a, b\rangle$, to przez całkę niewłaściwą (21.1.2) rozumiemy odpowiednio

$$\lim_{h \to +0} \int_{a+h}^{b} f(x)\,dx \quad \text{albo} \quad \lim_{k \to +0} \int_a^{b-k} f(x)\,dx.$$

Podamy teraz interpretację geometryczną całki niewłaściwej.

Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągła nieujemna w przedziale $a \leqslant x < b$ i przy tym niech $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$. Wtedy, jeżeli istnieje granica

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

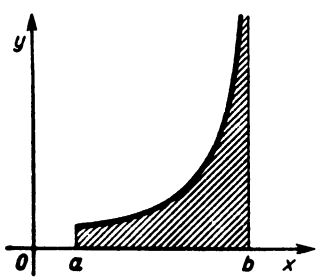
to mówimy, że pole obszaru nieograniczonego, którego brzegiem jest odcinek prostej $x=a$ w przedziale $0 \leqslant y \leqslant f(a)$, odcinek osi Ox w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, część krzywej $y=$

$=f(x)$ w przedziale $a \leqslant x < b$ oraz część prostej $x=b$, leżąca ponad osią Ox jest skończone (rys. 21.1) i równa się całce (21.1.2).

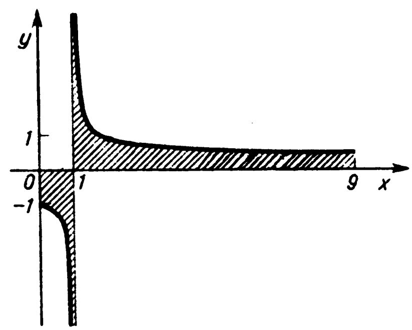
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ z wyjątkiem wewnętrznego punktu $x=c$ i jeżeli istnieje całka $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, to całka ta wyraża sumę pól obszarów określonych całkami

(21.1.3) $$\int\limits_a^c |f(x)|\,dx + \int\limits_c^b |f(x)|\,dx.$$

ZADANIE 21.1. Obliczyć całkę $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.



Rys. 21.1



Rys. 21.2

Rozwiązanie. Funkcja podcałkowa jest nieciągła w punkcie $x=0$. Przyjmując $\varepsilon>0$ obliczamy całkę

$$\int\limits_\varepsilon^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_\varepsilon^3 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Gdy $\varepsilon \to +0$, wtedy $2\sqrt{\varepsilon} \to 0$, więc

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\varepsilon^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{3}.$$

ZADANIE 21.2. Obliczyć pole obszaru (rys. 21.2), którego brzegiem jest odcinek osi odciętych od $x=0$ do $x=9$, rzędne w tych punktach oraz krzywa

(1) $$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Rozwiązanie. Załączony szkic przedstawia obszar (zakreskowany), którego pole mamy obliczyć. Funkcja (1) jest nieciągła dla $x=1$, tj. dla wewnętrznego punktu przedziału $\langle 0,9\rangle$, ujemna dla $x<1$, dodatnia dla $x>1$. Poszukiwane pole równa się całce

$$\int_0^9 \frac{dx}{|\sqrt[3]{x-1}|} = -\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{1+\varepsilon_1}^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}. \tag{2}$$

Obliczamy całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int (x-1)^{-1/3}dx = \tfrac{3}{2}(x-1)^{2/3} = \tfrac{3}{2}(\sqrt[3]{x-1})^2 .$$

Mamy wtedy

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \left[\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x-1})^2\right]_0^{1-\varepsilon} = \tfrac{3}{2}(\sqrt[3]{-\varepsilon})^2 - \tfrac{3}{2}.$$

Gdy $\varepsilon\to 0$, wtedy $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(-\varepsilon)^2}\to 0$, a więc

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = -\tfrac{3}{2}. \tag{3}$$

Druga z całek po prawej stronie równości (2) daje

$$\int_{1+\varepsilon}^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \left[\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x-1})^2\right]_{1+\varepsilon}^9 = 6 - \tfrac{3}{2}(\sqrt[3]{\varepsilon})^2 .$$

Gdy $\varepsilon\to 0$, wtedy $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{\varepsilon})^2\to 0$, a więc

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = 6 . \tag{4}$$

Ostatecznie, po podstawieniu wyników (3) i (4) do (2), otrzymujemy

$$\int_0^9 \frac{dx}{|\sqrt[3]{x-1}|} = \tfrac{3}{2} + 6 = \tfrac{15}{2} .$$

ZADANIE 21.3. Obliczyć całkę $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Rozwiązanie. Funkcja podcałkowa jest ciągła w danym przedziale $\langle 0, 1\rangle$ z wyjątkiem końca przedziału $x=0$. Obliczamy całkę niewłaściwą

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

Obliczamy całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ i otrzymujemy

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2+\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = +\infty,$$

a więc dana całka jest rozbieżna.

Zadania

Obliczyć całki (zad. 21.4 - 21.26):

21.4. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1-x}$.

21.5. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

21.6. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$.

21.7. $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$.

21.8. $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{4x^3}}$.

21.9. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$.

21.10. $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $a>0$.

21.11. $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a<b$.

21.12. $\int\limits_0^{\sqrt{2/3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-9x^4}}$.

21.13. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

21.14. $\int\limits_{-2}^0 \frac{1}{(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$.

21.15. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

21.16. $\int\limits_2^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

21.17. $\int\limits_0^6 \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}$.

21.18. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

21.19. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

21.20. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

21.21. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2}}$

21.22. $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$.

21.23. $\int\limits_2^4 x\sqrt{\frac{x-2}{4-x}}\,dx$.

21.24. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

21.25. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

21.26. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg} x\,dx$.

§ 21.2. CAŁKI OZNACZONE W PRZEDZIALE NIESKOŃCZONYM

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona i całkowalna w każdym przedziale skończonym $a \leqslant x \leqslant v$ (a – ustalone, v – dowolne) oraz istnieje granica

(21.2.1) $$\lim_{v\to+\infty} \int\limits_a^v f(x)\,dx,$$

to granicę tę nazywamy *całką niewłaściwą funkcji* $f(x)$ *w przedziale* $a \leqslant x < +\infty$ i oznaczamy symbolem

(21.2.2) $$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Analogicznie określa się znaczenie symbolu

(21.2.3) $$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

jako granicę

(21.2.4) $$\lim_{u\to-\infty} \int\limits_u^b f(x)\,dx.$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła dla $x \geqslant a$ oraz istnieje całka

$$\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\, dx, \tag{21.2.5}$$

to mówimy, że całka ta wyraża *pole nieograniczonego obszaru*, którego brzegiem jest odcinek prostej $x=a$ w przedziale $0 \leqslant y \leqslant f(a)$, część osi Ox w przedziale $a \leqslant x < +\infty$ oraz część krzywej $y=f(x)$ w przedziale $a \leqslant x < +\infty$.

ZADANIE 21.27. Obliczyć całkę

$$\int_{1}^{+\infty} \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx.$$

Rozwiązanie. Trzeba obliczyć $\lim\limits_{v\to+\infty} \int_{1}^{v} \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$. Obliczamy najpierw całkę nieoznaczoną

$$\int \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \int \frac{4}{x^2}\, dx + \int \frac{4}{x^3}\, dx + \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3}.$$

Przechodzimy do całki oznaczonej

$$\int_{1}^{v} \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx = -\frac{4}{v}-\frac{2}{v^2}-\frac{1}{3v^3}-(-4-2-\tfrac{1}{3}).$$

Gdy $v\to+\infty$, pierwsze trzy wyrazy dążą do zera i ostatecznie otrzymujemy

$$\int_{1}^{+\infty} \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \tfrac{19}{3}.$$

ZADANIE 21.28. Potencjał dowolnego punktu A odległego o R_A od odosobnionego ładunku punktowego Q wyraża się wzorem

$$V_A = \int_{R_A}^{\infty} K\, dR,$$

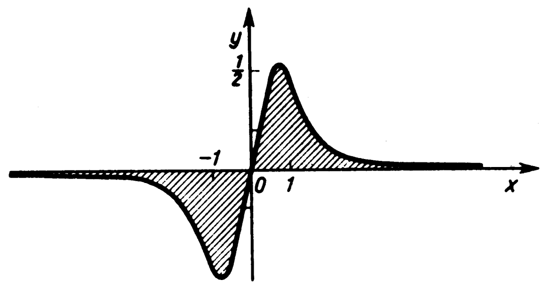
gdzie $K=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}$, ε — stała dielektryczna. Wyznaczyć potencjał punktu A.

Rozwiązanie. Mamy

$$V_A = \int_{R_A}^{+\infty} K dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_A}^{+\infty} \frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \lim_{R_B\to+\infty} \int_{R_A}^{R_B} \frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \lim_{R_B\to+\infty} \left(-\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_A}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_A}.$$

ZADANIE 21.29. Obliczyć pole obszaru (rys. 21.3), którego brzegiem jest prosta $y=0$ oraz krzywa

$$y=\frac{x}{x^4+1}.$$



Rys. 21.3

Rozwiązanie. Pole obszaru równa się

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{x}{x^4+1}\right|dx.$$

Zauważmy, że $\frac{x}{x^4+1}<0$, gdy $x<0$, a $\frac{x}{x^4+1}>0$, gdy $x>0$. Mamy więc

$$P=-\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{x^4+1}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{x^4+1}dx.$$

Obliczamy całkę nieoznaczoną

$$\int\frac{x}{x^4+1}dx.$$

Wykonujmy podstawienie $x^2=t$, skąd $2x\,dx=dt$, czyli $x\,dx=\frac{1}{2}dt$. Mamy więc

$$\int\frac{x}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2).$$

Przechodzimy do całek oznaczonych

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{x^4+1}=\lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{0}\frac{x\,dx}{x^4+1}=\lim_{u\to-\infty}\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)\right]_u^0=-\tfrac{1}{4}\pi,$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^4+1}=\lim_{v\to+\infty}\int_{0}^{v}\frac{x\,dx}{x^4+1}dx=\lim_{v\to+\infty}\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)\right]_0^v=\tfrac{1}{4}\pi.$$

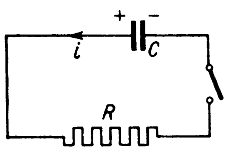
Ostatecznie otrzymujemy $P=-(-\frac{1}{4}\pi)+\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}\pi$.

ZADANIE 21.30. Kondensator o pojemności C został naładowany do napięcia U_0. Obliczyć energię straconą w oporze R, przez który kondensator jest rozładowywany (rys. 21.4).

Rozwiązanie. Prąd wyładowania kondensatora określa wzór

$$i=\frac{U_0}{R}e^{-t/\tau},$$

gdzie t czas liczony od chwili zamknięcia obwodu, a τ — stała czasu równa $\tau=RC$.



Rys. 21.4

Energię elektryczną straconą w oporze R wyznaczamy ze wzoru

$$A=\int\limits_0^{t_1} i^2R\,dt.$$

Rozładowanie kondensatora poprzez opór trwa nieskończenie długo, dlatego całkowita energia stracona w oporze przy rozładowaniu kondensatora jest całką niewłaściwą

$$A=\int\limits_0^{+\infty} i^2Rdt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{U_0^2}{R^2}Re^{-2t/RC}dt=\frac{U_0^2}{R}\int\limits_0^{+\infty}e^{-2t/RC}dt=\frac{U_0^2}{R}\lim_{t_1\to+\infty}\int\limits_0^{t_1}e^{-2t/RC}dt=$$

$$=\frac{U_0^2}{R}\lim_{t_1\to+\infty}\left(-\frac{RC}{2}e^{-2t_1/RC}+\frac{RC}{2}e^{-2\cdot 0/RC}\right)=\frac{U_0^2}{R}\cdot\frac{RC}{2}=\frac{U_0^2C}{2}.$$

ZADANIE 21.31. Obliczyć całkę

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx.$$

Rozwiązanie. Mamy obliczyć

$$\lim_{v\to+\infty}\int\limits_0^{v}e^{-x}dx.$$

Obliczamy całkę nieoznaczoną

$$\int e^{-x}dx=-e^{-x},$$

a następnie

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx=\lim_{v\to+\infty}\int\limits_0^{v}e^{-x}dx=\lim_{v\to+\infty}[-e^{-x}]_0^v=\lim_{v\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^v}+1\right)=1.$$

ZADANIE 21.32. Charakter zmian natężenia prądu elektrycznego pewnego impulsu wywołanego w obwodzie jest określony następującą zależnością $i=5te^{-t}$. Wyznaczyć całkowity ładunek elektryczny $q=\int_0^{+\infty} i\,dt$, jaki przepłynie w obwodzie wskutek wywołania jednego impulsu.

Rozwiązanie. Mamy

$$q=\int_0^{+\infty} i\,dt=5\int_0^{+\infty} te^{-t}dt=5\lim_{t_1\to+\infty}\int_0^{t_1} te^{-t}dt.$$

Wyznaczamy całkę nieoznaczoną

$$\int te^{-t}dt=-te^{-t}+\int e^{-t}dt=-te^{-t}-e^{-t}+C,$$

skąd

$$q=5\lim_{t_1\to+\infty}[-te^{-t}-e^{-t}]_0^{t_1}=5\lim_{t_1\to+\infty}(-t_1e^{-t_1}-e^{-t_1}+1)=5.$$

Uwaga. $\lim\limits_{t_1\to+\infty} t_1e^{-t_1}=0$.

Zadanie 21.33. Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{dx}{3x^2+2x+1},\quad \text{gdzie}\quad \alpha=\frac{\sqrt{6}-1}{3}.$$

Rozwiązanie. Obliczając całkę nieoznaczoną znanym sposobem (por. zad. 16.13 na str. 311) otrzymujemy

$$\int\frac{dx}{3x^2+2x+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{2}}.$$

Obliczamy całkę oznaczoną

$$\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{dx}{3x^2+2x+1}=\lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{\alpha}\frac{dx}{3x^2+2x+1}=\lim_{u\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\alpha+1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right).$$

Gdy $\alpha=\dfrac{\sqrt{6}-1}{3}$, wtedy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\alpha+1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{3\sqrt{2}};$$

gdy $u\to-\infty$, wtedy

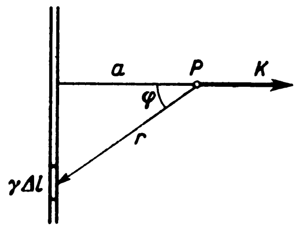
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\to\frac{-\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{dx}{3x^2+2x+1}=\frac{5\pi}{6\sqrt{2}},\quad \text{gdzie}\quad \alpha=\frac{\sqrt{6}-1}{3}.$$

ZADANIE 21.34. Przewodnik nieskończenie długi biegnący prostolinijnie, jest elektrycznie naładowany równomiernie tak, że ładunek przypadający na jednostkę długości wynosi γ. Wyznaczyć wartość natężenia pola K w odległości a od przewodnika (rys. 21.5).

Rozwiązanie. Składowa wzdłuż wektora K natężenia pola w punkcie P wywołana ładunkiem $\Delta q=\gamma\Delta l$ zgromadzonym na odcinku Δl:



Rys. 21.5

$$\Delta K=\frac{\gamma\Delta l}{r^2}\cos\varphi,\quad \text{gdzie}\quad r=\frac{a}{\cos\varphi};$$

więc

$$\Delta K=\frac{\gamma\Delta l\cos^3\varphi}{a^2}.$$

Zatem natężenie pola K w punkcie P wynosi

$$K=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma\cos^3\varphi\, dl}{a^2}.$$

Ponieważ $l=a\sin\varphi$, więc $dl=a\cos\varphi\, d\varphi$. Ostatecznie mamy

$$K=\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\gamma\cos^4\varphi\, d\varphi}{a}=\frac{\gamma}{a}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{1}{8}\cdot\frac{\gamma}{a}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}(3+4\cos 2\varphi+\cos 4\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{\gamma}{8a}\left[3\varphi+2\sin 2\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{3\pi\gamma}{8a}.$$

Zadania

Obliczyć całki (zad. 21.35 - 21.53):

21.35. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

21.36. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\operatorname{arctg} x)^2\, dx}{1+x^2}$.

21.37. $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+9}$.

21.38. $\displaystyle\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

21.39. $\displaystyle\int\limits_{4}^{+\infty}\frac{dx}{(x-3)^2}$.

21.40. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2+4}$.

21.41. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+13}$.

21.42. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2+x+1}$.

21.43. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

21.44. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)^2}$.

21.45. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$.

21.46. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{(7x+2)\,dx}{x^3-5x^2+12x-60}$.

21.47. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

21.48. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}dx,\ a>0$.

21.49. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

21.50. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$.

21.51. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

21.52. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{a+b\cos x},\quad a>b>0$.

Wskazówka (do zad. 21.52). Podstawić $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x=t$.

21.53. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x},\ a>0,\ b>0$.

Wskazówka. Podstawić $\operatorname{tg} x=t$.

Rozdział XXII

CAŁKOWANIE PRZYBLIŻONE

§ 22.1. UWAGI OGÓLNE

Jak wiadomo z rachunku całkowego, nie wszystkie całki funkcji ciągłych dają się wyrazić przy pomocy skończonej liczby funkcji elementarnych. Do takich należą np. całki

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int x\,\mathrm{tg}\,x\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \sqrt{x^3+1}\,dx\cdot$$

W przypadku gdy musimy obliczyć np. całkę

$$\int_0^1 x\,\mathrm{tg}\,x\,dx \quad \text{lub} \quad \int_0^1 \sqrt{x^3+1}\,dx,$$

musimy korzystać wyłącznie z *metod przybliżonych*. Również w sytuacji, gdy wprawdzie bezpośrednie obliczenie całki oznaczonej jest możliwe, ale bardzo pracochłonne, często w praktyce do jej obliczenia stosuje się metody przybliżone, które mogą okazać się bardziej wygodne i szybsze.

§ 22.2. METODA TRAPEZÓW

Mamy obliczyć przybliżoną wartość całki funkcji ciągłej $f(x)$ w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, tj. całki

(22.1) $$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Przedział całkowania dzielimy na pewną liczbę n przedziałów częściowych, wszystkich o tej samej długości $(b-a)/n$; kolejne odcięte punktów podziału oznaczamy przez $a=x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n=b$, odpowiednie zaś rzędne przez

$$y_i=f(x_i) \quad (i=0, 1, \ldots, n).$$

Jako przybliżoną wartość całki (22.1), przy założeniu, że $f(x) \geqslant 0$ dla $a \leqslant x \leqslant b$, przyjmujemy w *metodzie trapezów* sumę pól n trapezów. Łatwe obliczenie prowadzi do wzoru

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[y_0+y_n+2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})\right]. \tag{22.2}$$

Błąd bezwzględny nie przekracza $\frac{b-a}{12n^2}M_2$, gdzie M_2 jest górnym ograniczeniem wartości bezwzględnej drugiej pochodnej funkcji $f(x)$ w przedziale całkowania, tzn. taką liczbą, że $|f''(x)| \leqslant M_2$ dla $a \leqslant x \leqslant b$.

PRZYKŁAD. Obliczyć $\int_0^1 e^{x^2}dx$ metodą trapezów przyjmując $n=5$ oraz oszacować błąd.

Rozwiązanie. Mamy tutaj $x_0=0$, $x_1=0{,}2$, $x_2=0{,}4$, $x_3=0{,}6$, $x_4=0{,}8$, $x_5=1$. Odpowiednie wartości funkcji podcałkowej odczytujemy z tablic wartości funkcji wykładniczej e^x:

$$e^{0,04}\approx 1{,}0408,\quad e^{0,16}\approx 1{,}1735,\quad e^{0,36}\approx 1{,}4333,\quad e^{0,64}\approx 1{,}8965.$$

A więc stosując wzór (22.2) otrzymujemy

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = 0{,}1\cdot(1+2{,}7183+2\cdot 5{,}5441)=1{,}4807.$$

Dla oszacowania błędu obliczamy drugą pochodną funkcji $f(x)=e^{x^2}$. Mamy

$$f'(x)=2xe^{x^2},\quad f''(x)=(2+4x^2)e^{x^2}.$$

W przedziale całkowania druga pochodna przyjmie największą wartość dla $x=1$, bo oba czynniki są funkcjami rosnącymi w przedziale całkowania; mamy $f''(1)=6e$, a więc możemy przyjąć $M_2=6e$. Tak więc błąd bezwzględny nie przekracza

$$\frac{1}{12\cdot 25}\cdot 6e \approx 0{,}0544.$$

Ponieważ $f''(x)>0$, więc metoda trapezów daje wynik przybliżony z nadmiarem.

§ 22.3. METODA SIMPSONA

Przedział całkowania $a \leqslant x \leqslant b$ dzielimy przy *metodzie Simpsona* na parzystą liczbę $2n$ $(n=1, 2, \ldots)$ równych części.

Rozważmy najpierw przypadek $n=1$; mamy obliczyć przybliżoną wartość

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx,\quad \text{gdzie}\quad f(x)\geqslant 0.$$

Oznaczmy środek przedziału przez x_1, a odpowiadające wartościom x_0, x_1, x_2 rzędne przez y_0, y_1, y_2. Metoda Simpsona polega na tym, aby funkcję podcałkową $f(x)$ zastąpić przez tak dobrany trójmian kwadratowy $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, aby wartości jego dla x_0, x_1, x_2 były równe odpowiednio wartościom funkcji $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$. Nietrudny rachunek prowadzi do wzoru

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{x_2 - x_0}{6n}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{22.3}$$

Gdy $n=2, 3, \ldots$, tzn. gdy dzielimy przedział na $4, 6, \ldots$ równych części, wówczas do każdych dwóch sąsiednich przedziałów stosujemy wzór (22.3). Przy oznaczeniach punktów przedziału przez $a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}=b$ i odpowiadających im rzędnych przez $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-1}, y_{2n}$ otrzymujemy *wzór Simpsona* w postaci

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})] \tag{22.4}$$

z błędem bezwzględnym nie przekraczającym $\frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} M_4$, gdzie M_4 jest górnym ograniczeniem wartości bezwzględnej czwartej pochodnej funkcji $f(x)$ w przedziale całkowania, tj. $|f^{(4)}(x)| \leqslant M_4$ dla $a \leqslant x \leqslant b$. Tak więc błąd metody Simpsona jest (w przybliżeniu) odwrotnie proporcjonalny do czwartej potęgi liczby $2n$ podprzedziałów, na które przedział całkowania został podzielony, dwukrotne więc zwiększenie liczby podprzedziałów powoduje około 16-krotne zmniejszenie błędu.

Jeżeli chcemy obliczyć całkę z daną z góry dokładnością ε, tzn. gdy chcemy, aby

$$\frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} M_4 \leqslant \varepsilon,$$

to z rozwiązania tej nierówności względem liczby podprzedziałów $2n$ otrzymamy

$$2n \geqslant (b-a) \sqrt[4]{\frac{(b-a) M_4}{180\varepsilon}},$$

tj. najmniejszą ich liczbę, przy której dana dokładność przybliżonej wartości całki będzie osiągnięta.

PRZYKŁAD. Obliczyć $\int_0^1 x \operatorname{tg} x\, dx$ stosując metodę Simpsona przy $2n=4$.

Rozwiązanie. Punktami podziału są $x_0=0, x_1=0{,}25, x_2=0{,}5, x_3=0{,}75, x_4=1$. Dogodnie jest wykonać zestawienie wartości odczytanych z tablic i obliczanych w postaci tabelki

x radianów	0	0,25	0,5	0,75	1
stopnie	0°	14°19′	28°39′	42°58′	57°18′
$\operatorname{tg} x$	0	0,2552	0,5464	0,9314	1,5578
$x \operatorname{tg} x$	0	0,0638	0,2732	0,6985	1,5578
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

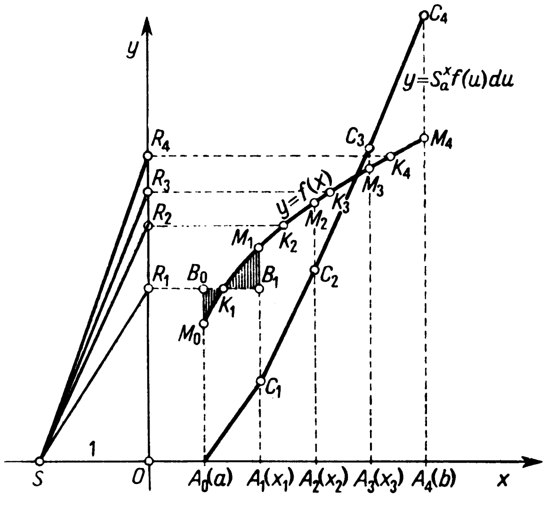
Następnie stosujemy wzór (22.4):

$$\int_0^1 x \operatorname{tg} x\, dx \approx \tfrac{1}{12}[0+1{,}5578+4(0{,}0638+0{,}6985)+2\cdot 0{,}2732]=$$
$$=\tfrac{1}{12}(1{,}5578+3{,}0496+0{,}5464)=\tfrac{5\cdot 1538}{12}=0{,}4295\,.$$

§ 22.4. CAŁKOWANIE GRAFICZNE

Dany jest wykres funkcji $y=f(x)$ określonej i ciągłej dla $a \leqslant x \leqslant b$. Aby znaleźć konstrukcyjnie wykres funkcji pierwotnej $F(x)=\int_a^x f(u)\,du$, postępujemy następująco (rys. 22.1):

1° Przy pomocy punktów $A_i(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ dzielimy przedział całkowania $\langle a, b\rangle$ na n równych części. Na każdym częściowym łuku M_iM_{i+1}, odpowiadającym odcinkowi A_iA_{i+1}, dobieramy taki punkt K_{i+1}, aby prosta przechodząca przez K_{i+1} i równoległa do osi Ox, sama oś Ox i dwie proste równoległe do osi Oy, a przechodzące odpowiednio



Rys. 22.1

przez punkty A_i oraz A_{i+1}, tworzyły prostokąt, którego pole równa się w przybliżeniu polu trapezu krzywoliniowego $A_iA_{i+1}M_{i+1}M_i$ (na rysunku pola trójkątów krzywoliniowych $M_0B_0K_1$ oraz $M_1B_1K_1$, które są równe, są zakreskowane, skąd widać, że pole prostokąta $A_0A_1B_1B_0$ równa się polu trapezu krzywoliniowego $A_0A_1M_1K_1M_0$).

2° Na osi Ox obieramy punkt $S(-1,0)$.

3° Punkty R_i przecięć z osią Oy prostych równoległych do osi Ox przeprowadonych przez punkty K_i łączymy z punktem S. Otrzymujemy odcinki SR_i.

4° Przez punkt A_0 kreślimy prostą równoległą do SR_1 aż do przecięcia się z przedłużeniem A_1M_1. Otrzymujemy punkt C_1.

5° Z otrzymanego punktu C_1 kreślimy równoległą do SR_2 aż do przecięcia się z równoległą do osi Oy, przechodzącą przez punkt A_2. Otrzymujemy punkt C_2.

6° Kreślimy $C_2C_3 \| SR_3$.

Łamana $A_0C_1C_2C_3$ w przybliżeniu wyznacza krzywą całkową $y=\int\limits_a^x f(u)\,du$ w danym przedziale, tym dokładniej, im więcej jest punktów podziału, zaś rzędna punktu C_i (przy obranej jednostce długości) w przybliżeniu równa się $\int\limits_a^{x_i} f(u)\,du$. Istotnie, mamy $\triangle SOR_1 \sim \triangle A_0A_1C_1$, skąd $A_1C_1 : A_0A_1 = OR_1 : 1$, więc $A_1C_1 = A_0A_1 \cdot OR_1 = A_0A_1 \cdot A_1B_1$ jest równe polu prostokąta $A_0A_1B_1B_0$, a zatem polu krzywoliniowego trapezu $A_0A_1M_1K_1M_0$, czyli $A_1C_1 = \int\limits_a^{x_1} f(u)\,du$. Analogicznie $A_2C_2 = \int\limits_a^{x_2} f(u)\,du$, $A_3C_3 = \int\limits_a^{x_3} f(u)\,du$ itd.

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

DO ROZDZIAŁU I

1.16. $x>3$. **1.17.** $0<x<\frac{1}{2}$. **1.18.** $-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}$.

1.19. $x<3$ lub $x>\frac{9}{2}$. **1.20.** $-1<x<2$ lub $x>8$.

1.27. $x_1=-4$, $x_2=2$. **1.28.** $x=0$. **1.29.** $x_1=-\frac{4}{3}$, $x_2=2$.

1.30. Równanie sprzeczne. **1.31.** $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=4$.

1.32. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=5$, $x_4=6$.

1.33. $-12<x<18$. **1.34.** $-1<x<7$. **1.35.** $-33<x<101$.

1.36. $-1<x<5$. **1.37.** $x>-\frac{3}{4}$. **1.38.** $-\frac{11}{9}<x<17$.

1.39. $x<-3$ lub $-3<x<\frac{2}{3}$ lub $x>8$. **1.40.** $\frac{3}{4}<x<2$.

1.47. $-5<x<-1$ lub $x>3$. **1.48.** $-1<x<-\frac{1}{2}$.

1.49. $-2<x<0$ lub $2<x<5$. **1.50.** $-1<x<3$.

1.51. $x<-2$ lub $1<x<2$ lub $x>4$. **1.52.** $-1<x<0$ lub $1<x<2$.

1.53. $-2<x<\frac{1}{3}$ lub $x>7$. **1.54.** $\frac{1}{2}<x<\frac{4}{5}$ lub $x>2$.

1.55. $-5<x<4$ lub $x>16$, przy czym $x\neq-2$ oraz $x\neq2$.

1.66. $224a^2b^{12}$.

1.67. We wzorze Newtona przyjąć $a=b=1$.

1.68. We wzorze Newtona przyjąć $a=-1$, $b=1$.

1.69. Skorzystać ze wzoru

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{n}{p}\binom{p}{k}.$$

Stąd ze wzoru Newtona otrzymujemy tezę.

1.70. We wzorze z zad. 1.69 przyjąć $a=b=1$.

1.71. We wzorze z zad. 1.69 przyjąć $a=-1$, $b=1$.

1.72. 15. **1.73.** 9. **1.74.** $\binom{u}{2}$.

1.75. $T_5=70(1-x^2)^2\ldots$ **1.76.** $T_7=\binom{15}{6}a^0$.

1.77. $n=7$. **1.78.** $T_3=\binom{5}{2}(\sqrt[3]{3})^3(\sqrt{2})^2=60$.

1.79. $T_5=495a^4x^{-2}$. **1.80.** $T_4=35\dfrac{(b+a)a}{(b-a)^3}$.

1.81. $1{,}0005^{36}\approx 1{,}018$. Wystarczy wziąć pierwsze dwa wyrazy rozwinięcia $(1+0{,}0005)^{36}$.

DO ROZDZIAŁU II

2.17. 1. **2.18.** $-\frac{4}{5}$. **2.19.** 0. **2.20.** -2. **2.21.** $\frac{1}{3}$.
2.22. $\frac{1}{3}$. **2.23.** $-\frac{1}{10}$. **2.24.** 0. **2.25.** 0. **2.26.** $\frac{4}{9}$.
2.27. $\frac{125}{27}$. **2.28.** 1. **2.29.** 0. **2.30.** ∞. **2.31.** 0.
2.32. $-\infty$. **2.33.** 2. **2.34.** $\sqrt{2}-2$. **2.35.** $\sqrt{3}$. **2.36.** $\frac{1}{2}$.
2.37. $\frac{1}{3}$. **2.38.** 1.
2.39. 1. Podzielić licznik i mianownik ułamka przez n.
2.40. $\frac{4}{7}$. **2.41.** 0. **2.42.** $\frac{1}{2}$. **2.43.** $-\frac{5}{2}$. **2.44.** $1/\sqrt{3}$.
2.45. -1. **2.46.** $\frac{4}{3}$. **2.47.** $-5/3\sqrt[3]{4}$ **2.48.** $\frac{1}{4}$. **2.49.** $\frac{5}{4}$.
2.50. $\frac{48}{5}$. **2.51.** $-\infty$. **2.52.** -1. **2.53.** $\frac{2}{3}$. **2.54.** 3.
2.55. 10. **2.56.** 0. **2.57.** $\frac{3}{4}$. **2.58.** $\frac{1}{2}$. **2.59.** $\frac{1}{3}$.
2.60. $\frac{1}{4}$. **2.61.** $\frac{4}{3}$.

2.62. $\dfrac{3}{4(1-a)}$ dla $|a|<1$; jeżeli $|a|\geqslant 1$, to ciąg jest rozbieżny.

2.63. 0 przy $k>2$, $\frac{1}{2}$ przy $k=2$ oraz ∞ przy $k<2$.

2.64. e^2. **2.65.** 1. **2.66.** e^5. **2.67.** $e^{-1/3}$. **2.68.** e^4.
2.69. e^6. **2.70.** $e^{3/2}$. **2.71.** 1. **2.72.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. **2.73.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2.74. 1. Przyjąć $u_n=\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^3\sqrt[n]{1-\dfrac{3}{2n}+\dfrac{15}{2n^3}}$; granica pierwszego i drugiego czynnika równa się 1, dla trzeciego czynnika stosujemy twierdzenie, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, jeżeli $a_n\geqslant 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq\infty$.

2.75. 1. **2.76.** 1. **2.77.** $-\frac{1}{2}$. **2.78.** 0. **2.79.** 0.
2.80. $-\frac{2}{9}$. **2.81.** 0. **2.82.** 1. **2.83.** 3.

2.84. 15. Oprzeć się na wzorze $\log_g a=\dfrac{1}{\log_k g}\log_k a$.

2.85. 1. Oprzeć się na wzorze $a^{\log_g b}=b^{\log_g a}$.

2.86. 0. Oprzeć się na wzorze w odpowiedzi do zad. 2.84 i na zad. 2.12.

2.87. 0.

2.88. 0. Zauważyć, że $0<\frac{n!}{n^n}\leqslant\frac{1}{n}$.

2.89. 0. Zauważyć, że $2^n\cdot 3^{2n}=18^n$; następnie oprzeć się na zad. 2.12.

2.90. $\frac{1}{2}$.

2.92. Niech wzdłuż boku a trójkąta ABC leży n okręgów. Wtedy średnica każdego z nich równa jest $(a-\alpha_n)/n$, gdzie $\alpha_n\to 0$ przy $n\to\infty$. Pole

$$S_{k_n}=\frac{\pi(a-\alpha_n)^2}{4n^2}\left(n+(n-1)+\ldots+1\right)=\frac{1+n}{2}\cdot\frac{\pi(a-\alpha_n)^2}{4n}.$$

Jeżeli $n\to\infty$, to $S_{k_n}\to\frac{1}{8}\pi a^2$, a $\frac{S_{k_n}}{S}\to\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

2.93. Wzdłuż boku a leży n okręgów. Wtedy średnica każdego z nich równa jest a/n, a suma pól wszystkich okręgów

$$S_{k_n}=\pi\left(\frac{a}{2n}\right)^2\cdot n\left(\frac{b-\beta_n}{a/n}\right)=\frac{\pi a(b-\beta_n)}{4},$$

gdzie $\beta_n\to 0$ przy $n\to\infty$. Stąd $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{k_n}}{S}=\frac{1}{4}\pi$.

2.94. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=3d$. **2.95.** $\lim\limits_{n\to\infty}AP_n=\frac{1}{3}$.

2.96. $Q_t^{(n)}=Q_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n$, gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności; $Q_t=Q_0\, e^{kt}$.

DO ROZDZIAŁU III

3.21. $S=1$. **3.22.** $S=1$. **3.23.** Rozbieżny. **3.24.** $S=\ln\frac{1}{3}$.

3.25. $S=1$ przy $x>0$; $S=-1$ przy $x<0$; $S=0$ przy $x=0$.

3.26. $2-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$; $S=1$. **3.27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; $S=1$.

3.28. $-1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{n(n-1)}$; $S=0$.

3.29. Rozbieżny. **3.30.** Rozbieżny, gdyż nie spełnia warunku koniecznego zbieżności szeregów: ogólny wyraz dąży tutaj do 1. **3.31.** Zbieżny, bo $\log n<n$, a więc $\frac{\log n}{n^3}<\frac{1}{n^2}$. **3.32.** Zbieżny $\left(\text{porównać z szeregiem } \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)$. **3.33.** Bezwzględnie zbieżny, gdyż $|\sin 3^n|<1$, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ jest zbieżny. **3.34.** Zbieżny. **3.35.** Rozbieżny (kryterium d'Alemberta). **3.36.** Rozbieżny. **3.37.** Zbieżny. **3.38.** Zbieżny.

3.39. Zbieżny przy $b<a$ i rozbieżny przy $b>a$. **3.40**. Zbieżny bezwzględnie. **3.41**. Zbieżny. **3.42**. Zbieżny (kryterium Cauchy'ego). **3.43**. Zbieżny (na podstawie kryterium Cauchy'ego, bo $\sqrt[n]{u_n}\to\frac{1}{4}\pi<1$). **3.44**. Zbieżny, gdyż spełnia warunki kryterium Leibniza. **3.45**. Zbieżny. **3.46**. Rozbieżny, gdyż $\frac{1}{\log n}>\frac{1}{n}$. **3.47**. Zbieżny warunkowo (kryterium Leibniza). **3.48**. Zbieżny warunkowo. **3.49**. Zbieżny. **3.50**. Zbieżny. **3.51**. Zbieżny. **3.52**. Zbieżny. **3.53**. Rozbieżny. **3.54**. Zbieżny, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n+1}{u_n}=\frac{3}{4}<1$. **3.55**. Rozbieżny. **3.56**. Rozbieżny, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=10\neq 0$. **3.57**. Zbieżny. **3.58**. Zbieżny bezwzględnie. **3.59**. Zbieżny. **3.60**. Rozbieżny. **3.61**. Rozbieżny. **3.62**. Rozbieżny. **3.63**. Zbieżny. **3.64**. Rozbieżny. **3.65**. Zbieżny bezwzględnie. **3.66**. Zbieżny dla $|a|<1$. **3.67**. Zbieżny. **3.68**. Zbieżny bezwzględnie. **3.69**. Zbieżny bezwzględnie. **3.70**. Zbieżny. **3.71**. Rozbieżny. **3.72** Zbieżny. **3.73**. Rozbieżny. **3.74**. Zbieżny. **3.75**. Zbieżny. **3.76**. Rozbieżny.

3.77. Szereg przemienny, wyraz ogólny dąży do zera, lecz kryterium Leibniza nie jest spełnione, gdyż ciąg wartości bezwzględnych nie jest monotoniczny:

$$2>\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}>\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}<\frac{2}{5},\ \ldots,\ \frac{2}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{2n+1}{2n(n-1)}>\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n},$$

ale szereg harmoniczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny, więc i dany szereg jest rozbieżny.

3.78. Zbieżny, jako przemienny i spełniający kryterium Leibniza.

3.79. Rozbieżny.

3.80. Zbieżny dla $a>10$. Oprzeć się na tożsamości $a^{\log b}=b^{\log a}$

3.81. Zbieżny. Porównać z szeregiem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$.

3.82. Tak. **3.83**. Nie. **3.84**. $\frac{1}{9}$. **3.85**. Zbieżny. **3.86**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

DO ROZDZIAŁU V

5.19. 2.	**5.20**. 4.	**5.21**. -2.	**5.22**. 12.	**5.23**. -27.
5.24. 1.	**5.25**. -4.	**5.26**. $\frac{1}{80}$.	**5.27**. -6.	**5.28**. $-\frac{15}{4}$.
5.29. 1.	**5.30**. 5.	**5.31**. $-\infty$.	**5.32**. $\frac{1}{3}m$.	**5.33**. n.
5.34. $\frac{1}{10}$.	**5.35**. 1.	**5.36**. 5.	**5.37**. $\frac{3}{4}$.	**5.38**. $\frac{1}{3}$.
5.39. 0.	**5.40**. $2/\pi$.	**5.41**. -1.	**5.42**. $\frac{1}{4}$.	**5.43**. $8/\pi$.
5.44. $\frac{2}{3}$.	**5.45**. 2.	**5.46**. $\frac{1}{2}$.	**5.47**. -1.	**5.48**. $+\infty$.
5.49. 1.	**5.50**. $-\frac{1}{2}$.	**5.51**. e.	**5.52**. e^{-3}.	**5.53**. e^{nk}.

5.54. Ciągła dla wszystkich x. **5.55.** Ciągła dla wszystkich x.

5.56. Ciągła dla wszystkich $x \neq 0$. W punkcie $x=0$ mamy

$$\lim_{x \to +0} f(x) = f(0) = 1, \quad \lim_{x \to -0} f(x) = -1.$$

5.57. Funkcja ciągła na całej osi liczbowej z wyjątkiem punktu $x=0$, w którym jest obustronnie nieciągła.

5.58. Funkcja jest nieciągła w punkcie $x=1$.

5.59. Funkcja ciągła na całej osi liczbowej z wyjątkiem punktów całkowitych $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, w których jest prawostronnie nieciągła.

5.60. Funkcja ciągła na całej osi liczbowej z wyjątkiem punktów całkowitych $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, w których jest obustronnie nieciągła.

5.61. $f(0)=0{,}5$. **5.62.** $f(0)=0$. **5.63.** $f(0)=2$. **5.64.** b/a; b/a.

5.65. Granica lewostronna: 0, jeśli $a<0$; $+\infty$, jeśli $b>0$, $a>0$; $-\infty$, jeśli $b<0$, $a>0$; 0, jeśli $b=0$. Granica prawostronna: 0, jeśli $a>0$; 0, jeśli $b=0$; $-\infty$, jeśli $a<0$, $b>0$; $+\infty$, jeśli $a<0$, $b<0$.

5.66. Granica lewostronna -1, granica prawostronna 1.

5.67. Granica lewostronna $+\infty$, granica prawostronna 0.

5.68. Granica lewostronna 0, granica prawostronna $+\infty$.

5.69. Granica lewostronna $-\frac{1}{2}$, granica prawostronna 0.

5.70. Granica lewostronna 0, granica prawostronna 0, ale funkcja nie jest ciągła w punkcie $x=0$, gdyż nie jest określona w tym punkcie.

5.71. Granica lewostronna 0, granica prawostronna $+\infty$.

5.72. Granica lewostronna $\frac{3}{8}$, granica prawostronna 0.

5.73. 0; nie istnieje. **5.74.** 0; 0. **5.75.** c; b. **5.76.** $x_1 \to -c/b$, $x_2 \to +\infty$.

5.77. Mamy

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3 & \text{dla} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2x-1 & \text{dla} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3, \\ 5 & \text{dla} \quad 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ x+1 & \text{dla} \quad 4 \leqslant x \leqslant 5, \\ 6 & \text{dla} \quad 5 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

Funkcja ciągła na półprostej $\langle 0, +\infty)$.

5.78. $AB \to +\infty$, $CB \to +\infty$, $\sphericalangle BCD \to 0$, $\sphericalangle ACB \to 180°$. **579.** 4. **580.** $\frac{1}{2}$.

5.81. Granica lewostronna i prawostronna 1; $f(0)=2$ (lód i woda); w punkcie $t=0$ funkcja nie jest ciągła.

DO ROZDZIAŁU VI

6.45. $y'=x^2(1-6x+13x^2-12x^3)$.

6.46. $y'=75x^{14}-2x+\frac{1}{3}$.

6.47. $y'=3ax^2-\dfrac{b}{x^2}$.

6.48. $y'=-\dfrac{12}{x^4}$.

6.49. $y'=63x^6-15x^{-6}+33x^{-12}$.

6.50. $y'=7x^{4/3}-13x^{9/4}-\dfrac{2}{7}x^{-3/2}$.

6.51. $x\neq 0$, $y'=\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$.

6.52. $y'=\dfrac{35}{3}\sqrt[3]{x^4}$.

6.53. $x>0$, $y'=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-3x^2+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}$.

6.54. $x>0$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt[5]{x^2}}-3\sqrt{x}$.

6.55. $x>0$, $y'=\dfrac{-4}{3\sqrt[3]{x^5}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

6.56. $x>0$, $y'=\dfrac{-5}{7\sqrt[7]{x^6}}-14x^6-\dfrac{3}{4\sqrt{x^3}}$.

6.57. $t>0$, $x'=\dfrac{7}{2}\sqrt{t^5}$.

6.58. $x\neq 0$, $y'=\dfrac{-7}{(\sqrt{x})^9}$.

6.59. $y'=16x-3x^2$.

6.60. $y'=24x^2+\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

6.61. $x\neq\frac{2}{3}$, $y'=\dfrac{-9}{(3x-2)^2}$.

6.62. $2x^2-5x+1\neq 0$, $y'=\dfrac{-20x+25}{(2x^2-5x+1)^2}$.

6.63. $7x^5-x+2\neq 0$, $y'=\dfrac{-3x(21x^5+x-4)}{(7x^5-x+2)^2}$.

6.64. $x^3+x-1\neq 0$, $y'=\dfrac{8x^2(2x-3)}{(x^3+x-1)^2}$.

6.65. $x\neq 1$, $y'=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$.

6.66. $y'=\dfrac{-x^2+74x+7}{(x^2+7)^2}$.

6.67. $x\neq -3$, $x\neq 1$, $y'=\dfrac{4x(x-3)}{(x+3)^2(x-1)^2}$.

6.68. $x\neq\pm 1$, $x\neq\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $y'=\dfrac{-6x(1+3x-5x^3)}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2}$.

6.69. $x>0$, $x\neq 1$, $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x})^2}$.

6.70. $t>0$, $z'=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{2t})^2}$.

6.71. $s'=21(3t+1)^6$.

6.72. $v'=5(4z^2-5z+13)^4(8z-5)$.

6.73. $t\neq 0$, $x'=\dfrac{-4}{t^2}\left(\dfrac{1}{t}+4\right)^3$.

6.74. $t\neq 0$, $s'=6\left(14t+\dfrac{4}{t^2}\right)\left(7t^2-\dfrac{4}{t}+6\right)^5$.

6.75 $|x|>2,\ y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

6.76. $ax^2+bx+c>0,\ z'=\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

6.77. $t<\frac{2}{3},\ y'=\frac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{(\sqrt{2-3t})^3}$.

6.78. $0<t<6,\ s'=\dfrac{t-3}{(\sqrt{6t-t^2})^3}$.

6.79. $y'=\dfrac{4x^2}{\sqrt[3]{(2-x^3)^7}}$.

6.80. $y'=-\dfrac{p}{n}\cdot\dfrac{b}{\sqrt[n]{(a+bx)^{p+n}}}$.

6.81. $y'=\dfrac{pnx^{p-1}}{(b-x^p)^{n+1}}$.

6.82. $x>1,\ y'=-\frac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{(\sqrt[4]{x-1})^7}$.

6.83. $a\neq 0,\ u'=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+v^2}\,(v-\sqrt{a^2+v^2})}$.

6.84. $-a<x<a,\ y'=\dfrac{-a}{(a+x)\sqrt{(a+x)(a-x)}}$.

6.85. $a^2-z^2>0,\ v'=\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-z^2)^3}}$.

6.86. $x>0,\ y'=\dfrac{3(1-3x^2)}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$.

6.87. $x\neq -1,\ y'=\dfrac{x(x^3+2)}{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}$.

6.88. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0,\ z'=\dfrac{-2x^2+10x-11}{(x-3)(x-4)\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}$

6.89. $x\neq a,\ z'=\dfrac{2a^2x}{(a^2+x^2)\sqrt{a^4-x^4}}$.

6.90. $t\neq 1,\ s'=\dfrac{-1}{2(1+\sqrt{t})\sqrt{t(1-t)}}$.

6.91. $v\neq \pm 1,\ u'=\dfrac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}$.

6.92. $y'=u'vw+uv'w+uvw'$.

6.93. $a\neq 0,\ v'=\dfrac{-1}{a}\sin\dfrac{t}{a}$.

6.94. $x'=ab\cos bt$.

6.95. $x\neq 0,\ y'=\dfrac{-a^2}{x^2}\cos\dfrac{a}{x}$.

6.96. $z'=4\cos^2 x$.

6.97. $s'=3\sin 6t$.

6.98. $v'=-5\sin\frac{1}{4}t\cos^4\frac{1}{4}t$.

6.99. $\cos t\neq 0,\ s'=\dfrac{4\sin t}{\cos^5 t}$.

6.100. $\sin 2t\neq 0,\ v'=\dfrac{-30\cos 2t}{\sin^4 2t}$.

6.101. $\sin 2t\neq 0,\ s'=\dfrac{\sin^3 t-\cos^3 t}{\sin^2 2t}$.

6.102. $\alpha\neq0$, $\sin\alpha\neq0$, $z'=(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)$.

6.103. $\operatorname{tg}x\neq-1$, $y'=\dfrac{(1+\operatorname{tg}x)(\sin x+x\cos x)-x\sin x\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg}x)^2}$.

6.104. $\sin 2x\neq-1$, $y'=\dfrac{\sin x+\cos x+x(\sin x-\cos x)}{1+\sin 2x}$.

6.105. $y'=-\sin^3 x$.

6.106. $y'=\sin^2 x\cos^5 x$.

6.107. $x\neq0$, $\cos\sqrt{x}\neq0$, $y'=\dfrac{2\sin^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos^5\sqrt{x}}$.

6.108. $\sin x\neq0$, $y'=\dfrac{-3}{\sin^4 x}$.

6.109. $y'=(a^2+1)e^{ax}\sin x$.

6.110. $y'=xe^{2x}(2\sin x+x\cos x+2x\sin x)$.

6.111. $x>0$, $y'=\dfrac{\sin 2\sqrt{\dfrac{1}{x}}}{2x\sqrt{x}}$.

6.112. $x>0$, $y'=-3\sqrt{\dfrac{3}{x^3}}\sin^2\sqrt{\dfrac{3}{x}}\cos\sqrt{\dfrac{3}{x}}$.

6.113. $\cos x\neq0$, $y'=\dfrac{7\sin^3 x}{\cos^2 x}$.

6.114. $\sin x\neq0$, $y'=-3\dfrac{\cos x}{\sin^4 x}(2+\cos^2 x)$.

6.115. $x>0$, $\sin x\neq0$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\sin x+\sqrt{x+2\sqrt{x}}}}\left[\cos x+\dfrac{1}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$.

6.116. $x\neq0$, $\cos\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\neq0$, $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)>-1$,

$$y'=\frac{x^2-1}{2x^2\cos^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}.$$

6.117. $\cos 3u\neq0$, $z'=\dfrac{3}{\cos^2 3u}$.

6.118. $z'=\operatorname{tg}^2 u+\operatorname{ctg}^2 u$.

6.119. $y'=4\cos 4x$.

6.120. $y'=\dfrac{3}{1+9x^2}$.

6.121. $y'=\dfrac{14}{4+x^2}$.

6.122. $0<t<2$, $x'=\dfrac{-1}{\sqrt{t(2-t)}}$.

6.123. $-1<t<1$, $x'=\dfrac{t}{|t|\sqrt{1-t^2}}$. **6.124.** $0<t<1$, $x'=\dfrac{3\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t^3}}$.

6.125. $|t|>1$, $x'=\dfrac{-1}{|t|\sqrt{t^2-1}}$.

6.126. $y'=0$. Uwaga. W przedziale $0<x<1$ zachodzą następujące równości $\arcsin\sqrt{1-x^2}=\arccos x$ i $\arcsin x+\arccos x=\frac{1}{2}\pi$, a więc w tym przedziale funkcja y jest stała: $y=\frac{1}{2}\pi$.

6.127. $-1<t<1$, $x'=\dfrac{2}{\sqrt{1-t^2}}$. **6.128.** $y'=\dfrac{1}{2(x^2+1)}$.

6.129. $x>1$, $y'=\dfrac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^2}}$. **6.130.** $y'=\operatorname{arctg} x$.

6.131. $y'=x^4\operatorname{arctg} x+\dfrac{x^5-x}{5(1+x^2)}+\frac{1}{5}x^3-\frac{1}{5}x$. **6.132.** $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

6.133. $-1<x<1$, $y'=\dfrac{\sqrt{2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$. **6.134.** $-1<x<1$, $y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{(1-x)(1+x)}}$

6.135. $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$. **6.136.** $y'=\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

6.137. $y'=\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

6.138. $\operatorname{arcctg} 2x\neq 0$, $y'=\dfrac{\pi}{(1+4x^2)(\operatorname{arcctg} 2x)^2}$.

6.139. $\arcsin y\neq \pm 1$, $z'=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}\,[(\arcsin y)^2-1]}\sqrt{\dfrac{1-\arcsin y}{1+\arcsin y}}$.

6.140. $y'=3x^2\operatorname{arctg}^3 x+\dfrac{3x^5}{1+x^6}$.

6.141. $y\neq\pm\frac{1}{4}$, $z'=\dfrac{4}{(1-4y)^2}\left(\sqrt{\dfrac{1-4y}{1+4y}}+\arcsin 4y\right)$.

6.142. $y'=-\dfrac{\sin x}{2+\sin x}$. **6.143.** $y'=-\dfrac{1}{a+b\cos x}$.

6.144. $y'=3e^{3x}$. **6.145.** $y'=\frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}x}$.

6.146. $y'=e^x(f(x)+f'(x))$. **6.147.** $y'=3e^{-2x}(-2g(x)+g'(x))$.

6.148. $y'=e^{\sin x}\cos x$. **6.149.** $y'=-5e^{\cos x}\sin x$.

6.150. $y'=-e^{\cos^2 x}\sin 2x$. **6.151.** $y'=18e^{2\sin^3 x}\sin^2 x\cos x$.

6.152. $z'=v^3e^v$.

6.153. $z'=e^{3x}(30x^2+20x-3)$.

6.154. $x>0$, $z'=\dfrac{4x^2+1}{4x\sqrt{x}}e^x$.

6.155. $y'=(1+k^2)\,e^{k \arcsin x}$.

6.156. $y'=5^x \ln 5+2^x \ln 2$.

6.157. $y'=3^x x^2(x \ln 3+3)$.

6.158. $y'=2\cdot 7^x \ln 7$.

6.159. $y'=15\cdot 10^{3x}\ln 10$.

6.160. $a>0$, $y'=a^{2x}x^{n-1}(2x \ln a+n)$.

6.161. $x\neq 0$, $y'=\dfrac{1}{x}$.

6.162. $y'=70\cdot 5^{10x}\ln 5$.

6.163. $x\neq -3$, $z'=\dfrac{-1}{x+3}$.

6.164. $x\neq 0$, $y'=\dfrac{5}{x}$.

6.165. $s'=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

6.166. $x\neq 2$, $z'=\dfrac{-3}{x-2}$.

6.167. $t\neq \pm 1$, $s'=\dfrac{1}{1-t^2}$.

6.168. $t>|2|$, $y'=\dfrac{-2}{\sqrt{t^2-4}}$.

6.169. $x\neq 0$, $x\neq 1$, $y'=\dfrac{1}{x \ln |x|}$.

6.170. $a^2\cos^2 x\neq b^2\sin^2 x$, $y'=\dfrac{2ab}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x}$.

6.171. $\cos x\neq 0$, $y'=\dfrac{1}{\cos x}$.

6.172. $y'=-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

6.173. $\cos x\neq 0$, $y'=\dfrac{1}{\cos x}$.

6.174. $y'=8 \operatorname{ctg}^5 x \cos x$.

6.175. $x\neq 0$, $x\neq 1$, $y'=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$.

6.176. $y'=\dfrac{-2}{\sqrt{x^2+1}}$. Wskazówka. Usunąć niewymierność z mianownika.

6.177. $y'=\operatorname{ctg} x$.

6.178. $x>0$, $x\neq 1$, $y'=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$.

6.179. $y'=-\dfrac{a}{x(a+x)}$.

6.180. $y'=\dfrac{1-\ln(\ln x)}{x(\ln x)^2}=\dfrac{1-y\ln x}{x(\ln x)^2}$.

6.181. $y'=-\dfrac{\ln a}{x(\ln x)^2}$.

6.182. $x>0$, $y'=5x^{5x}(\ln x+1)$.

6.183. $x>0$, $y'=-30x^{-3x}(\ln x+1)$.

6.184. $x\neq 0$, $y'=x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$. **6.185.** $y'=3x^{\cos x}\left(\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right)$.

6.186. $\dfrac{a}{x}>0$, $y'=\left(\dfrac{a}{x}\right)^x\left(\ln\dfrac{a}{x}-1\right)$. **6.187.** $x>0$, $y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

6.188. $a>0$, $y'=x^{\ln a-1}\ln a$.

Wskazówka. $a=e^{\ln a}$, $a^{\ln x}=(e^{\ln a})^{\ln x}=(e^{\ln x})^{\ln a}=(x^{\ln a})$.

6.189. $y'=5^{\ln 2}\ln 5x^{\ln 5-1}$.

6.190. $y'=0$. Uwaga. Pochodna $y'=0$, ponieważ $y=x^{1/\ln x}=(e^{\ln x})^{1/\ln x}=e$.

6.191. $\sin x>0$, $y'=(\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$.

6.192. $x>0$, $y'=(\operatorname{arctg} x)^x\left(\ln\operatorname{arctg} x+\dfrac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right)$.

6.193. $\operatorname{tg} x>0$, $y'=(\operatorname{tg} x)^{\sin x}\left(\dfrac{1}{\cos x}+\cos x\ln\operatorname{tg} x\right)$.

6.194. $\operatorname{tg} x>0$, $y'=(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos x}}\left(\dfrac{1}{\sin x\cos^2 x}+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\ln\operatorname{tg} x\right)$.

6.195. $\cos x>0$, $\sin x\neq 0$, $y'=-(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}\left(\dfrac{\ln\cos x}{\sin^2 x}+1\right)$.

6.196. $y'=e^{x+e^x}$.

6.197. Jeżeli $x>0$, to $x=e^{\ln x}$, $y=x^{e^x}=(e^{\ln x})^{e^x}=e^{e^x\ln x}$,

$$y'=e^{e^x\ln x}\left(e^x\ln x+e^x\frac{1}{x}\right)=e^{e^x\ln x}e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)=e^{x+e^x\ln x}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right),$$

albo inaczej:

$$\ln y=e^x\ln x,\quad (\ln y)'=\frac{y'}{y}=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right),\quad y'=ye^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)=e^{e^x}e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right).$$

6.198. Jeżeli $x>0$, to $x=e^{\ln x}$, $x^x=e^{x\ln x}$, $y=x^{x^x}=e^{e^{x\ln x}\ln x}$,

$$y'=e^{e^{x\ln x}\ln x}(e^{x\ln x}\ln x)'=x^{x^x}\left(e^{x\ln x}(x\ln x)'\ln x+e^{x\ln x}\frac{1}{x}\right)=$$

$$=x^{x^x}e^{x\ln x}\left((\ln x)^2+\ln x+\frac{1}{x}\right)=x^{x+x^x}\left((\ln x)^2+\ln x+\frac{1}{x}\right),$$

albo inaczej:

$$\ln y=x^x\ln x,\qquad (\ln y)'=\frac{y'}{y}=(x^x)'\ln x+x^x\frac{1}{x},$$

ale

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(\ln x + 1),$$

więc

$$\frac{y'}{y} = x^x(\ln x + 1)\ln x + x^x \; \frac{1}{x} = x^x \left((\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x}\right),$$

skąd

$$y' = x^{x^x} x^x \big((\ln x)^2 + \ln x + 1\big).$$

6.199. $y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right).$ **6.200.** $y' = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} \left(\frac{\ln x - 1}{x^2}\right).$

6.201. $v = \frac{ds}{dt} = -\frac{3}{2} t^{-\frac{3}{2}}, \; v(\frac{1}{4}) = -12.$ **6.202.** $v = \frac{ds}{dt} = 15 t^{\frac{1}{2}}, \; v(4) = 30.$

6.203. $v = \frac{ds}{dt} = \frac{40}{3} \sqrt[3]{2} t^{\frac{2}{3}}, \; v(2) = \frac{80}{3}.$ **6.204.** $v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} t^{-\frac{1}{2}}, \; v(2) = \frac{\sqrt{6}}{4}.$

6.205. $45°$. **6.206.** $135°$.

6.207. W punktach $(-4, 4)$ i $(2, -2)$. **6.208.** W punkcie $(0,1)$.

6.209. Stałe pole $|2C|$. **6.210.** Stała długość a.

6.211. $p^2 - 4q = 0$. **6.212.** $(\frac{1}{3}p)^3 + (\frac{1}{2}q)^2 = 0$.

6.213. W punkcie $(\frac{1}{2}, -\ln 2)$. **6.214.** $\operatorname{tg} \varphi = 2\sqrt{2}$.

6.215. 7 km/h. **6.216.** 5. **6.217.** $2\sqrt{3}\, r, \; -2\sqrt{3}\, r$.

6.226. $y'' = \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$ **6.227.** $y'' = \frac{-16x}{(1+4x^2)^2}.$

6.228. $y'' = \frac{2(\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$ **6.229.** $y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$

6.230. $y = \frac{1}{3}\ln(1+x^2), \; y'' = \frac{2(1-x^2)}{3(1+x^2)^2}.$

6.231. $y'' = e^{\sin x}(2\cos x + x\cos^2 x - x \sin x).$

6.232. $y'' = e^{\varphi(x)}\big((\varphi'(x))^2 + \varphi''(x)\big).$

6.233. $x > 0$; $y''' = \frac{42}{125} x^{-12/5}.$ **6.234.** $x \neq 1$; $y''' = \frac{12}{(1-x)^4}.$

6.235. $y''' = 27\cos(1-3x).$ **6.236.** 0.

6.237 $-\frac{1}{2}$. **6.238.** 2. **6.239.** 0. **6.240.** 1.

6.241. -4. **6.242**. 2. **6.243**. -2. **6.244**. -8.

6.245. $s'=-1$, $s''=-12$. **6.246**. $s'=-20$, $s''=4$.

6.247. $s'=0$, $s''=0$. **6.248**. $s'=-3$, $s''=18$.

6.249. $s''=18$. **6.250**. $s''=\frac{1}{4}(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\sqrt{2})\sqrt{3}$.

6.251. $y^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{1}{2}\pi)$. **6.252**. $y^{(n)}=n!$.

6.253. $x>0$; $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

6.254. $x>0,\ n>1$; $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n x^n}\sqrt{x}$.

6.255. $x\neq0,\ n>1$; $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n x^n}\sqrt[3]{x}$.

6.256. $ax+b\neq0$; $y^{(n)}=(-a)^n\cdot\dfrac{n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

6.259. Prawo ruchu dla punktu M_1: $x=a\cos\omega t$; prędkość w chwili t jest równa $-\omega a\sin\omega t$, przyśpieszenie w chwili t wynosi $-a\omega^2\cos\omega t$. Prędkość początkowa 0, przyśpieszenie początkowe $-a\omega^2$, prędkość przy $x=0$ wynosi $-a\omega$, przyśpieszenie przy $x=0$ wynosi 0.

6.260. Prędkość równa się $b-2ct$, przyśpieszenie $-2c$; $t=b/2c$.

DO ROZDZIAŁU VII

7.11. $\dfrac{dy}{dx}=-2$. **7.12.** $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}t$.

7.13. $t\neq1$, $t\neq-1$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-(t^2+1)}{t(t-2)(t+1)^2}$, gdzie $t\neq0$, $t\neq2$.

7.14. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2t}{t+1}$. **7.15.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{b-t}{a-t}\right)^2$.

7.16. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t+1}{t(t^2+1)}$ **7.17.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t^2-1}{2t}$.

7.18. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2(t+1)^2}$. **7.19.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2t}{1-t^2}$.

7.20. $\dfrac{dy}{dx}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}t$. **7.21.** $\dfrac{dy}{dx}=-\operatorname{tg}t$.

7.22. $\dfrac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}$.

7.23. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$.

7.24. $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+1}{2}t$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} = 0$.

7.25. $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} 3t$.

7.26. $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} 3t$.

7.27. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$.

7.28. $t>0$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$.

7.29. $t \neq -1$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$, gdzie $t \neq \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$.

7.30. $R>0$, $r>0$, $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2R+r}{2R}t\right)$.

7.31. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-a\varphi} - e^{-2a\varphi}$.

7.32. $\dfrac{dy}{dx} = -e^{-2at}$.

7.33. $\dfrac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2}(e^{at} - 1)$.

7.34. $\dfrac{dy}{dx} = \begin{cases} -1 & \text{przy } t<0, \\ 1 & \text{przy } t>0. \end{cases}$

7.35. $\dfrac{dy}{dx} = 1$.

7.36. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.

7.37. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2-5\sqrt{2}}{36}$.

7.38. $\dfrac{dy}{dx} = 8$.

7.39. $\dfrac{dy}{dx} = -16$.

7.40. $\dfrac{dy}{dx} = -5$.

7.41. $\dfrac{ds}{dt} = t\sqrt{9t^2+16}$, $y = 2x^{\frac{2}{3}}$ (parabola półsześcienna).

7.42. $\dfrac{ds}{dt} = k\sqrt{a^2\sin^2 kt + b^2\cos^2 kt}$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsa).

7.43. $\dfrac{ds}{dt} = \tfrac{3}{2}a\sin 2t$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (asteroida).

7.44. 0; odcinek prostej $x+y-1=0$.

7.45. $2e^{9t}$; gałąź hiperboli $xy=1$ w pierwszej ćwiartce.

7.46. $\dfrac{-b}{a^2\sin^3 t}$.

7.47. $\dfrac{-1}{4a\sin^4\frac{1}{2}t}$.

7.48. $\dfrac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$.

7.49. $\dfrac{1}{2a}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$, $t>0$.

7.50. $\dfrac{(1+t)t}{(1-t)^3}$. **7.51.** $2t^2+2$.

7.52. $-\sqrt{1-t^2}$. **7.53.** $\dfrac{2e^{-t}}{(\cos t-\sin t)^3}$.

7.54. Równanie toru:

$$y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2,$$

długość rzutu

$$\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Otrzymujemy

$$v=\sqrt{v_0^2-2v_0\,gt\sin\alpha+g^2t^2},\qquad \mathrm{tg}\,\varphi=\frac{v_0\sin\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}.$$

7.55. $y=x+\dfrac{(4-\pi)a}{2}$. **7.56.** $7x-10y+6=0$.

7.57. $\frac{1}{4}\pi$. **7.58.** $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$.

DO ROZDZIAŁU VIII

8.3. Wnętrze okręgu o promieniu równym 4 i o środku w początku układu współrzędnych.

8.4. Wnętrze obszaru leżącego w pierwszej ćwiartce ograniczonego osiami układu współrzędnych i łukiem okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu równym 2.

8.5. Wnętrze okręgu ze środkiem w punkcie $3-4i$ i promieniu równym 5.

8.6. a) Okrąg o promieniu równym 3 i środku w początku układu współrzędnych. b) Półprosta wychodząca z początku układu współrzędnych i tworząca z dodatnim kierunkiem osi rzeczywistej kąt równy $\frac{1}{4}\pi$.

8.7. $5(\cos\pi+i\sin\pi)$, **8.8.** $2(\cos\frac{1}{2}\pi+i\sin\frac{1}{2}\pi)$.

8.9. $\sqrt{2}(\cos\frac{1}{4}\pi+i\sin\frac{1}{4}\pi)$. **8.10.** $2(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi)$.

8.11. i. **8.12.** $1+i$.

8.13. $\frac{1}{25}(7-24i)$. **8.14.** $\pm(1-2i)$.

8.15. $\pm(3+i)$. **8.16.** $32i$.

8.17. $2^9(1-i\sqrt{3})$. **8.18.** -27.

8.19. i. **8.20.** 1. **8.21.** $2i^{n-1}$

8.22. 1, $\frac{1}{4}(-(\sqrt{5}+1)\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}})$, $\frac{1}{4}((\sqrt{5}-1)\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}})$, ± 1, $\pm i$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$.

8.23. $2\sqrt{2}(\cos(\frac{7}{12}\pi+a)+i\sin(\frac{7}{12}\pi+a))$.

8.24. $x_1=\cos\frac{1}{4}\pi+i\sin\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$, $x_2=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$.

8.25. $x_1=1$, $x_2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$, $x_3=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$.

8.26. $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$, gdzie $\varphi=\frac{1}{6}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi\,(k=0,1,2)$;

$$x_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i,\qquad x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i,\qquad x_3=-i.$$

8.27. $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$, gdzie $\varphi=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi\ (k=0,1,2,3)$;

$$x_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i,\qquad x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i,\qquad x_3=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i,\qquad x_4=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i.$$

8.28. $x=\sqrt{2}\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$, $(k=0,1,2)$;

$$x_1=\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\qquad x_2=-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}-i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right),\qquad x_3=\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}-i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right).$$

8.29. $x_1=2+i$, $x_2=-2-i$.

8.30. $x=\sqrt{2}\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi=\frac{7}{12}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi\ (k=0,1,2)$;

$$x_1=-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)+\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\,i,\qquad x_2=-1-i,\qquad x_3=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\,i.$$

8.31. $x_1=\sqrt{3}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi=\frac{1}{6}\pi+k\cdot\frac{1}{3}\pi\,(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$;

$$x_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i,\qquad x_2=i\sqrt{3},\qquad x_3=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i,$$

$$x_4=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i,\qquad x_5=-i\sqrt{3},\qquad x_6=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$$

8.32. $x_1=1$, $x_2=i$, $x_3=-1$, $x_4=-i$.

8.33. $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$, gdzie $\varphi=\frac{1}{8}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi\ (k=0,1,2,3)$;

$$x_1=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\,i\sqrt{2-\sqrt{2}},\qquad x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\,i\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$x_3=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\,i\sqrt{2-\sqrt{2}},\qquad x_4=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\,i\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

8.34. $x=2(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi=\frac{1}{6}\pi+k\frac{1}{3}\pi\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$;

$$x_1=\sqrt{3}+i,\qquad x_2=2i,\qquad x_3=-\sqrt{3}+i,\qquad x_4=-\sqrt{3}-i,\qquad x_5=-2i,\qquad x_6=\sqrt{3}-i.$$

8.35. $x=4(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi=k\cdot\frac{2}{5}\pi(k=0,1,2,3,4)$;

$$x_1=4,\qquad x_2=(\sqrt{5}-1)+i\sqrt{10+2\sqrt{5}},\qquad x_3=-(\sqrt{5}+1)+i\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$x_4=-(\sqrt{5}+1)-i\sqrt{10-2\sqrt{5}},\qquad x_5=(\sqrt{5}-1)-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

8.36. $x=\sqrt{2}\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi\ (k=0,1,2,3)$;

$$x_1=1+i,\qquad x_2=-1+i,\qquad x_3=-1-i,\qquad x_4=1-i.$$

8.37. $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$, gdzie $\varphi=k\cdot\frac{1}{3}\pi$ $(k=0,1,2,3,4,5,6)$;

$x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$, $x_3=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $x_4=-1$, $x_5=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$, $x_6=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$.

8.38. $-2,\ 1,\ \pm i\sqrt{3}$.

8.39. Wskazówka. Mamy $(\cos x+i\sin x)^5=\cos 5x+i\sin 5x$. Lewą stronę podnieść do potęgi 5 według wzoru Newtona i przyrównać część rzeczywistą wyniku do $\cos 5x$:

$$\cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x\,.$$

8.40. $\sin 6x=6\cos^5 x\sin x-20\cos^3 x\sin^3 x+6\cos x\sin^5 x$.

8.41. $\sin 7x=7\cos^6 x\sin x-35\cos^4 x\sin^3 x+21\cos^2 x\sin^5 x-\sin^7 x$.

8.42. $\cos 8x=\cos^8 x-28\cos^6 x\sin^2 x+70\cos^4 x\sin^4 x-28\cos^2 x\sin^6 x+\sin^8 x$.

8.45. $x_1=2$, $x_2=-1-\sqrt{3}$, $x_3=-1+\sqrt{3}$.

8.46. $x_1=3$, $x_2=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$, $x_3=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$.

8.47. $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}(-1+5\sqrt{3}\,i)$, $x_3=\frac{1}{2}(-1-5\sqrt{3}\,i)$.

8.48. $x_1=4$, $x_2=-2$, $x_3=-2$.

8.49. $x_1=3$, $x_2=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{15}\,i$, $x_3=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{15}\,i$.

8.50. $x_1=-1$, $x_2=x_3=3$.

8.51. $x_1=3$, $x_2=x_3=-i$, $x_4=x_5=i$.

8.52. $x_1=-2$, $x_2=4$, $x_3=-1-i$, $x_4=-1+i$.

8.53. $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-2i$, $x_4=2i$, $x_5=-3i$, $x_6=3i$.

8.54. $x_1=3$, $x_2=4$, $x_3=-2$.

8.55. $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}i$, $x_3=-\frac{1}{2}i$.

8.56. $x_1=2\sqrt{2}\cos 15°=1+\sqrt{3}$, $x_2=-2$, $x_3=1-\sqrt{3}$.

8.57. $x_1=6$, $x_2=8$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=-\frac{2}{3}$.

8.64. $x=4\cos(\frac{2}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi)$ $(k=0,1,2)$.

8.65. $u=\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$, $v=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$; $x_1=u+v$, $x_2=u\varepsilon+v\varepsilon^2$, $x_3=u\varepsilon^2+v\varepsilon$, gdzie $\varepsilon=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$ lub $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$.

8.66. $x=2\sqrt{\frac{71}{3}}\cos(\frac{3}{10}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi)$ $(k=0,1,2)$.

8.67. $x_1=2\sqrt{3}$, $x_2=x_3=-\sqrt{3}$.

8.68. $u=\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}}$, $v=\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}}$; $x_1=u+v$, $x_2=u\varepsilon+v\varepsilon^2$, $x_3=u\varepsilon^2+v\varepsilon$, gdzie $\varepsilon=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$ lub $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$.

8.69. $x=28\cos(\frac{1}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi)$ $(k=0,1,2)$.

8.70. $u=-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt[3]{19+9\sqrt{6}}=-\frac{1}{3}(1+\sqrt{6})\sqrt{3}$, $v=\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt[3]{19-9\sqrt{6}}=\frac{1}{3}(1-\sqrt{6})\sqrt{3}$; $x_1=u+v=-2\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}-i$, $x_3=\sqrt{2}+i$.

DO ROZDZIAŁU IX

9.23. -10.

9.24. -60.

9.25. $-ayz-bxz-cxy$.

9.26. 8.

9.27. 4.

9.28. 1000.

9.31. 98.

9.32. 14.

9.33. $(x_4-x_3)\big((x_3-x_2)(x_4-x_2)-2(x_3-x_1)(x_4-x_1)\big)$.

9.34. $\prod_{k=1}^{n}(a_{kk}a_{2n-k+1,2n-k+1}-a_{k,2n-k+1}a_{2n-k+1,k})$.

9.35. $x=3$, $y=1$.

9.36. Układ sprzeczny.

9.37. $x=5$, $y=-2$.

9.38. Nieskończenie wiele rozwiązań, $x=2y+5$; y dowolne.

9.39. $k=2$, każda para liczb spełnia układ; $k=\frac{1}{2}$, układ sprzeczny; przy innych k jedno rozwiązanie.

9.40. $k=6$, nieskończenie wiele rozwiązań, $y=-\frac{1}{2}x+3$, x dowolne, $k=-6$, nieskończenie wiele rozwiązań, $y=\frac{1}{2}x-3$, x dowolne; przy innych k jedno rozwiązanie.

9.41. $x=1$, $y=2$, $z=3$.

9.42. $x=\frac{1}{5}$, $y=-\frac{3}{5}$, $z=0$.

9.43. $x=2$, $y=5$, $z=4$.

9.44. $x=-9$, $v=-3$, $z=4$.

9.45. $y=\frac{4}{3}x$, x dowolne.

9.46. $x=2z-\frac{5}{2}y$, y i z dowolne.

9.47. $k=2$, każda para liczb jest rozwiązaniem; $k=-2$, $x=0$, y dowolne, przy innych k nieskończenie wiele rozwiązań, $x=3(k+2)\,y$, y dowolne.

9.48. $k=5$, $y=0$, x dowolne; $k\neq 5$, $y=\frac{1}{3}(k-5)\,x$.

9.49. Nieskończenie wiele rozwiązań, $y=\frac{2}{3}x$, x dowolne.

9.50. $x=0$, $y=0$.

9.51. $k=-6$ albo $k=6$, nieskończenie wiele rozwiązań $y=-\frac{1}{9}kx$; przy innych k mamy $x=0$, $y=0$.

9.52. Tylko rozwiązanie zerowe $x=0$, $y=0$.

9.53. Nieskończenie wiele rozwiązań $x=6y-3z$, y i z dowolne.

9.54. Nieskończenie wiele rozwiązań $x=\frac{3}{2}y$, y dowolne, $z=0$.

9.55. Tylko rozwiązanie zerowe $x=0$, $y=0$.

9.56. Nieskończenie wiele rozwiązań $x=\frac{3}{2}y$, y dowolne.

9.57. $x=3$, $y=2$, $z=1$.

9.58. $z=22x-33y-11$; $t=-16x+24y+8$.

9.59. Układ sprzeczny. **9.60**. Układ sprzeczny.

9.61. $z=-x-2y-4{,}5$; $t=-2x-4y-12{,}5$; $u=-2x-4y-7{,}5$.

9.62. $x=\frac{1}{7}(8t-6)$, $y=\frac{1}{7}(1-13t)$, $z=\frac{1}{7}(15-6t)$.

9.63. $x=3$, $y=0$, $z=-5$, $t=11$. **9.64**. Układ sprzeczny.

9.65. $z=6-15x+10y$; $t=-7+18x-12y$, x i y dowolne.

9.66. $z=13$, $t=19-3x-2y$, $u=-34$, x, y dowolne.

9.67. $k=1$, każda para liczb spełnia równanie; $k=-1$, $x=1$, y dowolne; przy innych k, $x=(k+1)y+k^2+k+1$, y dowolne.

9.68. $k=2$, równanie sprzeczne; $k=-2$, $x=2$, y dowolne; przy innych k, $x=-(k+2)y+8$, y dowolne.

9.69. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$. **9.70**. $\begin{bmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{bmatrix}$. **9.71**. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ \alpha x & \alpha y & \alpha z \\ u & v & w \end{bmatrix}$.

9.72. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u+\alpha x & v+\alpha y & w+\alpha z \end{bmatrix}$ **9.73**. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ x+\alpha u & y+\alpha v & z+\alpha w \\ u & v & w \end{bmatrix}$.

9.74. Tak, jeśli pierwsza macierz jest wymiaru $n\times k$, a druga $k\times n$, to iloczyn jest macierzą kwadratową stopnia n.

9.75. 1) Aby iloczyn dwóch macierzy był tego samego wymiaru $n\times m$ co pierwszy czynnik iloczynu, drugi czynnik musi być macierzą kwadratową stopnia m; aby iloczyn dwóch macierzy był tego samego wymiaru $n\times m$ co drugi czynnik iloczynu, pierwszy czynnik musi być macierzą kwadratową stopnia n. 2) Obie macierze muszą być kwadratowe tego samego wymiaru.

9.76. Macierz zerowa stopnia czwartego.

9.77. Istnieją obydwa iloczyny:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 38 & 36 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 22 & 25 & 19 \\ 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}.$$

9.78. $\begin{bmatrix} x_1a_1+x_2a_2 & x_1b_1+x_2b_2 \\ y_1a_1+y_2a_2 & y_1b_1+y_2b_2 \\ z_1a_1+z_2a_2 & z_1b_1+z_2b_2 \end{bmatrix}$, drugi iloczyn nie istnieje.

9.79. $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 50 \\ 3 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 39 & 7 \\ 11 & 16 & 3 \end{bmatrix}$, drugi iloczyn nie istnieje. **9.80.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

9.81. Nie; równe są tylko tego samego stopnia. **9.82.** Nie.

9.83. Nie, jeśli bowiem macierz **A** jest wymiaru $n \times m$, to macierz jednostkowa z lewej strony równości macierzowej musi być stopnia m, a macierz jednostkowa z prawej strony musi być stopnia n.

9.84. Iloczyn **BA** nie jest macierzą zerową. Nie wynika.

9.85. Nie, jeśli bowiem macierz **A** jest wymiaru $n \times m$, to macierz $\mathbf{O}_L$ jest wymiaru $m \times k$, a macierz $\mathbf{O}_P$ jest wtedy wymiaru $n \times k$ przy dowolnym k. Jeżeli macierz **A** jest kwadratowa, to obie macierze zerowe są równe.

9.86. Tak, jeśli macierz **A** jest kwadratowa.

9.87. Macierz pierwotną: $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$. **9.88.** Są równe.

9.89. Symetryczna. **9.90.** $\mathbf{I}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$.

9.91. Pierwsze mnożenie w ogólnym przypadku niewykonalne, drugie zawsze wykonalne (dowodzi się, że $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$).

9.92. Wartość wyznacznika zostanie pomnożona przez 3.

9.93. $\begin{bmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{bmatrix}$. **9.94.** $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$.

9.95. $\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$.

9.96. $\dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. **9.97.** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

9.98. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **9.99.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{bmatrix}$.

9.100. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.101. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$.

9.102. Macierz **X** nie istnieje.

9.103. Ogólne rozwiazanie ma postać (C_1, C_2 dowolne stałe):

$$\begin{bmatrix} C_1 & \frac{1}{4}(2-3C_1) \\ C_2 & \frac{1}{4}(9-3C_2) \end{bmatrix}.$$

DO ROZDZIAŁU X

10.58. $x=-6$, $y=-50$ maksimum; $x=-4$, $y=-66$ punkt przegięcia; $x=-2$, $y=-82$ minimum.

Uwaga. Aby obliczyć wartość wielomianu $y=x^3+12x^2+36x-50$ przy $x=-2$, przedstawiamy wielomian w postaci $y=((x+12)x+36)x-50$ i podstawiając $x=-2$ obliczamy kolejno: $-2+12=10$, $10\cdot(-2)=-20$, $-20+36=16$, $16\cdot(-2)=-32$, $-32-50=-82$.

10.59. $x=-1$, $y=1$ maksimum: $x=\frac{3}{2}$, $y=-\frac{123}{2}$ punkt przegięcia; $x=4$, $y=-124$ minimum.

10.60. $x=1$, $y=2$ maksimum; $x=2$, $y=0$ punkt przegięcia; $x=3$, $y=-2$ minimum.

10.61. $x=0$, $y=0$ minimum; $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{27}$ punkt przegięcia; $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{4}{27}$ maksimum.

10.62. Funkcja jest stale rosnąca; $x=0$, $y=1$ punkt przegięcia.

10.63. $x=1$, $y=4$ maksimum; $x=2$, $y=2$ punkt przegięcia; $x=3$, $y=0$ minimum.

10.64. $x=1$, $y=3$ minimum; $x=2-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $y=\frac{31}{9}$ punkt przegięcia; $x=2$, $y=4$ maksimum; $x=2+\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $y=\frac{31}{9}$ punkt przegięcia; $x=3$, $y=3$ minimum.

Uwaga. Sposób obliczania wartości wielomianu jest podany w odpowiedzi do zadania 10.58.

10.65. $x=0$, $y=1$ punkt przegięcia; $x=\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$, $y=\frac{1}{8}(-55+39\sqrt{3})$ punkt przegięcia; $x=1$, $y=2$ maksimum; $x=\frac{1}{3}(3+\sqrt{3})$, $y=\frac{1}{8}(-55-39\sqrt{3})$ punkt przegięcia, $x=3$, $y=-26$ minimum.

10.66. Funkcja określona, gdy $x\neq 0$; $x=-2$, $y=-4$ maksimum; $x=2$, $y=4$ minimum.

10.67. Funkcja określona, gdy $x\neq 0$; $x=-1$, $y=2$ minimum; $\lim\limits_{x\to -0} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +0} y=+\infty$; $x=1$, $y=2$ minimum.

10.68. $x=-\sqrt{3}$, $y=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ punkt przegięcia; $x=-1$, $y=-1$ minimum; $x=0$, $y=0$ punkt przegięcia; $x=1$, $y=1$ maksimum; $x=\sqrt{3}$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ punkt przegięcia.

10.69. Funkcja jest określona w przedziale $-2\leqslant x\leqslant 2$; $x=-\sqrt{2}$, $y=-2$ minimum; $x=0$, $y=0$ punkt przegięcia, w którym $y'=2$; $x=\sqrt{2}$, $y=2$ maksimum.

10.71. $\alpha=-3$. **10.72.** $\alpha=\pm 2$.

10.73. Przy $x=-2$, $y_{max}=-2$; przy $x=2$, $y_{min}=2$; asymptoty: $y=6$ i $y=\frac{1}{2}x$.

10.74. Funkcja jest określona, gdy $x\neq 4$; ekstremów nie ma, gdyż funkcja jest stale malejąca; asymptoty: $x=4$ i $y=2$.

10.75. $x=-2$, $y=-3$ minimum; $x=2$, $y=1$ maksimum; asymptota $y=0$.

10.76. Funkcja jest określona, gdy $x\neq -2$ i $x\neq -1$; $x=-\sqrt{2}$, $y=-17-12\sqrt{2}$ maksimum; $x=\sqrt{2}$, $y=-17+12\sqrt{2}$ minimum: asymptoty: $x=-2$, $x=-1$, $y=1$.

10.77. $x=0$, $y=-1$ minimum; $x=2$, $y=\frac{5}{3}$ maksimum; asymptota $y=1$.

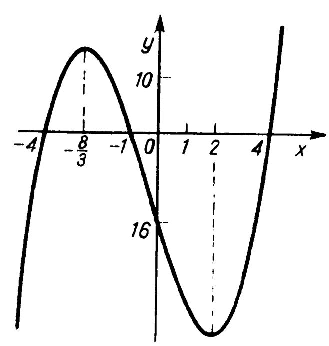
10.78. $x=-1$, $y=-2$ minimum; $x=1$, $y=2$ maksimum; asymptota $y=0$.

10.79. Funkcja jest określona, gdy $x\neq -1$; $y'=\dfrac{(x+2)^3(x-2)}{(x+1)^4}$; $x=-2$, $y=0$ maksimum; $x=2$, $y=\frac{256}{27}$ minimum; asymptoty: $x=-1$, $y=x+5$.

10.80. Przy $x=1$, $y_{max}=-4$; przy $x=5$, $y_{min}=4$; asymptoty; $x=3$, $y=x-3$.

10.81. Przy $x=\frac{1}{4}\pi$, $y_{max}=\pi-1\approx 2{,}14$; przy $x=-\frac{1}{4}\pi$, $y_{min}=1-\pi\approx -2{,}14$; asymptoty $x=\pm\frac{1}{2}\pi$.

10.82. $y'=3(x+\frac{8}{3})(x-2)$, $y''=6x+2$ (rys. R.10.1); tabelka([1]):



Rys. R.10.1

x	$-\infty$	...	$-\frac{8}{3}$	...	$-\frac{1}{3}$	...	2	...	$+\infty$
y''	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{398}{27}$ M	↘	$-\frac{286}{27}$ p	↘	-36 m	↗	$+\infty$

([1]) W tabelce symbol M oznacza maksimum, m — minimum, p — punkt przegięcia.

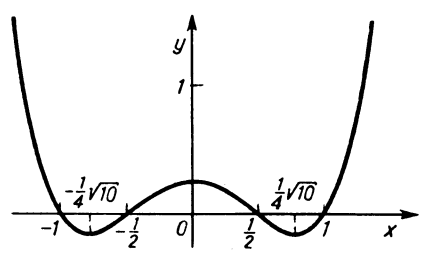
10.83. $y' = -3(x^2-3)$, $y'' = -6x$; Początek współrzędnych jest środkiem symetrii krzywej; tabelka:

x	$-\infty$	...	$-\sqrt{3}$	...	0	...	$\sqrt{3}$	...	$+\infty$
y''	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}$ m	$\nearrow$	0 p	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$ M	$\searrow$	$-\infty$

10.84. $y' = 3(x-\frac{1}{3})(x-1)$, $y'' = 6(x-\frac{2}{3})$; tabelka:

x	$-\infty$	...	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{2}{3}$	...	1	...	$+\infty$
y''	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$ M	$\searrow$	$\frac{2}{27}$ p	$\searrow$	0 m	$\nearrow$	$+\infty$

10.85. $y' = 4x^3 - \frac{5}{2}x$, $y'' = 12x^2 - \frac{5}{2}$; linia ma dwa punkty przegięcia: $x = \frac{1}{12}\sqrt{30}$ i $x = -\frac{1}{12}\sqrt{30}$; oś Oy jest osią symetrii krzywej (rys. R.10.2); tabelka:

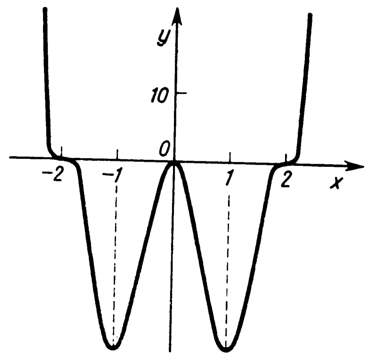


Rys. R.10.2

x	$-\infty$	...	$-\frac{1}{4}\sqrt{10}$	...	0	...	$\frac{1}{4}\sqrt{10}$	...	$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{64}$ m	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$ M	$\searrow$	$-\frac{9}{64}$ m	$\nearrow$	$+\infty$

10.86. $y' = 2(x+2)^2(x+1)x(x-1)(x-2)^2$; oś Oy jest osią symetrii krzywej (rys. R.10.3); tabelka:

x	$-\infty$	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...	$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	-27 m	↗	0 M	↘	-27 m	↗	0	↗	$+\infty$



Rys. R.10.3

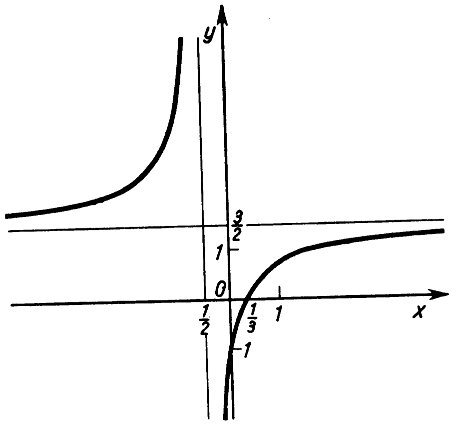
10.87. $y'=(x-2)(4x^2-7x-22)$; $x_1=\frac{1}{8}(7-\sqrt{401})\approx-\frac{13}{8}$, $x_2=\frac{1}{8}(7+\sqrt{401})\approx\frac{27}{8}$, $f(x_1)\approx-101$, $f(x_2)\approx-7{,}5$; tabelka:

x	$-\infty$	...	x_1	...	2	...	x_2	...	$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$f(x_1)$ m	↗	0 M	↘	$f(x_2)$ m	↗	$+\infty$

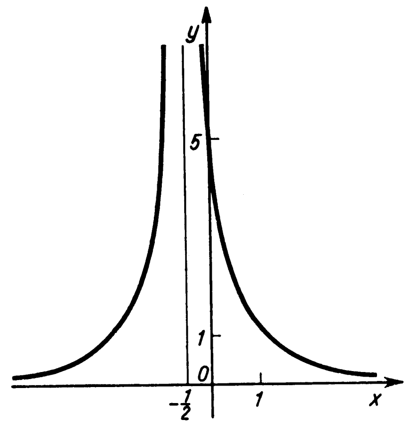
10.88. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=\pm1$, $y_{max}=1$, przy $x=0$, $y_{min}=0$.

10.89. $x\neq-\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}-\frac{5}{4(x+\frac{1}{2})}$, $y'=\frac{5}{4(x+\frac{1}{2})^2}$, $y''=\frac{-5}{3(x+\frac{1}{2})^3}$; asymptoty: $x=-\frac{1}{2}$ i $y=\frac{3}{2}$ (rys. R.10.4); tabelka:

x	$-\infty$	...	$-\frac{1}{2}$		...	0	...	$+\infty$
y'	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
y	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	-1	↗	$\frac{3}{2}$



Rys. R.10.4



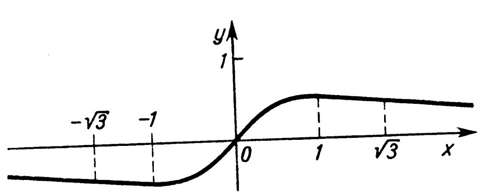
Rys. R.10.5

10.90. $x \neq -\frac{1}{2}$, $y=\dfrac{5}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$, $y'=\dfrac{-5}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)^3}$, $y''=\dfrac{15}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)^4}>0$; asymptoty $x=-\frac{1}{2}$ i $y=0$, przy czym asymptota $x=-\frac{1}{2}$ jest jednocześnie osią symetrii krzywej (rys. R.10.5); tabelka:

x	$-\infty$	...	$-\frac{1}{2}$		...	0	...	$+\infty$
y'	0	+	+	−	−	−	−	0
y	0	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	5	↘	0

10.91. $y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $y''=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$; asymptota $y=0$; punkty przegięcia dla $x=0$, $x=-\sqrt{3}$, $x=+\sqrt{3}$; początek współrzędnych jest środkiem symetrii krzywej (rys. R.10.6); tabelka:

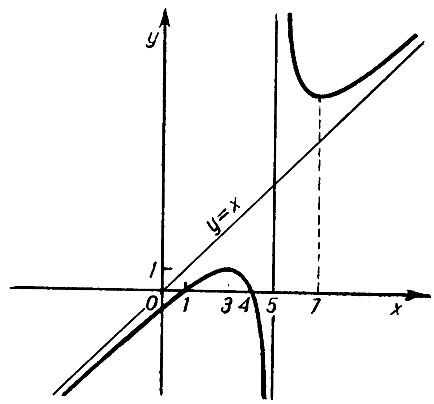
x	$-\infty$	...	-1	...	0	...	1	...	$+\infty$
y'	0	−	0	+	+	+	0	−	0
y	0	↘	$-\frac{1}{2}$ m	↗	0 p	↗	$\frac{1}{2}$ M	↘	0



Rys. R.10.6

10.92. $x \neq 5$, $y' = 1 - \dfrac{4}{(x-5)^2}$, $y'' = \dfrac{8}{(x-5)^3}$; asymptoty: $x=5$ i $y=x$ (rys. R.10.7); tabelka:

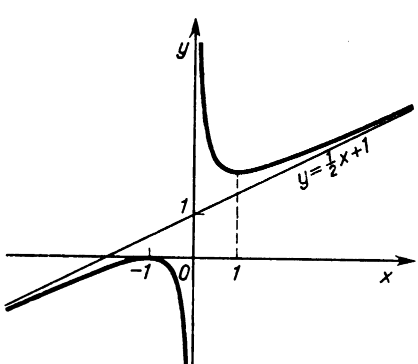
x	$-\infty$	...	3	...	5		...	7	...	$+\infty$
y'	1	+	0	−	−	−	−	0	+	1
y	$-\infty$	↗	1 *M*	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	9 *m*	↗	$+\infty$



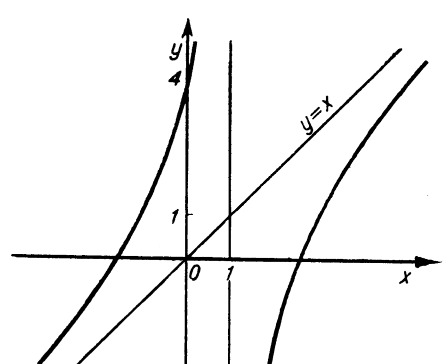
Rys. R.10.7

10.93. $x \neq 0$, $y = \frac{1}{2}x + 1 + \dfrac{1}{2x}$, $y' = \dfrac{(x+1)(x-1)}{2x^2}$, $y'' = \dfrac{1}{x^3}$; asymptoty: $x=0$ i $y=\frac{1}{2}x+1$ (rys. R.10.8); tabelka:

x	$-\infty$	...	-1	...	0		...	1	...	$-\infty$
y'	$\frac{1}{2}$	+	0	−	−	−	−	0	+	$\frac{1}{2}$
y	$-\infty$	↗	0 *M*	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	2 *m*	↗	$+\infty$



Rys. R.10.8



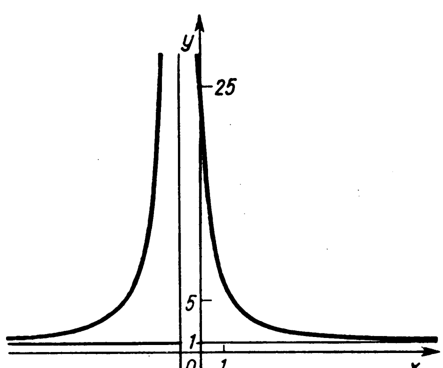
Rys. R.10.9

10.94. $x \neq 1$; $y = x - \dfrac{4}{x-1}$, $y' = \dfrac{x^2-2x+5}{(x-1)^2}$, $y'' = \dfrac{-8}{(x-1)^3}$; miejsca zerowe funkcji $x_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{17})$, $x_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{17})$; asymptoty: $y = x$ i $x = 1$ (rys. R.10.9); tabelka:

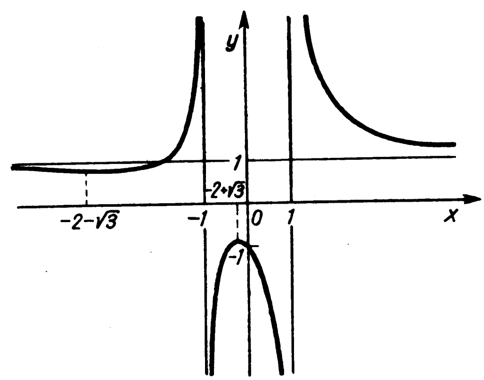
x	$-\infty$	...	1		...	$+\infty$
y'	1	+	+	+	+	1
y	$-\infty$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$+\infty$

10.95. $x \neq -1$; $y = 1 + \dfrac{24}{(x+1)^2}$, $y' = \dfrac{-48}{(x+1)^3}$, $y'' = \dfrac{144}{(x+1)^4} > 0$; asymptoty: $x = -1$, i $y = 1$, asymptota $x = -1$ jest jednocześnie osią symetrii, gdyż $y = 1 + \dfrac{24}{(x+1)^2}$ (rys. R.10.10); tabelka:

x	$-\infty$	...	-1		...	$+\infty$
y'	0	+	+	−	−	0
y	1	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	1



Rys. R.10.10



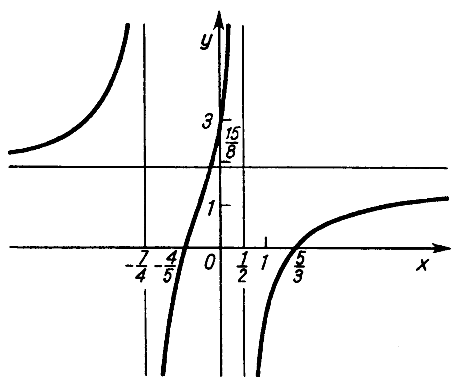
Rys. R.10.11

10.96. $|x| \neq 1$; $y = 1 + \dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}$, $y' = -\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x+1)^2(x-1)^2}$, gdzie $x_1 = -2-\sqrt{3}$, $x_2 = -2+\sqrt{3}$; asymptoty: $x = -1$, $x = 1$, $y = 1$ (rys. R.10.11); tabelka:

x	$-\infty$	...	$-2-\sqrt{3}$	...	-1		...	$-2+\sqrt{3}$	...	1		...	$-\infty$
y'	0	−	0	+	−	−	−	0	−	−	−	−	0
y	1	↘	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ m	↗	$-\infty$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ M	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	1

10.97. $x \neq -\frac{7}{4}$, $x \neq \frac{1}{2}$; $y = \frac{15}{8} - \frac{254x+55}{64\left(x+\frac{7}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$, $y' = \frac{254x^2+110x+291}{64\left(x+\frac{7}{4}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} > 0$; miejsca zerowe funkcji: $x_1 = -\frac{4}{5}$, $x_2 = \frac{5}{3}$; asymptoty: $x = -\frac{7}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{15}{8}$ (rys. R.10.12); tabelka:

x	$-\infty$	...	$-\frac{7}{4}$		...	$\frac{1}{2}$		...	$+\infty$
y'	0	+	+	+	+	+	+	+	0
y	$\frac{15}{8}$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$\frac{15}{8}$



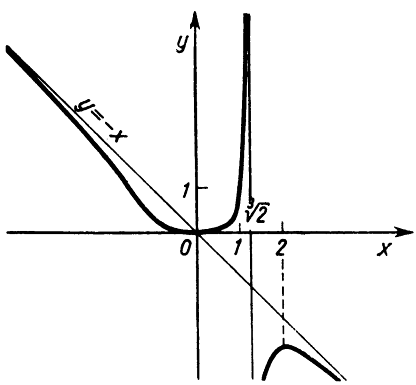
Rys. R.10.12

10.98. $x \neq \sqrt[3]{2}$; $y' = \frac{x^3(8-x^3)}{(2-x^3)^2}$, $y'' = \frac{12x^2(x^3+4)}{(2-x^3)^3}$; asymptoty: $x = \sqrt[3]{2}$ i $y = -x$ (rys. R.10.13); tabelka:

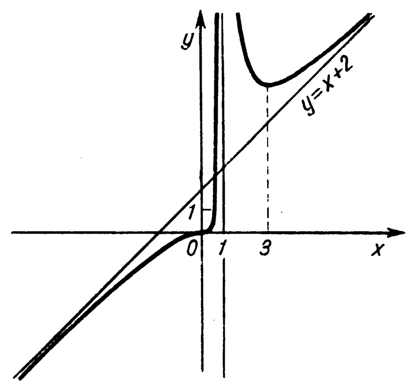
x	$-\infty$	...	$-\sqrt[3]{4}$	...	0	...	$\sqrt[3]{2}$		...	2	...	$+\infty$
y''	0	−	0	+	0	+	+	−	−	−	−	0
y'	−1	−	−	−	0	+	+	+	+	0	−	−1
y	$+\infty$	↘	$\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ *p*	↘	0 *m*	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$-\frac{8}{3}$ *M*	↘	$-\infty$

10.99. $x \neq 1$; $y = x+2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$, $y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}$; asymptoty: $x=1$ i $y = x+2$ (rys. R.10.14); tabelka:

x	$-\infty$	...	0	...	1		...	3	...	$+\infty$
y''	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
y'	1	$+$	0	$+$	$+$	$-$	$-$	0	$+$	1
y	$-\infty$	$\nearrow$	0 p	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$ m	$\nearrow$	$+\infty$



Rys. R.10.13



Rys. R. 10.14

10.100. $x \neq -2$; $y' = \dfrac{x(x+3)^2}{(x+2)^3}$; asymptoty: $x=-2$, $y=x+5$; tabelka:

x	$-\infty$	...	-3	...	-2		...	0	...	$+\infty$
y'	1	$+$	0	$+$	$+$	$-$	$-$	0	$+$	1
y	$-\infty$	$\nearrow$	0 p	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$ m	$\nearrow$	$+\infty$

10.101. Funkcja jest określona dla $x \leqslant 0$; przy $x=-1$ mamy $y_{\max}=1$; miejsca zerowe funkcji $x_1=0$, $x_2=-4$.

10.102. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=0$ mamy $y_{\min}=-1$; miejsca zerowe funkcji $x=\pm 1$.

10.103. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=4$ mamy $y_{\max}=1$ (ostrze); miejsca zerowe funkcji $x=3$, $x=5$; $y'<0$ dla $x>4$, $y'>0$ dla $x<4$.

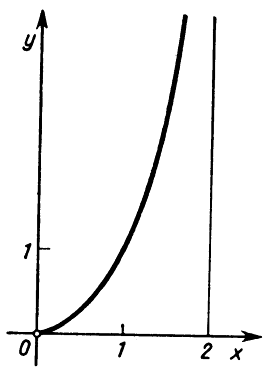
10.104. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=0$ mamy $y_{\max}=0$ (ostrze) a przy $x=1$ mamy $y_{\min}=-1$; miejsca zerowe funkcji $x=0$, $x=\frac{27}{8}$.

10.105. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=0$ i $x=2$ mamy $y_{\min}=\sqrt[3]{4}$ ostrza, a przy $x=1$ mamy $y_{\max}=2$; asymptota $y=0$.

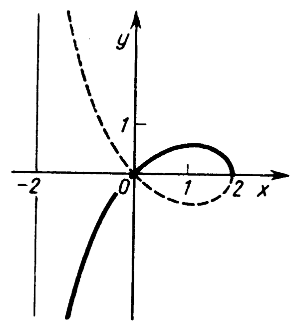
10.106. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=-2$ mamy $y_{\min}=-\sqrt[3]{16}\approx$ $\approx -2{,}52$, a przy $x=2$ mamy $y_{\max}=\sqrt[3]{16}\approx 2{,}52$, w obu punktach ekstremalnych są ostrza; asymptota $y=0$.

10.107. Funkcja jest określona, gdy $0\leqslant x<2$; $y'=\dfrac{(3-x)\sqrt{x}}{(\sqrt{2-x})^3}\geqslant 0$; asymptota $x=2$ (rys. R.10.15); tabelka:

x	0	...	1	...	2
y'	0	+	+	+	$+\infty$
y	0	↗	1	↗	$+\infty$



Rys. R.10.15



Rys. R.10.16

Uwaga. Krzywa na rysunku R.10.15 przedstawia górną połowę linii zwanej *cisoidą Dioklesa*, której ogólne równanie jest

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}\qquad (a>0).$$

10.108. Funkcja jest określona w przedziale $-2<x\leqslant 2$; pochodne

$$y'=\frac{-(x-x_1)(x-x_2)}{(\sqrt{2+x})^3\sqrt{2-x}},\quad \text{gdzie}\quad x_1=-\sqrt{5}-1,\ x_2=\sqrt{5}-1.$$

$$y''=\frac{x^2+2x-12}{(\sqrt{2+x})^5(\sqrt{2-x})^3}<0\,;$$

asymptota $x=-2$ (rys. R.10.16); tabelka:

x	-2	...	$\sqrt{5}-1$	...	2
y'	$+\infty$	+	0	−	$-\infty$
y	$-\infty$	↗	$\sqrt{10\sqrt{5}-22}$ M	↘	0

Uwaga. Wykres danej funkcji (rys. R.10.16) narysowano linią ciągłą; linia przerywana odpowiada równaniu

$$y=-x\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}.$$

Obie części razem tworzą krzywą zwaną *strofoidą*, której równanie ogólne ma postać

$$y^2=x^2\frac{a-x}{a+x}\qquad (a>0).$$

10.109. Funkcja jest określona w przedziale $0\leqslant x\leqslant 4$; pochodne

$$y'=\frac{2\sqrt{x}(3-x)}{\sqrt{4-x}},\qquad y''=\frac{2(x^2-6x+6)}{(\sqrt{4-x})^3\sqrt{x}};$$

punkt przegięcia $(3-\sqrt{3},\ (3-\sqrt{3})\sqrt[4]{12})$; tabelka:

x	0	...	3	...	4
y'	0	+	0	−	$-\infty$
y	0	↗	$3\sqrt{3}$ M	↘	0

10.110. Funkcja jest określona w przedziale $4-\sqrt{30}\leqslant x\leqslant 4+\sqrt{30}$ (w przybliżeniu $-1{,}48\leqslant x\leqslant 9{,}48$); pochodna $\dfrac{-2(x^2-6x-7)}{\sqrt{-x^2+8x+14}}$; tabelka:

x	$-4-\sqrt{30}$	...	-1	...	7	...	$4+\sqrt{30}$
y'	$-\infty$	−	0	+	0	−	$-\infty$
y	0	↘	$-\sqrt{5}$ m	↗	$7\sqrt{21}$ M	↘	0

10.111. Funkcja jest określona dla wszystkich $x\neq\pm 1$; przy $x=\sqrt{3}$ mamy $y_{\min}=\sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$, a przy $x=-\sqrt{3}$ mamy $y_{\max}=-\sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$; punkty przegięcia $(-3,\ -\frac{3}{2})$, $(0,0)$, $(3,\ \frac{3}{2})$; asymptoty $x=-1$ i $x=1$.

10.112. Funkcja jest określona dla wszystkich $x\neq 2$; przy $x=6$ mamy $y_{\min}=3/\sqrt[3]{2}$; punkt przegięcia $(12,\ 12/\sqrt[3]{100})$; asymptota $x=2$.

10.113. Funkcja jest określona w przedziale $-6\leqslant x\leqslant 6$; $y'=\dfrac{3x(24-x^2)}{\sqrt{36-x^2}}$; oś Oy jest osią symetrii krzywej; tabelka:

x	-6	...	$-2\sqrt{6}$	...	0	...	$2\sqrt{6}$	...	6
y'	$-\infty$	+	0	−	0	−	0	−	$-\infty$
y	0	↗	$48\sqrt{3}$ M	↘	0 m	↗	$48\sqrt{3}$ M	↘	0

10.114. Funkcję można przedstawić w postaci $y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, skąd wnioskujemy, że okres jej wynosi π; oś Oy jest osią symetrii krzywej; tabelka (w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$):

x	...	0	...	$\frac{1}{4}\pi$	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π	...
y''	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+
y'	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+
y	↘	1 m	↗	$\frac{3}{2}$ p	↗	2 M	↘	$\frac{3}{2}$ p	↘	1 m	↗

10.115. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=\frac{1}{4}(2k+1)\pi$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ mamy $y_{\min}=\frac{1}{2}$, a przy $x=k\pi$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ mamy $y_{\max}=1$.

10.116. Funkcja jest określona dla wszystkich $x\neq\frac{1}{2}\pi+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; przy $x=\frac{1}{4}\pi+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ mamy $y_{\max}=1$; asymptoty $x=\frac{1}{2}\pi+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

10.117. $y=1+\sin(2x-\frac{1}{6}\pi)$, okres π; $y'=2\cos(2x-\frac{1}{6}\pi)$; tabelka (w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$):

x	...	0	...	$\frac{1}{3}\pi$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π	...
y'	+	+	+	0	−	0	+	+	+
y	↗	$\frac{1}{2}$	↗	2 M	↘	0 m	↗	$\frac{1}{2}$	↗

10.118. $y=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos(2x+\frac{1}{3}\pi)$, okres π; $y'=\sin(2x+\frac{1}{3}\pi)$; tabelka (w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$):

x	...	0	...	$\frac{1}{3}\pi$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π	...
y'	+	+	+	0	−	0	+	+	+
y	↗	0	↗	$\frac{3}{4}$ M	↘	$-\frac{1}{4}$ m	↗	0	↗

10.119. Okres 2π; $y'=4\sin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\pi)\sin(\frac{1}{8}\pi-\frac{3}{2}x)$; tabelka (w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$):

x	...	0	...	$\frac{1}{12}\pi$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	$\frac{17}{12}\pi$	...	$\frac{7}{4}\pi$	...	2π	...
y'	+	+	+	0	−	0	+	0	−	0	+	+	+
y	↗	$\sqrt{2}$	↗	$\frac{3}{2}$ M	↘	-3 m	↗	$\frac{3}{2}$ M	↘	1 m	↗	$\sqrt{2}$	↗

10.120. $y=\cos x(1-\cos^2 x)$, okres 2π; $y'=\sin x(3\cos^2 x-1)$; oś Oy jest osią symetrii krzywej; tabelka (w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$):

x	...	0	...	α	...	$\pi-\alpha$	...	π	...	$\pi+\alpha$	...	$2\pi-\alpha$	...	2π	...
$\sin x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3\cos^2 x-1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	0 m	$\nearrow$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$ M	$\searrow$	$-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ m	$\nearrow$	0 M	$\searrow$	$-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ m	$\nearrow$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$ M	$\searrow$	0 m	$\nearrow$

W tabelce oznaczyliśmy $\alpha=\arccos\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (kąt α ma około 35°16′).

10.121. $y=\sin x\,(1-2\sin^2 x)$, okres 2π; $y'=\cos x\,(1-6\sin^2 x)$; początek współrzędnych jest środkiem symetrii krzywej; tabelka (w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$):

x	...	0	...	α	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	$\pi-\alpha$	...	$\pi+\alpha$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$2\pi-\alpha$	...	2π	...
$\cos x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$1-6\sin^2 x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{9}\sqrt{6}$ M	$\searrow$	-1 m	$\nearrow$	$\frac{1}{9}\sqrt{6}$ M	$\searrow$	$-\frac{1}{9}\sqrt{6}$ m	$\nearrow$	1 M	$\searrow$	$-\frac{1}{9}\sqrt{6}$ m	$\nearrow$	0	$\nearrow$

W tabelce oznaczyliśmy $\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{1}{6}}$ (kąt α ma około 24°15′).

10.122. Funkcja jest określona w następujących przedziałach $\langle\sqrt{2k\pi}, \sqrt{(2k+1)\pi}\rangle$, $\langle -\sqrt{(2k+1)\pi}, \ -\sqrt{2k\pi}\rangle$ (k=0, 1, 2, ...); przy $x=0$ mamy $y_{\min}=0$, a przy $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\,(4k+1)}$ mamy $y_{\max}=1$.

10.123. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) mamy $y_{\min}=0$, a przy $x=(2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) mamy $y_{\max}=\sqrt{2}$; w punktach minimum y' nie istnieje (ostrza).

10.124. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=-1$ mamy $y_{\max}=\frac{1}{2}\pi-1$, a przy $x=1$ mamy $y_{\min}=1-\frac{1}{2}\pi$; punkt przegięcia $(0, 0)$; asymptoty $y=x+\pi$, $y=x-\pi$.

10.125. $\dfrac{dy}{dx}=\frac{3}{2}t^2-3t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}$. Przebieg toru jest następujący: przy $t=0$ tor jest na wysokości $y=4$, wówczas $dy/dx=0$ i $d^2y/dx^2=-\frac{3}{2}$; następnie tor opada i przy $t=2$ osiąga punkt najniższy $y=0$, wówczas $dy/dx=0$ i $d^2y/dx^2=\frac{3}{2}$; przy dalszym wzrastaniu t, tor wznosi się nieograniczenie i obie pochodne rosną.

10.126. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{t^2}{t+1}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{t^2+2t}{(t+1)^3}$; przy $t=0$ jest $y=0$ i obie pochodne są równe zeru; przy wzrastaniu t, tor wznosi się nieograniczenie i obie pochodne rosną.

10.127. $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos 2t}{\cos t}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin t\cos 2t-2\sin 2t\cos t}{\cos 3t}$. Tor osiąga maksimum, gdy $t=\frac{1}{4}\pi+k\pi$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, wówczas $dy/dx=0$, $d^2y/dx^2=-4$; tor osiąga minimum, gdy $t=\frac{3}{4}\pi+k\pi$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, wówczas $dy/dx=0$, a $d^2y/dx^2=4$.

10.128. Odcinek należy przepołowić. **10.129.** $S_{\max}=\frac{1}{4}ah$.

10.130. $S_{\max}=\frac{1}{2}a^2$ (kwadrat). **10.131.** $S_{\max}=2r^2$ (kwadrat).

10.132. $S_{\max}=\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$ (trójkąt równoboczny). **10.133.** $S_{\max}=\frac{1}{2}r^2$.

10.134. $S_{\max}=\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$ (druga podstawa trapezu równa się r).

10.135. $S_{\max}=2ab$ (prostokąt o bokach $a\sqrt{2}$ i $b\sqrt{2}$).

10.136. $V_{\max}=\frac{2}{27}\pi r^3\sqrt{3}$ (wówczas wysokość stożka wynosi $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$).

10.137. $V_{\max}=\frac{64}{81}r^3$ (wówczas krawędź podstawy ostrosłupa wynosi $\frac{4}{3}r$).

10.138. Minimalna objętość stożka równa się podwojonej objętości kuli.

10.139. $V_{\max}=\frac{4}{9}\pi R^3\sqrt{3}$. **10.140.** $P_{\max}=2\pi R^2$. **10.141.** $h=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

10.142. Przyjmując za zmienną promień podstawy wpisanego walca x, mamy $V=\pi\sqrt{3}(Rx^2-\frac{23}{27}x^3)$; maksimum dla $x=\frac{18}{23}R$, wówczas $V_{\max}=\frac{108}{529}\pi R^3\sqrt{3}$.

10.143. $h=(l^{2/3}-d^{2/3})^{3/2}$. **10.144.** $\alpha=\max\left(\arccos\frac{1}{k}, \operatorname{arctg}\frac{h}{d}\right)$.

10.145. Kąt nachylenia ścian bocznych równy jest $\arccos\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$.

10.146. Jeżeli rzut punktu C na tor kolejowy oznaczymy przez B, to $PB=\frac{\alpha l}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$, jeżeli $\frac{\alpha l}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}<AB$; jeżeli $\frac{\alpha l}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\geqslant AB$, to szosę należy poprowadzić wzdłuż prostej AC.

10.147. $\sqrt{Mm}$.

Wskazówka. Przy uderzeniu sprężystym prędkość, którą uzyskuje nieporuszająca się kula o masie m_1 po uderzeniu o nią kuli o masie m_2 i prędkości v, jest równa $2m_2v/(m_1+m_2)$.

DO ROZDZIAŁU XI

11.28. $-1\leqslant x<+1$. **11.29.** $-5\leqslant x<+5$. **11.30.** $-\frac{1}{3}\leqslant x<+\frac{1}{3}$.

11.31. $-12<x<12$. **11.32.** $R=\infty$. **11.33.** $R=0$.

11.34. $-1<x<1$. **11.35.** $-1\leqslant x\leqslant 1$. **11.36.** $-\frac{5}{8}<x<+\frac{5}{8}$.

11.37. $R=0$. **11.38.** $-\frac{27}{4}<x<+\frac{27}{4}$.

11.39. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, więc $R=\frac{1}{e}$.

11.40. $R=+\infty$. **11.41.** $R=4$. **11.42.** $R=\frac{1}{4}$.

11.43. $R=\frac{4}{27}e$. **11.44.** $R=\frac{3}{2}$.

Wskazówka (do zad. 11.44). Na podstawie twierdzenia, że jeżeli $a_n>0$ i $a_n\to a\neq 0$, to $\sqrt[n]{a_n}\to 1$, znajdujemy

$$\sqrt[n]{u_n}=\frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{1+\frac{n^2}{2^n}}{1+\frac{n^3}{3^n}}}\to\frac{2}{3}.$$

11.45. $R=2$. **11.46.** $R=27$. **11.47.** $R=+\infty$.

11.48. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}<x<\frac{1}{2}\sqrt{2}$. **11.49.** $-1\leqslant x\leqslant 1$. **11.50.** $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$.

11.51. $R=1$, $a-1\leqslant x\leqslant a+1$. **11.52.** $R=2$, $-1\leqslant x<3$.

11.53. $R=1$, $-1\leqslant x<0$. **11.54.** $R=\infty$.

11.55. $R=1$, $3\leqslant x\leqslant 5$. **11.56.** $-\ln(1-x)$ przy $-1\leqslant x<1$.

Wskazówka (do zad. 11.56). Znaleźć przedtem $\frac{ds(x)}{dx}$, gdzie $s(x)$ oznacza sumę szeregu.

11.57. $\frac{1}{(1+x)^2}$ przy $|x|<1$. **11.58.** $\frac{1-2x}{(1+x)^2}$ przy $|x|<1$.

Wskazówka. (do zad. 11.57). W celu znalezienia sumy $S(x)$ znaleźć przedtem $\int\limits_0^x s(x)\,dx$.

11.59. $\operatorname{arctg} x$ przy $|x|<1$. **11.60.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ przy $|x|<1$.

Wskazówka (do zad. 11.59). Znaleźć przedtem $\frac{ds(x)}{dx}$, gdzie $s(x)$ oznacza sumę szeregu.

11.62. $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, $\frac{1}{(1-x)^3}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$, ...

11.63. $\ln\frac{3}{2}$. **11.64.** $\frac{1}{6}(\ln 4+\frac{1}{3}\pi\sqrt{3})$.

11.65. $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, $c_n=a_0a_n+a_1a_{n-1}+\ldots+a_na_0$

11.66. $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)^3=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

11.67. $1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{k!}+\ldots$, zbieżny dla każdego x.

11.68. $\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{3^3}+\ldots+\frac{x^n}{3^n}+\ldots$, zbieżny w przedziale $-3<x<3$.

11.69. $1-x^3+x^6-x^9+\ldots+(-1)^k x^{3k}+\ldots$, zbieżny w przedziale $-1<x<+1$.

11.70. $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots+(-1)^n(n+1)\,x^n+\ldots$, zbieżny dla $|x|<1$.

11.71. $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots+(n+1)(n+2)x^n+\ldots$, zbieżny dla $|x|<1$.

11.72. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$

Wskazówka. Pochodną rozwinąć na szereg geometryczny.

11.73. $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

11.74. $\ln(1-x+x^2)=\ln\frac{1+x^3}{1+x}=-\left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{2x^6}{6}+\ldots\right)=$

$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{2}\cdot\frac{x^n}{n}.$$

11.75. $\ln(2-3x+x^2)=\ln(1-x)(2-x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}(1-2^{-n})\frac{x^n}{n}$.

11.76. $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots$, zbieżny dla każdego x.

11.77. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\ldots$, zbieżny dla każdego x.

11.78. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. **11.79.** $x-x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$ **11.80.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$.

11.81. $\cos^2 x=1-x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots+(-1)^k\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+\ldots$, zbieżny dla każdego x.

11.82. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!2^2}x^2+\frac{1\cdot 3}{3!2^3}x^3-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!2^n}x^n-\ldots$,

dla $|x|<1$.

11.83. $\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n 2^{n+1})x^n$ dla $|x|<\frac{1}{3}$.

Wskazówka. Przedstawić funkcję $\frac{3}{(1-x)(1+2x)}$ jako sumę ułamków prostych.

11.84. $\operatorname{arctg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots$ dla $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Wskazówka. Pochodną funkcji arctg x, tj. wyrażenie $\frac{1}{1+x^2}$, potraktować jako sumę szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie 1 i ilorazie $-x^2$.

11.85. $1+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots+\frac{x^{4k}}{(4k)!}+\ldots$, zbieżny dla każdej wartości x.

11.86. $1+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+\ldots+\frac{x^{6k}}{(2k+1)!}+\ldots$, zbieżny dla każdej wartości x.

11.87. $a^x=1+\frac{x}{1!}\ln a+\frac{x^2}{2!}(\ln a)^2+\frac{x^3}{3!}(\ln a)^3+\ldots+\frac{x^n}{n!}(\ln a)^n+\ldots$, zbieżny dla każdego x.

11.88. $x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^k\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots$

11.89. $\operatorname{tg}^2 x=x^2+\frac{16}{4!}x^4+\frac{272}{6!}x^6+R_7$.

11.90. $\frac{1}{\cos^2 x}=1+x^2+\frac{16}{4!}x^4+\frac{272}{6!}x^6+R_7$.

11.91. $\frac{-5x^4-7x^2+1}{2x^3-3x+1}=1+3x+2x^2+4x^3+x^4-x^5-11x^6+R_7$,

przy czym $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-3}$.

11.92. $1-2x+2x^2-2x^4+2x^5-\ldots-2x^{3k+1}+2x^{3k+2}-\ldots$, zbieżny dla $|x|<1$.

11.93. $2\left(\frac{x^3}{3!}-\frac{2x^5}{5!}+\frac{3x^7}{7!}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{kx^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots\right)$, zbieżny dla każdej wartości x.

11.94. $\frac{1}{3}-\frac{x-3}{3^2}+\frac{(x-3)^2}{3^3}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}+\ldots$, zbieżny dla $|x-3|<3$.

11.95. $1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3}{2^2}\frac{(x-1)^2}{2!}-3\cdot\frac{1}{2^3}\frac{(x-1)^3}{3!}+3\cdot\frac{1\cdot 3}{2^4}\frac{(x-1)^4}{4!}-\ldots$

$$\ldots+(-1)^n\cdot 3\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-5)}{2^n}\frac{(x-1)^n}{n!}+\ldots,$$

zbieżny dla $|x-1|<1$.

11.96. $1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-\ldots+(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\frac{(x-2)^{2k}}{(2k)!}+\ldots$,

zbieżny dla każdej wartości x.

11.97. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-\frac{1}{2}\pi)^{n-1}}{(n-1)!\,2^{n-1}}\cos\frac{(2n-1)\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{(x-\frac{1}{2}\pi)}{1!\,2}-\frac{(x-\frac{1}{2}\pi)^2}{2!\,2^2}+\ldots\right)$.

11.98. $\cos^2 x = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x-\frac{1}{3}\pi}{1!} - \frac{2^2(x-\frac{1}{3}\pi)^3}{3!} + \frac{2^4(x-\frac{1}{3}\pi)^5}{5!} - \ldots\right) +$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2(x-\frac{1}{3}\pi)^2}{2!} - \frac{2^3(x-\frac{1}{3}\pi)^4}{4!} + \frac{2^5(x-\frac{1}{3}\pi)^6}{6!} - \ldots\right).$$

11.99. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!\,a^n}$.

11.100. $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{1-(x+1)} = -1 + \frac{x+1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}$.

11.101. $4+(x-3)-2(x-3)^2-\frac{1}{2}(x-3)^3+(x-3)^4+\frac{1}{4}(x-3)^5-$

$$-\tfrac{1}{2}(x-3)^6+\ldots+(-\tfrac{1}{2})^{k-2}(x-3)^{2k}+(-\tfrac{1}{2})^k(x-3)^{2k+1}+\ldots$$

Wzór rekurencyjny na współczynniki: $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-2}$; $R=\sqrt{2}$.

11.102. $\sqrt{e} = 1{,}649 \pm 0{,}01$.

11.103. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = 0{,}7788 \pm 0{,}0001$.

11.104. $\sqrt[5]{250} = 3{,}017 \pm 0{,}01$.

11.105. $\cos 0{,}3 = 0{,}955 \pm 0{,}001$.

11.106. $\sin 10° = 0{,}17365 \pm 0{,}00001$.

11.107. 2,0022, 2,0013, 2,000580.

11.108. 99.

11.110. $\pi = \frac{10}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{9^n\cdot 3}\right)$.

11.111. $\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^5}{5} = 0{,}523$.

W s k a z ó w k a. Aby pokazać, że wynik jest podany z żądaną dokładnością, należy oszacować resztę szeregu posługując się szeregiem geometrycznym.

11.112. $|R| < \frac{1}{11}$.

DO ROZDZIAŁU XII

12.15. 2.

12.16. 0.

12.17. $\ln\frac{a}{b}$.

12.18. $1/2a$.

12.19. $\frac{1}{4}\sqrt{6}$.

12.20. 2.

12.21. 4.

12.22. $\ln x$.

12.23. Jeżeli $\ln a = c$, to granica równa się 1; jeżeli $\ln a < c$, to granica równa się 0; jeżeli $\ln a > c$, to granica jest $+\infty$.

12.24. $\frac{1}{3}$. **12.25.** $\sqrt{2}$. **12.26.** 1. **12.27.** $\frac{1}{6}$.

12.28. 1. **12.29.** -3. **12.30.** 1. **12.31.** $\frac{1}{3}$.

12.32. $\frac{1}{2}$. **12.33.** $\dfrac{a^3}{b^3}$. **12.34.** $\dfrac{2\alpha\cos\alpha\, e^{\sin\alpha}}{\pi}$.

12.35. $2\alpha/\pi$. **12.36.** 0. **12.37.** -2. **12.38.** 1.

12.39. -1. **12.40.** $\frac{1}{2}$. **12.41.** 0. **12.42.** 0.

12.43. $\dfrac{2}{\pi}$. **12.44.** $-\dfrac{4}{\pi}$. **12.45.** $\frac{1}{3}$. **12.46.** $\frac{2}{3}$.

12.47. $-\frac{1}{2}$. **12.48.** 0. **12.49.** $-\frac{1}{3}$.

12.50. Jeżeli $\sin x\neq 0$, to $f(x)=\dfrac{\sin^3 x-x^3}{x^3\sin 2x}$. Rozwijamy funkcję $\sin^3 x$ w szereg Maclaurina, korzystając np. ze wzoru $\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$; wtedy

$$\sin^3 x-x^3=-\frac{60}{5!}x^5+\frac{546}{7!}x^7-\ldots=-\frac{1}{2}x^5\left(1-\frac{13}{60}x^2+\ldots\right),$$

$$x^3\sin^3 x=x^3\left(x^3-\frac{60}{5!}x^5+\ldots\right)=x^6\left(1-\frac{1}{2}x^2+\ldots\right).$$

A więc

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^5(1-\frac{13}{60}x^2+\ldots)}{x^6(1-\frac{1}{2}x^2+\ldots)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2x}.$$

Mamy dwie granice, lewostronną i prawostronną: $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +0}f(x)=-\infty$.

12.51. $\frac{1}{6}$. **12.52.** $-\frac{1}{3}$. **12.53.** -1. **12.54.** 1.

12.55. 1. **12.56.** 1. **12.57.** e^{-1}. **12.58.** $\sqrt{ab}$.

12.59. e^3. **12.60.** $\sqrt{e^m}$. **12.61.** e. **12.62.** 1.

12.63. $e^{1/3}$. **12.64.** $+\infty$. **12.65.** $\frac{1}{6}$. **12.66.** $-\frac{1}{60}$.

12.67. $\frac{1}{2}$. **12.68.** $\frac{4}{5}$. **12.69.** $-\frac{1}{4}$. **12.70.** 1.

12.71. e^3. **12.72.** 1. **12.73.** $e^{2/\pi}$. **12.74.** e^a.

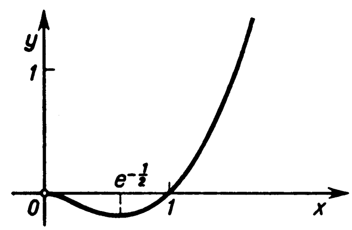
12.75. Wskazówka. Znaleźć $\lim\limits_{\alpha\to 0}s/\frac{2}{3}bh$, gdzie $s=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)$ jest polem wycinka kołowego o promieniu R.

12.78. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. **12.79.** 1. **12.80.** 1.

DO ROZDZIAŁU XIII

13.10. $x>0$; $y'=x(2\ln x+1)$, $y''=2\ln x+3$; miejsce zerowe funkcji $x=1$ (rys. R.13.1); tabelka:

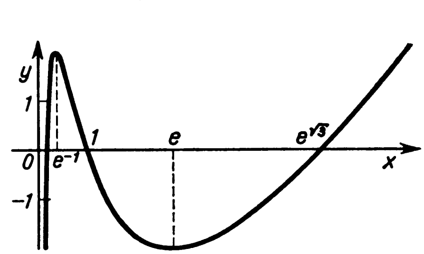
x	0	...	$e^{-\frac{3}{2}}$	...	$e^{-\frac{1}{2}}$	...	$+\infty$
y''	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y'	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-\frac{3}{2}e^{-3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$



Rys. R.13.1

13.11. $x>0$; $y'=\dfrac{3}{x}\left((\ln x)^2-1\right)$, $y'=0$, gdy $x=e^{-1}$ lub $x=e$; $y''=-\dfrac{3}{x^2}\left((\ln x)^2-\right.$ $\left.-2\ln x-1\right)$, $y''=0$, gdy $x=e^{\alpha}$ lub $x=e^{\beta}$, gdzie $\alpha=1-\sqrt{2}$, $\beta=1+\sqrt{2}$; miejsca zerowe funkcji: $x=1$, $x=e^{-\sqrt{3}}$ i $x=e^{\sqrt{3}}$; asymptota $x=0$ (rys. R.13.2); tabelka:

x	0	...	e^{-1}	...	e^{α}	...	e	...	e^{β}	...	$+\infty$
y''	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2 *M*	$\searrow$	$f(e^{\alpha})$ *p*	$\searrow$	-2 *m*	$\nearrow$	$f(e^{\beta})$ *p*	$\nearrow$	$+\infty$



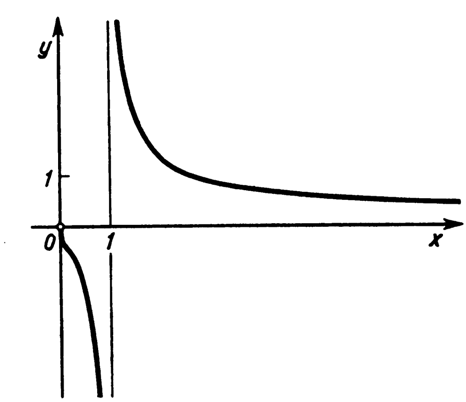
Rys. R.13.2

13.12. $x>0$, $x\neq 1$; $y'=-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$, $y''=\dfrac{\ln x+2}{x^2(\ln x)^3}$; asymptoty: $x=1$, $y=0$ (rys. R.13.3); tabelka:

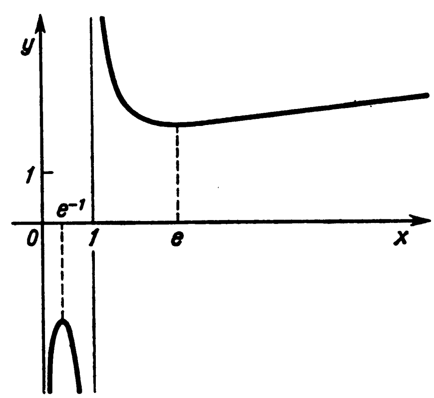
x	0	...	e^{-2}	...	1		...	$+\infty$
y''	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	0
y'	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0
y	0	↘	$-\frac{1}{2}$ p	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	0

13.13. $x>0$, $x\neq 1$; $y'=\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{\ln^2 x}\right)$; asymptoty: $x=0$, $x=1$ (rys. R.13.4); tabelka:

x	0	...	e^{-1}	...	1		...	e	...	$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0
y	$-\infty$	↗	-2 M	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	2 m	↗	$+\infty$



Rys. R.13.3



Rys. R.13.4

13.14. Funkcja jest określona dla $x>0$; przy $x=2e^{-\frac{1}{2}}$ mamy $y_{\min}=-e^{-1}$; punkt przegięcia $(2e^{-3/2}, -3e^{-3})$.

13.15. Funkcja jest określona dla $x>0$; przy $x=2$ mamy $y_{\min}=2(1-\ln 2)\approx 0{,}6$.

13.16. Funkcja jest określona dla $x>0$; przy $x=1$ mamy $y_{\min}=1$; punkt przegięcia $(e^{1/2}, \frac{3}{2}e^{-1/2})$. Przy $x\to 0$ mamy $y\to -\infty$, a przy $x\to+\infty$ mamy $y\to 0$; asymptoty: $x=0$, $y=0$; miejsce zerowe funkcji $x=e^{-1}\approx\frac{2}{5}$.

13.17. Funkcja jest określona dla $x<-1$ lub $x>1$; przy $x=\pm\sqrt{2}$ mamy $y_{\min}=1$; punkty przegięcia: $(1{,}89, 1{,}33)$, $(-1{,}89, 1{,}33)$; asymptoty: $x=1$, $x=-1$.

13.18. Funkcja jest określona dla $x>0$; asymptota $y=0$; $\lim\limits_{x\to+0} y=-\infty$.

13.19. Funkcja jest określona dla $x>0$; przy $x=e^2\approx 7{,}39$ mamy $y_{max}=0{,}74$; punkt przegięcia $(e^{8/3}, \frac{8}{3}e^{-4/3}\approx\frac{7}{10})$; asymptoty: $x=0$, $y=0$.

13.20. Funkcja jest określona dla $-\infty<x<-e^{-1}$ lub $x>0$; asymptoty: $x=-e^{-1}$, $x=0$, $y=1$, $\lim\limits_{x\to-e^{-1}-0} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} y=+\infty$.

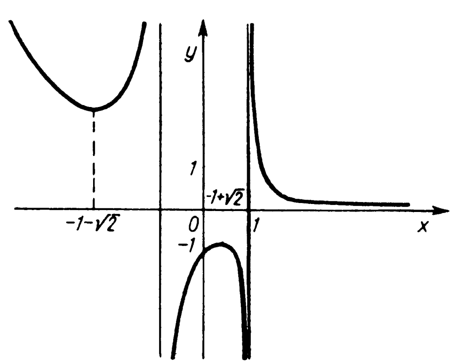
13.21. Funkcja jest określona dla wszystkich x; asymptoty: $y=0$ (przy $x\to+\infty$) i $y=-x$ (przy $x\to-\infty$).

13.22. Funkcja jest określona w przedziałach $\big(2k\pi, (2k+1)\pi\big)$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$; przy $x_k=\frac{1}{2}\pi+2k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ mamy $y_{max}=0$; asymptoty $x=k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

13.23. Funkcja jest określona w przedziałach $\big((2k-\frac{1}{2})\pi, (2k+\frac{1}{2})\pi\big)$ $(k=0, \pm1, \pm2,\ldots)$, okresowa o okresie 2π; punkty przegięcia $(2k\pi, 0)$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$, asymptoty $x=\pm\frac{1}{2}\pi+2k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

13.24. $x\neq-1$, $x\neq1$; $y'=\dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2-1)^2}e^{-x}$; asymptoty: $y=0$, $x=-1$, $x=1$ (rys. R.13.5); tabelka:

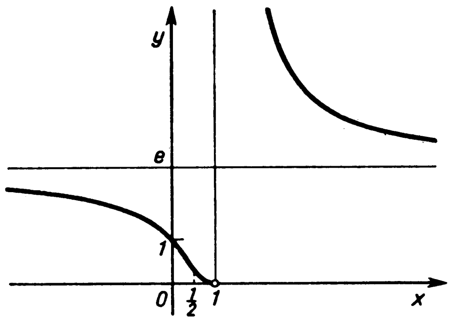
x	$-\infty$	...	$-1-\sqrt{2}$	...	-1		...	$-1+\sqrt{2}$	...	1		...	$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0
y	$+\infty$	↘	m	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	M	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	0



Rys. R.13.5

13.25. $x\neq1$; $y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{x}{x-1}}$, $y''=\dfrac{2x-1}{(x-1)^4}e^{\frac{x}{x-1}}$; asymptoty: $y=e$, $x=1$ (rys. R.13.6); tabelka:

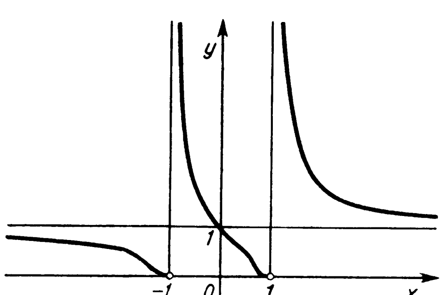
x	$-\infty$	...	$\frac{1}{2}$	...	1		...	$+\infty$
y''	0	$-$	0	$+$	0	$+\infty$	$+$	0
y'	0	$-$	$-$	$-$	0	$-\infty$	$-$	0
y	e	↘	e^{-1} p	↘	0	$+\infty$	↘	e



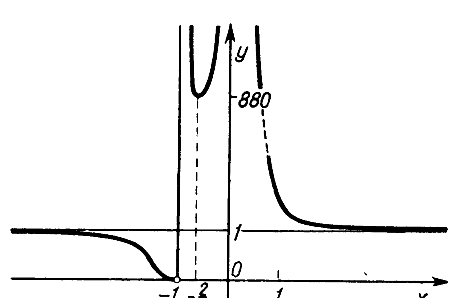
Rys. R.13.6

13.26. $x \neq -1$, $x \neq 1$; $y' = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{x}{x^2-1}}$; $y'' = \dfrac{2x^5+x^4+4x^3+2x^2-6x+1}{(x^2-1)^4} e^{\frac{x}{x^2-1}}$, $f''(0) > 0$, $f''(\frac{1}{2}) < 0$, a ponadto $\lim\limits_{x \to 1-0} f''(x) = +0$ (co można udowodnić sposobem podanym w zadaniu 13.6, więc w przedziale $(0, \frac{1}{2})$ i w przedziale $(\frac{1}{2}, 1)$ druga pochodna $f''(x)$ przechodzi przez wartość zerową, skąd wniosek, że w przedziałach tych krzywa $y = f(x)$ ma punkty przegięcia; asymptoty: $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$ (rys. R.13.7); tabelka:

x	$-\infty$	...	-1		...	1		...	$+\infty$
y'	0	$-$	0	$-\infty$	$-$	0	$-\infty$	$-$	0
y	1	↘	0	$+\infty$	↘	0	$+\infty$	↘	1



Rys. R.13.7



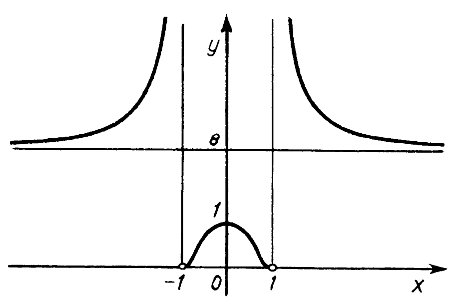
Rys. R.13.8

13.27. $x\neq -1$, $x\neq 0$; $y'=\dfrac{-3x^2-2x}{x^4(x+1)^2}\,e^{\frac{1}{x^2(x+1)}}$; asymptoty: $y=1$, $x=-1$, $x=0$ (rys. R.13.8); tabelka:

x	$-\infty$	...	-1		...	$-\frac{2}{3}$	...	0		...	$+\infty$
y'	0	$-$	0	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0
y	1	↘	0	$+\infty$	↘	$e^{\frac{27}{4}}$ m	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	1

13.28. $x\neq -1$, $x\neq 1$; $y=e^{1+\frac{1}{x^2-1}}$; $y'=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}\,e^{1+\frac{1}{x^2-1}}$, $y'=0$, gdy $x=0$, $y''=$ $=\dfrac{2(3x^4-1)}{(x^2-1)^4}\,e^{1+\frac{1}{x^2-1}}$, $y''=0$, gdy $x=-a$ lub $x=a$, gdzie $a=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$; asymptoty: $y=e$, $x=-1$, $x=1$; oś Oy jest osią symetrii krzywej (rys. R.13.9); tabelka:

x	$-\infty$	...	-1		...	$-a$	...	0	...	a	...	1		...	$+\infty$
y''	0	$+$	$+\infty$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+\infty$	$+$	0
y'	0	$+$	$+\infty$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-\infty$	$-$	0
y	e	↗	$+\infty$	0	↗	$f(-a)$ p	↗	1 M	↘	$f(a)$ p	↘	0	$+\infty$	↘	e



Rys. R.13.9

13.29. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=0$ mamy $y_{max}=1$; punkty przegięcia $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, e^{-1/2})$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, e^{-1/2})$; asymptota $y=0$.

13.30. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=4$ mamy $y_{max}=e^2$; punkty przegięcia $(4+\frac{1}{2}\sqrt{2}, e^{3/2})$, $(4-\frac{1}{2}\sqrt{2}, e^{3/2})$; asymptota $y=0$.

13.31. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=\sqrt{2}$ mamy $y_{max}=\sqrt{2}e^{-1/2}$, a przy $x=-\sqrt{2}$ mamy $y_{min}=-\sqrt{2}e^{-1/2}$; punkty przegięcia: $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{6}\,e^{-3/2})$; asymptota $y=0$; miejsce zerowe funkcji $x=0$.

13.32. Funkcja jest określona dla wszystkich $x \neq 0$; przy $x=\frac{1}{2}$ mamy $y_{\min}=\frac{1}{4}e^2$; asymptota $x=0$; $\lim\limits_{x\to+0} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} y=0$.

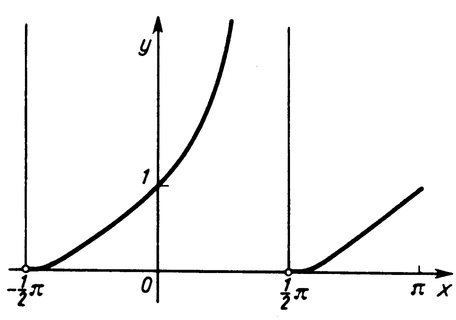
13.33. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=\frac{3}{4}$ mamy $y_{\max}=\frac{27}{64}e^{-3}$; punkty przegięcia mają odcięte: $x=0$, $x=\frac{1}{4}(3\pm\sqrt{3})$; asymptota $y=0$.

13.34. Funkcja jest określona dla wszystkich x; punkty przegięcia $(-3a,\ 10ae^{-3})$, $(-a,\ 2ae^{-1})$; asymptota $y=0$.

13.35. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=0$ mamy $y_{\min}=0$ (ostrze).

13.36. $x \neq (\frac{1}{2}+k)\pi$ $(k=\pm1, \pm2, \ldots)$, okres π; $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}e^{\operatorname{tg} x}$, $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}\pi+0} y' = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}\pi+0} (1+\operatorname{tg}^2 x)\, e^{\operatorname{tg} x}=0$ (por. zad. 12.65), a więc krzywa zbliża się do punktu $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ z prawej strony stycznie do osi Ox; $y''=\dfrac{1+\sin 2x}{\cos^4 x}e^{\operatorname{tg} x}$, w punkcie $x=-\frac{1}{4}\pi$ nie ma przegięcia, gdyż y'' nie zmienia znaku (rys. R.13.10); tabelka (w przedziale $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$):

x	...	$-\frac{1}{2}\pi$		...	$-\frac{1}{4}\pi$	...	$\frac{1}{2}\pi$		...
y''	+	$+\infty$	0	+	0	+	$+\infty$	0	+
y'	+	$+\infty$	0	+	+	+	$+\infty$	0	+
y	↗	$+\infty$	0	↗	↗	↗	$+\infty$	0	↗



Rys. R.13.10

13.37. Funkcja jest określona dla wszystkich x; punkt przegięcia $(\frac{1}{2},\ 1{,}59)$; asymptoty: $y=0{,}21$ (przy $x\to-\infty$) i $y=4{,}81$ (przy $x\to+\infty$).

13.38. Funkcja jest określona dla $0 \leqslant x \leqslant 1$; punkt przegięcia $(\frac{1}{10}(5-\sqrt{5})\approx 0{,}28,\ 1{,}74)$.

13.39. Funkcja jest określona dla $x>0$; asymptoty $y=1{,}57$, $y=-1{,}57$ (przy $x\to 0$).

DO ROZDZIAŁU XIV

14.5. $x=2{,}8$.

14.6. 1) pierwsze przybliżenie $x_1=0{,}4$; drugie przybliżenie $x_2=0{,}342\ldots$; 2) $x_1=0{,}333\ldots$, $x_2=\frac{52}{153}=0{,}340\ldots$

14.7. $x=-1{,}65$ (dokładniej: $-1{,}6506292$). **14.8.** $x=3{,}63$.

14.9. $x=1{,}612$ (dokładniej: $1{,}6117663$). **14.10.** $x_1=-10{,}26$, $x_2=9{,}88$.

14.11. $2{,}094$ (dokładniej: $2{,}09455148$). **14.12.** $x=0{,}038$ (dokładniej: $0{,}03856$).

14.13. $2{,}89$ (dokładniej: $2{,}8931$). **14.14.** $-2{,}874$, $-0{,}514$, $3{,}388$.

14.15. $-3{,}5042$. **14.16.** $-1{,}6920$, $-1{,}3569$, $3{,}0489$.

14.17. $1{,}0448$. **14.18.** $1{,}17$. **14.19.** $3{,}07$.

14.20. $0{,}95$. **14.21.** $0{,}44$. **14.22.** $1{,}85$.

14.23. $2{,}90$. **14.24.** $2{,}25$. **14.25.** $0{,}21$.

14.26. $1{,}38$. **14.27.** $\pm 1{,}73$ i 0 **14.28.** $2{,}45$ i $0{,}019$.

14.29. $0{,}31$ i 4. **14.30.** $2{,}506$. **14.31.** $4{,}493$.

14.32. $1{,}831177$. **14.33.** $1{,}493$. **14.34.** $0{,}62945$.

14.35. $x=-1{,}9742$, $y=2{,}0221$. **14.36.** $x=1{,}88371$, $y=\pm 2{,}71592$.

14.37. $x=0{,}68881$, $y=1{,}50754$. **14.38.** $x=1{,}4142$, $y=2{,}8284$.

DO ROZDZIAŁU XV

15.22. $I=\frac{5}{3}x^3-3x^2+3x-2\ln|x|-5x^{-1}$ (1). **15.23.** $I=\frac{1}{6}x^6-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-\ln|x|$.

15.24. $I=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+x$. **15.25.** $I=\frac{1}{12}(x^2+4)^6$.

15.26. $I=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **15.27.** $I=\dfrac{-1}{10(x^2+3)^5}$.

15.28. $x\neq -a$, $I=\frac{1}{3}\ln(a^3+x^3)$. **15.29.** $x>0$, $I=3x^{1/3}-\frac{4}{3}x^{-3/4}$

15.30. $x>0$, $I=\frac{6}{13}x^{13/6}-\frac{12}{23}x^{23/12}$.

15.31. $I=27x+\frac{216}{5}x^{5/4}+24x^{3/2}+\frac{32}{7}x^{7/4}$. **15.32.** $I=\frac{1}{7}x^{7/6}-\frac{1}{4}x^{4/3}+\frac{8}{17}\sqrt[12]{125x^{17}}$.

15.33. $I=\dfrac{-6}{\sqrt{x}}+30\sqrt[6]{x}$. **15.34.** $x\geqslant -\frac{1}{3}$, $I=\frac{2}{9}(3x+1)^{3/2}$.

---

(1) W rozwiązaniach całek nieoznaczonych pomijamy stałą C.

15.35. $I=\frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}$; podstawić $a+bx=t^2$.

15.36. $x\neq\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $x\neq-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $I=\frac{3}{8}(2x^2-1)^{2/3}$.

15.37. $I=\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$.

15.38. $I=-\frac{1}{5}\sqrt{3-5x^2}$.

15.39. $I=\frac{3}{5}(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

15.40. $I=\sqrt{x^2-6}$.

15.41. $I=\frac{5}{12}\sqrt[5]{(x^3+1)^4}$.

15.42. $I=-e^{1/x}$.

15.43. $I=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$.

15.44. $I=\frac{1}{6}\operatorname{tg}3x$.

15.45. $I=-\frac{1}{4}\cos(2x^2+1)$.

15.46. $I=\frac{1}{6}\sin^6 x$.

15.47. $I=2\sqrt{1+\sin x}$.

15.48. $a+b\cos x\neq 0$, $I=-\frac{1}{b}\ln|a+b\cos x|$; podstawić $a+b\cos x=t$.

15.49. $I=e^{\sin x}$.

15.50. $\cos x^4\neq 0$, $I=\frac{1}{4}\operatorname{tg}x^4$.

15.51. $\cos x\neq 0$, $I=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$.

15.52. $\cos(x^3+1)\neq 0$, $I=\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x^3+1)$.

15.53. $x>0$, $I=\frac{1}{3}\ln^3 x$.

15.54. $I=\operatorname{arctg}e^x$; podstawić $e^x=t$.

15.55. $I=\frac{1}{2}\ln(2e^x+1)$.

15.56. $I=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2$.

15.57. $I=\frac{2}{3}\sqrt{(2+\ln|x|)^3}$.

15.58. $I=\frac{-6^{1-x}}{\ln 6}$.

15.59. $I=\arcsin(\ln|x|)$.

15.60. $I=\operatorname{arctg}x(\ln|\operatorname{arctg}x|-1)$.

15.61. $I=\frac{1}{2}x^2e^{x^2}$.

15.62. $-1<x<1$, $I=\frac{1}{3}\arcsin x^3$

15.63. $x\neq 0$, $\ln|\operatorname{arctg}x|$.

15.64. $-1<x<1$, $I=\pi\arcsin x-\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$.

15.65. $I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2$.

15.66. $I=\frac{1}{5}x^5(1+x)^3-\frac{1}{10}x^6(1+x)^2+\frac{1}{5}(\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{8}x^8)$.

15.67. $I=(x^2-2x+2)e^x$.

15.68. $I=(x^3-3x^2+6x-6)e^x$.

15.69. $I=e^{2x}(\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4})$.

15.70. $x\sin x+\cos x$.

15.71. $(x^2-2)\sin x+2x\cos x$.

15.72. $I=-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{2}{25}x\sin 5x+\frac{2}{125}\cos 5x$.

15.73. $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$.

15.74. $I=-\frac{1}{13}e^{-2x}(2\sin 3x+3\cos 3x)$.

15.75. $I=\frac{9}{13}e^{-x}(-\cos\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\sin\frac{2}{3}x)$.

15.76. $I=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(\ln x-\frac{2}{3})$.

15.77. $I=x((\ln|x|)^3-3(\ln|x|)^2+6\ln|x|-6)$.

15.78. $I=-\frac{1}{32x^4}(8(\ln|x|)^2+4\ln|x|+1)$.

15.79. $I=\frac{2}{27}x^{\frac{3}{2}}(9(\ln|x|)^3-18(\ln|x|)^2+24\ln|x|-16)$.

15.80. $I=-\dfrac{1}{3x^3}(\ln|x|+\frac{1}{3})$.

15.81. $I=2\sqrt{x}(\ln x)^2-8\sqrt{x}\ln x+16\sqrt{x}$.

15.82. $x>0$, $I=\frac{1}{4}x^4((\ln x)^2-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8})$.

15.83. $x>0$; $I=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\dfrac{1}{n+1}\right)$.

DO ROZDZIAŁU XVI

16.26. $I=\frac{1}{8}(2x+1)^4$ (1).

16.27. $x\neq\frac{2}{3}$; $I=\dfrac{-1}{9(3x-2)^3}$.

16.28. $x\neq 3$, $x\neq -2$; $I=\ln|x-3|+2\ln|x+2|$.

16.29. $I=\ln|x^2-3x+3|$.

16.30. $I=3\ln|x-5|-2\ln|x+1|$.

16.31. $I=5\ln|x+\frac{1}{2}|-4\ln|x+1|$.

16.32. $I=2\ln|x-3|+4\ln|x-\frac{1}{2}|$.

16.33. $x\neq 1$, $x\neq\frac{3}{2}$; $I=\ln|2x^2-5x+3|$.

16.34. $x\neq 2$, $x\neq -5$; $I=3\ln|x-2|+2\ln|x+5|$.

16.35. $I=\frac{7}{3}\ln|x+6|-\frac{3}{2}\ln|x-3|$.

16.36. $I=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}\right|$.

16.37. $x\neq\frac{2}{3}$, $x\neq\frac{3}{2}$, $I=\ln\left|\dfrac{2x-3}{3x-2}\right|$.

16.38. $I=\frac{1}{2}\ln|10x+x^2|$.

16.39. $I=\frac{7}{10}\ln|4+5x^2|$.

16.40. $I=\frac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{5-x}\right|$.

16.41. $I=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{2x+\sqrt{5}-1}{2x-\sqrt{5}-1}\right|$.

16.42. $I=\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x}{2-3x}\right|$.

16.43. $I=\frac{8}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|$.

16.44. $x\neq 3$; $I=2\ln|x-3|-\dfrac{5}{x-3}$.

16.45. $x\neq\frac{1}{2}$; $I=\frac{1}{4}\left(\ln|2x-1|+\dfrac{1}{2x-1}\right)$.

16.46. $I=2\ln|x-5|+\dfrac{3}{x-5}$.

16.47. $I=3\ln|x+2|+\dfrac{5}{x+2}$.

16.48. $I=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{3}$.

16.49. $I=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x+1}{\sqrt{2}}$.

---

(1) W rozwiązaniach pomijamy stałą C.

16.50. $I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}$. **16.51.** $I=\operatorname{arctg}(3x-1)$.

16.52. $I=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

16.53. $I=\ln|2x^2-2x+1|+\operatorname{arctg}(2x-1)$.

16.54. $I=\ln|x^2-2x+5|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}$.

16.55. $I=\ln|x^2+2x+10|-4\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}$.

16.56. $I=\ln|x^2-8x+25|-4\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}$.

16.57. $I=\frac{3}{2}\ln|x^2+4x+8|-\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}$.

16.58. $I=\frac{1}{2}\ln|x^2-3|+\sqrt{3}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|$.

16.59. $I=\frac{1}{2}\ln|x^2+3|+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$.

16.60. $I=3\ln|x^2+4x+13|-4\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}$.

16.61. $I=5\ln|x^2-4x+20|-6\operatorname{arctg}\frac{x-2}{4}$.

16.62. $I=2\ln|x^2-6x+10|+7\operatorname{arctg}(x-3)$.

16.63. $I=\frac{5}{3}x-\frac{10}{9}\ln|2+3x|$. **16.64.** $I=\frac{1}{5}x-\frac{1}{25}\sqrt{60}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{12}}x$.

16.65. $I=2x-\frac{5}{2}\ln|x^2+6x+25|-\frac{15}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}$.

16.66. $I=-3\ln|x+2|+2\ln|x-4|+8\ln|x-7|$.

16.67. $I=-\frac{29-30x+6x^2}{3(x-2)^3}+\ln|x-2|$.

16.68. $I=\frac{4}{7}\ln|x-2|+\frac{17}{14}\ln|x^2+3|+\frac{1}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$.

16.69. $I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x-2}{2(x^2+1)}$.

16.70. $x\neq 2$, $x\neq -1$; $I=\frac{1}{2}x^2+x+3\ln|x+1|+2\ln|x-2|$.

16.71. $x\neq 4$; $I=x^2-3x-\dfrac{14}{x-4}+2\ln|x-4|$. **16.72.** $I=\frac{1}{3}x^3-x+\operatorname{arctg}x$.

16.73. $I=\frac{9}{5}x^5-2x^3+4x-\frac{4}{3}\sqrt{6}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x$.

16.74. $I=\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x+\ln|x-2|+2\ln|x-1|$.

16.75. $I=\frac{5}{2}\ln|x+3|+\frac{47}{2}\ln|x-1|-25\ln|x-\frac{1}{2}|$.

16.76. $I=\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{4}{3}\ln|x+1|+\frac{10}{3}\ln|x-2|-\frac{11}{3}\ln|x+2|$.

16.77. $I=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+3)$.

16.78. $I=2\ln(x^2-4x+29)+3\ln(x^2-2x+5)+6\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{5}+8\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}$.

16.79. $x\neq 1$, $x\neq -1$; $I=\ln|x^2+4|+\frac{5}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x$.

16.80. $I=\ln|x|+2\ln|x+1|+3\ln|x+2|+4\ln|x+3|$.

16.81. $x\neq 0$; $I=4\ln|x|+\ln|x^2+1|-\dfrac{1}{x}-\operatorname{arctg}x$.

16.82. $I=\dfrac{-1}{2a^2}\ln|x^2-a^2|-\dfrac{1}{a^2}\ln|x|$.

16.83. $x\neq 0$; $I=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

16.84. $I=\frac{1}{4}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

16.85. $x\neq 2$, $x\neq -2$, $I=2\ln|x^2-4|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x$.

16.86. $I=3\ln|x-1|+6\ln|x^2+4x+29|+\frac{42}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{5}$.

16.87. $x\neq 0$, $x\neq -1$; $I=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\ln|x|+3\ln|x+1|$.

16.88. $I=-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}+2\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{7}{4}\ln|x-1|-\dfrac{1}{2(x-1)}$.

16.89. $I=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$. **16.90.** $I=\dfrac{1}{2(x-2)^2}+\dfrac{5}{x-2}+3\ln|x-2|$.

16.91. $I=\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{x+2}{(x^2+4x+8)^2}+\dfrac{3}{128}\cdot\dfrac{x+2}{x^2+4x+8}+\dfrac{3}{256}\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{2}$.

16.92. $I=-\dfrac{5}{2(x-1)}-\ln|x-1|+\dfrac{3}{2(x+1)}+2\ln|x+1|$.

16.93. $I=\dfrac{1}{64}\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2+4x+8}{x^2-4x+8}+\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{2}\right)$.

16.94. $I=-\dfrac{1}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{4}{x-1}+5\ln|x-1|$.

16.95. $I=\dfrac{1}{40}\left(\ln\dfrac{x^2+2x+5}{x^2-2x+5}+\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}\right)$.

16.96. $I=\dfrac{-1}{(x-1)^3}-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{5}{x-1}+7\ln|x-1|+2\ln|x+3|$.

16.97. $I=\dfrac{-1}{2(x^2+4)}+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x$.

16.98. $I=\dfrac{-1}{2(x-1)^2}-\dfrac{5}{2(x-1)}-\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{4}\ln|x^2+1|-\operatorname{arctg}x$.

DO ROZDZIAŁU XVII

17.6. $x\geqslant-\frac{1}{2}$, $I=\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}$ (¹).

17.7. $x>-\frac{3}{4}$; $I=\frac{1}{2}\sqrt{3+4x}$.

17.8. $x\neq\frac{4}{3}$; $I=\frac{1}{2}(3x-4)^{2/3}$.

17.9. $x\neq-\frac{1}{2}$; $I=\frac{5}{4}(2x+1)^{2/5}$.

17.10. $I=\frac{3}{7}(x^2-x-12)\sqrt[3]{x-4}$.

17.11. $I=\frac{1}{28}(12x^2-x-1)\sqrt[3]{3x-1}$.

17.12. $I=\frac{2}{9}\sqrt{(2+3x)^3}\left(\frac{1}{5}(2+3x)-\frac{2}{3}\right)$.

17.13. $I=\frac{2}{25}\sqrt{(1-5x)^3}\left(\frac{1}{5}(1-5x)-\frac{1}{3}\right)$.

17.14. $I=\frac{3}{7}(x^2-x-12)\sqrt[3]{x-4}$.

17.15. $x>-\frac{3}{2}$; $I=\frac{2}{7}(x-2)(2x+3)^{3/4}$.

17.16. $x\neq-2$; $I=\frac{1}{40}(5x^2-12x+36)(x+2)^{2/3}$.

17.17. $x>-\frac{1}{3}$; $I=\frac{2}{405}(27x^2-12x+143)\sqrt{3x+1}$.

17.18. $x\geqslant-\frac{3}{2}$; $I=\frac{2}{45}(10x^2+3x-18)\sqrt[4]{2x+3}$.

17.19. $I=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}\right|$.

17.20. $I=\dfrac{2}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-a}{a}}$.

17.21. $I=2\sqrt{x}+\ln\left|\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|$.

17.22. $I=2\sqrt{1+x}+\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|$.

(¹) W rozwiązaniach pomijamy stałą C.

17.23. $I=-(x+4\sqrt{x}+\ln|1-\sqrt{x}|)$.

17.24. $I=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right|$.

17.25. $I=4\sqrt{1+\sqrt{x}}\left(\dfrac{(1+\sqrt{x})^2}{5}-\dfrac{1+\sqrt{x}}{3}\right)$.

17.26. $x>0$; $I=6(\frac{1}{2}t^2-t+\ln|t+1|)$, gdzie $t=\sqrt[6]{x}$.

17.27. $x>0$; $I=\frac{3}{2}(t^2-t+\frac{1}{2}\ln|2t+1|)$, gdzie $t=\sqrt[6]{x}$.

17.28. $x\geqslant 7$; $I=\frac{1}{3}((x-5)^{\frac{3}{2}}-(x-7)^{\frac{3}{2}})$; usunąć niewymierność z mianownika.

17.29. $x>-9$, $x\neq 0$; $I=\frac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right|$.

17.30. $I=\frac{3}{8}(\frac{1}{10}(7-2x)^3-2(7-2x)^2+\frac{49}{4}(7-2x))\sqrt[3]{7-2x}$.

17.31. $I=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln|1+\sqrt[6]{x+1}|$.

17.32. $x<1$ lub $x>2$; $I=2\sqrt{(x-2)/(x-1)}$.

17.33. $-1<x<0$ lub $0<x<1$; $I=\ln|1-\sqrt{1-x^2}|-\ln|x|-\arcsin x$.

17.34. $I=-\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}-\frac{6}{5}(x+1)^{5/6}-(x+1)-\frac{6}{7}(x+1)^{7/6}-\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}-\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$.

17.35. $I=\frac{3}{4}x^{4/3}-\frac{6}{7}x^{7/6}+x-\frac{6}{5}x^{5/6}+3x^{2/3}-2x^{1/2}+6x^{1/3}-6x^{1/6}+$
$+3\ln|x^{1/6}-1|+9\ln|x^{1/6}+1|$.

17.51. $I=2\sqrt{4x^2+3x+1}$.

17.52. $x<\frac{7}{6}$ lub $x>\frac{11}{6}$; $I=\frac{5}{18}\sqrt{36x^2-108x+77}$.

17.53. $0<x<2$; $I=\arcsin(x-1)$.

17.54. $-7<x<1$; $I=\arcsin\frac{1}{4}(x+3)$.

17.55. $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$; $I=\frac{1}{3}\arcsin 3x$.

17.56. $0<x<2r$; $I=\arcsin(x/r-1)$.

17.57. $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$; $I=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\frac{3}{2}\arcsin 2x$.

17.58. $-1<x<\frac{1}{3}$; $I=-\frac{1}{3}\sqrt{1-2x-3x^2}-\frac{1}{9}\sqrt{3}\arcsin\frac{1}{2}(3x+1)$.

17.59. $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; $I=\frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{4}\arcsin 2x$.

17.60. $I=-6\sqrt{6+x-x^2}+8\arcsin\frac{1}{5}(2x-1)$.

17.61. $I=-\sqrt{5+4x-x^2}-3\arcsin\frac{1}{3}(x-2)$.

17.62. $I=-\sqrt{8+2x-x^2}+2\arcsin\frac{1}{3}(x-1)$.

17.63. $I=\frac{1}{2}(x-3)\sqrt{6x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{1}{3}(x-3)$.

17.64. $I=2\sqrt{3-2x-x^2}-5\arcsin\frac{1}{2}(x+1)$.

17.65. $x<-2$ lub $x>-1$; $I=\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+2}\right|$.

17.66. $x<-1$ lub $x>\frac{1}{4}$; $I=\frac{1}{2}\ln\left|2x+\frac{3}{4}+\sqrt{4x^2+3x-1}\right|$.

17.67. $I=\frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+m}\right|$.

17.68. $x<a$ lub $x>3a$; $I=\ln\left|x-2a+\sqrt{(x-a)(x-3a)}\right|$.

17.69. $x<-2$ lub $x>0$; $I=\sqrt{x^2+2x}+2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|$.

17.70. $I=3\sqrt{x^2-5x+19}+\frac{19}{2}\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+19}\right|$.

17.71. $x<0$ lub $x>a$; $I=\sqrt{x^2-ax}+\frac{3}{2}a\ln\left|x-\frac{1}{2}a+\sqrt{x^2-ax}\right|$.

17.72. $I=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2-4x+5}-\frac{1}{4}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}\right|$.

17.73. $I=3\sqrt{x^2-4x+5}+8\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|$.

17.74. $I=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+5x-8}-\frac{47}{16}\ln\left|2x+\frac{5}{4}+\sqrt{4x^2+5x-8}\right|$.

17.75. $I=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x-1}-4\sqrt{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-\frac{1}{2}}\right|$.

17.76. $I=\frac{1}{2}(1+x)\sqrt{2x+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left|1+x+\sqrt{2x+x^2}\right|$.

17.77. $I=\frac{5}{3}\sqrt{3x^2-2x+1}-\frac{7}{9}\sqrt{3}\ln\left|x-\frac{1}{3}+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}\right|$.

17.78. $-3\leqslant x\leqslant 1$: $I=\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{1}{2}(x+1)$.

17.79. $x\leqslant -2$ lub $x\leqslant 2$; $I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|$.

17.80. $I=\frac{1}{6}(3x+5)\sqrt{3x^2+10x+9}+\frac{1}{9}\sqrt{3}\ln\left(3x+5+\sqrt{3(3x^2+10x+9)}\right)$.

17.81. $x\leqslant 1$ lub $x\geqslant 2$: $I=\frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})\sqrt{x^2-3x+2}-\frac{1}{8}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|$.

17.82. $-1<x<1$, $I=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$.

17.83. $I=\frac{1}{2}(x-3)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|$.

17.84. $0<x<1$; podstawiając $\sqrt{x}=t$ otrzymujemy $\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+C_1$, podstawiając $\sqrt{1-x}=t$ otrzymujemy $-\arcsin\sqrt{1-x}-\sqrt{x-x^2}+C_2$; podstawiając $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=t$ otrzymujemy $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}-\sqrt{x-x^2}+C_3$; przekształcając funkcję podcałkową $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=$ $=\dfrac{x}{\sqrt{x-x^2}}$ otrzymujemy $\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)-\sqrt{x-x^2}+C_4$. Sprawdzić, że $C_2=C_1+\frac{1}{2}\pi$ $C_3=C_1$, $C_4=C_1+\frac{1}{4}\pi$.

17.85. $I=\left(x-\dfrac{3}{a}\right)\sqrt{ax^2+2x+1}+\dfrac{3}{a\sqrt{a}}\ln\left(ax+1+\sqrt{a(ax^2+2x+1)}\right)$.

17.86. $I=(x+3)\sqrt{x^2+1}$. **17.87.** $I=(x-a)\sqrt{x^2+a^2}$.

17.88. $I=\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|$.

17.89. $x<-\sqrt{2}-1$ lub $x>\sqrt{2}-1$;

$$I=\tfrac{1}{6}(2x^2+x+7)\sqrt{x^2+2x-1}=2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right|.$$

17.90. $x<1$ lub $x>3$, $I=\frac{1}{3}(x^2+5x+24)\sqrt{x^2-4x+3}+11\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+3}\right|$.

17.91. $I=\frac{1}{8}(8x^2-10x-1)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{53}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|$.

17.92. $0<x<4$, $I=\frac{1}{12}(3x^3-2x^2-10x-60)\sqrt{4x-x^2}+10\arcsin\frac{1}{2}(x-2)$.

17.93. $-2<x<3$, $I=\frac{1}{24}(8x^2-2x-51)\sqrt{6+x-x^2}-\frac{25}{16}\arcsin\frac{1}{5}(1-2x)$.

17.94. $I=\frac{1}{100}(5x^3-6x)\sqrt{5x^2+4}+\frac{6}{125}\sqrt{5}\ln\left|x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+4}\right|$.

17.95. $I=(\frac{1}{3}x^2+\frac{25}{12}x-\frac{163}{24})\sqrt{x^2+x+1}+\frac{85}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|$.

17.96 $I=(\frac{5}{6}x+\frac{17}{12})\sqrt{3x^2-5x+8}+\frac{55}{24}\sqrt{3}\ln\left|3x-\frac{5}{2}+\sqrt{3}\sqrt{3x^2-5x+8}\right|$.

17.97. $I=-(\frac{1}{3}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{227}{6})\sqrt{5+6x-x^2}-139\arcsin\dfrac{3-x}{\sqrt{14}}$.

17.98. $I=(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{12}x-\frac{67}{24})\sqrt{8+x-x^2}-\frac{33}{16}\arcsin\dfrac{1-2x}{\sqrt{33}}$.

17.99. $I=(\frac{2}{3}x^2-3x+\frac{1}{6})\sqrt{2+3x-x^2}+\frac{17}{4}\arcsin\dfrac{3-2x}{\sqrt{17}}$.

17.100. $I=\frac{1}{6}(x^2-3)\sqrt{2x^2+3}$. **17.101.** $I=\frac{1}{10}(x^4-2x^2+6)\sqrt{2x^2+3}$.

17.102. $I=(\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{12}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{5}{2})\sqrt{3+2x+x^2}+\frac{7}{2}\ln\left|1+x+\sqrt{3+2x+x^2}\right|$.

17.103. $I=-\dfrac{\sqrt{10x-x^2}}{5x}$.

17.104. $x<-1$, $I=-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; $x>1$, $I=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

17.105. $-2<x<2$, $I=-\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$.

17.106. $x<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $I=\arcsin\dfrac{2-x}{x\sqrt{5}}$; $x>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $I=\arcsin\dfrac{x-2}{x\sqrt{5}}$.

17.107. $x<-\sqrt{2}+1$, $I=\arcsin\dfrac{x+1}{x\sqrt{2}}$; $x>\sqrt{2}+1$, $I=-\arcsin\dfrac{x+1}{x\sqrt{2}}$.

17.108. $x<-1$, $I=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{2-x}{2x-1}$; $x>1$, $I=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{2-x}{2x-1}$.

17.109. $-\frac{1}{3}<x<1$, $I=\frac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x}{x+1}$.

17.110. $1<x<\frac{3}{2}$, $I=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{x}{3-2x}$, $\frac{3}{2}<x<3$, $I=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{x}{2x-3}$.

17.111. $x\neq 0$; $I=\ln\dfrac{|x|}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}$.

17.112. $x<-1$, $I=\arcsin\dfrac{1}{x}$; $x>1$, $I=-\arcsin\dfrac{1}{x}$.

17.113. $-a<x<a$, $I=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$.

17.114. $x<3-2\sqrt{2}$ lub $x>3+2\sqrt{2}$; $I=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\dfrac{x+5}{2\sqrt{2}(x-2)}$.

17.115. $-2<x<0$ lub $0<x<2$; $I=-\dfrac{1}{4x}\sqrt{4-x^2}$.

17.116. $0<x<1$ lub $1<x<10$; $I=-\dfrac{1}{9(x-1)}\sqrt{10x-x^2}+\frac{4}{27}\ln\dfrac{4x+5+3\sqrt{10x-x^2}}{|x-1|}$.

17.117. $x\neq 0$; $I=-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2}-\frac{1}{2}\ln\dfrac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}$.

17.118. $x\neq 0$; $I=\dfrac{3x-1}{2x^2}\sqrt{2x^2+2x+1}-\frac{1}{2}\ln\dfrac{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}{|x|}$.

17.119. $-\sqrt{\frac{3}{2}}<x<1$ lub $1<x<\sqrt{\frac{3}{2}}$; $I=\dfrac{5-6x}{2(x-1)^2}\sqrt{3-2x^2}+7\ln\dfrac{3-2x-\sqrt{3-2x^2}}{|x-1|}$.

17.120. $I=-\dfrac{1}{x}\sqrt{1-4x+x^2}+2\ln\left|\dfrac{1-2x-\sqrt{1-4x+x^2}}{x}\right|$.

17.121. $I=-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2}-\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\right|$.

17.122. $I=-\left(\frac{1}{9x^3}+\frac{5}{54x^2}+\frac{1}{54x}\right)\sqrt{3-2x+x^2}+\frac{2}{27\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3-x-\sqrt{3}\sqrt{3-2x+x^2}}{x}\right|.$

17.123. $I=\left(\frac{1}{9(x-2)^2}+\frac{2}{27(x-2)}\right)\sqrt{1-4x+x^2}.$

DO ROZDZIAŁU XVIII

18.30. $I=\frac{1}{24}\sin 12x+\frac{1}{4}\sin 2x$ ([1]).

18.31. $I=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x.$

18.32. $I=\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x.$

18.33. $I=-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x.$

18.34. $I=-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{4}\sin 2x.$

18.35. $I=\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x.$

18.36. $I=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x.$

18.37. $I=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x.$

18.38. $I=\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x.$

18.39. $I=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x.$

18.40. $I=-\frac{1}{4}\cos x\sin x(\sin^2 x+\frac{3}{2})+\frac{3}{8}x.$

18.41. $I=\frac{1}{4}\cos x\sin x(\cos^2 x+\frac{3}{2})+\frac{3}{8}x.$

18.42. $I=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\sin x.$

18.43. $I=-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x.$

18.44. $\cos x\neq 0$; $I=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln\cos x.$

18.45. $\sin x\neq 0$; $I=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x.$

18.46. $\sin x\neq 0$; $I=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg} x-x.$

18.47. $I=\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x.$

18.48. $I=\frac{1}{13}\cos^{13} x-\frac{3}{11}\cos^{11} x+\frac{1}{3}\cos^9 x-\frac{1}{7}\cos^7 x.$

18.49. $I=\left(\sin^6 x-\frac{\sin^4 x}{5}-\frac{4\sin^2 x}{15}-\frac{8}{15}\right)\frac{\cos x}{7}.$

18.50. $I=\left(\frac{\sin^3 x}{4}-\frac{\sin x}{8}\right)\cos x+\frac{x}{8}.$

18.51. $I=\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{6}.$

18.52. $I=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}.$

18.53. $\sin x\neq 0$, $I=\frac{-1}{7\sin^7 x}.$

18.54. $\cos x\neq 0$, $I=\ln|\operatorname{tg}(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x)|-\sin x.$

18.55. $I=3\sqrt[3]{\sin x}.$

18.56. $I=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+2\cos x)^2}.$

18.57. $I=-2\sqrt{1+\cos^2 x}.$

18.58. $I=\ln|1+\sin^2 x|.$

18.59. $I=\arcsin(\sin^2 x).$

([1]) W rozwiązaniach pomijamy stałą C.

18.60. $I=-\dfrac{1+\sin^2 x}{\sin x}$. **18.61.** $I=\sin x-\cos x$.

18.62. $\sin x\neq 0$; $I=-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right|$.

18.63. $\cos x\neq 0$; $I=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)\right|$.

18.64. $\sin x\neq 0$; $I=\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x}-\frac{2}{3}\operatorname{ctg} x$.

18.65. $\cos x\neq 0$; $I=\dfrac{\sin x}{4\cos^4 x}+\dfrac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)\right|$.

18.66. $I=-\left(\dfrac{1}{6\sin^6 x}+\dfrac{5}{24\sin^4 x}+\dfrac{5}{16\sin^2 x}\right)\cos x+\frac{5}{16}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right|$.

18.67. $\sin x\neq 0$ i $\cos x\neq 0$; $I=-\dfrac{1}{2\sin^2 x}+\ln\left|\operatorname{tg} x\right|$.

18.68. $\sin x\neq 0$ i $\cos x\neq 0$; $I=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\left|\operatorname{tg} x\right|$.

18.69. $\sin x\neq 0$ i $\cos x\neq 0$; $I=\dfrac{1}{2\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{4\sin^4 x}+3\ln\left|\operatorname{tg} x\right|$.

18.70. $I=\dfrac{1}{3\sin x\cos^3 x}-\frac{8}{3}\operatorname{ctg} 2x$.

18.71. $I=\sin x+\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x)\right|$.

18.72. $\cos x\neq 0$; $I=-\frac{1}{3}\sin^3 x-\sin x+\ln\left|\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)\right|$.

18.73. $\sin x\neq 0$; $I=\frac{1}{2}\sin^2 x-2\ln\left|\sin x\right|-\dfrac{1}{2\sin^2 x}$.

18.74. $\cos x\neq 0$; $I=\dfrac{1}{7\cos^7 x}-\dfrac{1}{5\cos^5 x}$.

18.75. $\cos x\neq 0$; $I=\dfrac{-\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)\right|$.

18.76. $I=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x)$. **18.77.** $I=\operatorname{ctg}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)$.

18.78. $\sin(\frac{1}{4}\pi+x)\neq 0$; $I=\frac{1}{2}\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{2}x)\right|$.

W s k a z ó w k a. Wykonać przekształcenie:

$$\sin x+\cos x=\sin x+\sin(\tfrac{1}{2}\pi+x)=2\sin(\tfrac{1}{4}\pi+x)\cos(-\tfrac{1}{4}\pi)=\sqrt{2}\sin(\tfrac{1}{4}\pi+x).$$

18.79. $\cos x\neq 0$, $I=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}^2 x)$, lub $\sin x\neq 0$, $I=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}^2 x)$.

Wskazówka. Zakładając, że $\cos x\neq 0$, dzielimy licznik i mianownik funkcji podcałkowej przez $\cos^4 x$, a następnie podstawiamy $\operatorname{tg}^2 x=t$; drugą postać otrzymamy dzieląc licznik i mianownik przez $\sin^4 x$ i podstawiając $\operatorname{ctg}^2 x=t$. Związek między tymi całkami wynika ze wzoru

$$\operatorname{arctg} a+\operatorname{arctg} b=\operatorname{arctg}\frac{a+b}{1-ab},$$

a w szczególności ze wzoru $\operatorname{arctg} a+\operatorname{arctg}\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\pi$ albo $\operatorname{arctg} a+\operatorname{arctg}\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}\pi$.

18.80. $\cos x\neq 0$; $I=2\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$.

18.81. $I=-\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$.

18.82. $I=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}$.

Wskazówka (do zad. 18.82). Funkcję podcałkową wyrazić przez funkcję kąta podwójnego.

18.83. $I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}^2 x+1)$.

18.84. $I=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)-\dfrac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x+2)}$.

18.85. $I=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)-\sqrt{2-\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)\right)$.

18.86. $I=\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{tg} 2x)$.

18.87. $\cos x\neq 0$; $I=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+\frac{1}{4}\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$.

18.91. $I=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2$.

18.92. $-1<x<1$; $I=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|$.

18.93. $I=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$.

18.94. $I=\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg} 3x}$.

18.95. $I=\dfrac{1}{2\operatorname{arcctg} 2x}$.

18.96. $I=\dfrac{(\operatorname{arctg} x)^3}{3}$.

18.97. $I=\dfrac{1}{\arccos x}$.

18.98. $I=\ln|\arcsin x|$.

18.99. $I=\dfrac{(x^2-1)\operatorname{arctg} x+x}{4(1+x^2)}$.

18.100. $-1<x<1$; $I=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

18.101. $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $I = \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{2})\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$.

18.102. $I = \ln \sqrt[8]{\dfrac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \left(\frac{1}{2} + \dfrac{1}{x^2-1}\right)$.

18.103. $I = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln|1+x^2|$.

18.104. $I = x - \ln(1+e^x) - 2e^{\frac{1}{2}x} \operatorname{arctg} e^{-\frac{1}{2}x} - (\operatorname{arctg} \frac{1}{2}x)^2$.

18.105. $-1 \leqslant x < 0$ lub $0 < x \leqslant 1$; $I = -\dfrac{\arcsin x}{x} - \ln \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}$.

18.106. $I = x - e^x \arcsin e^x - \ln(1+\sqrt{1+e^{2x}})$.

18.107. $I = \frac{1}{7}(x^7 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|1+x^2|)$.

18.108. $1 < x < 2$; $I = -\frac{1}{4}(2x+21)\sqrt{-x^2+3x-2} + (x^2+3x-\frac{55}{8})\arccos(2x-3)$.

18.109. $I = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln|x+\sqrt{1+x^2}|$.

18.110. $-1 < x < 1$; $I = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \frac{1}{8}(\arcsin x)^2$.

18.111. $I = \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \operatorname{arctg} x$.

18.112. $-2\sin(1-x)\sqrt{x} + (1+x)\arcsin \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

18.118. $I = \frac{1}{3}e^{3x} + 2\sqrt{e^x}$.

18.119. $I = \ln(e^x + e^{-x}) = \ln(\cosh x)$.

Wskazówka (do zad. 18.119). Całkę przedstawić w postaci $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx$.

18.120. $x \neq 0$; $I = \frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1| - x$.

18.121. $I = \operatorname{arctg} e^x$.

18.122. $I = 2\sqrt{e^x+1} + \ln \dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$.

18.123. $I = 2\ln|e^x+1| - x$.

Wskazówka (do zad. 18.122). Podstawić $\sqrt{e^x+1} = t$.

18.124. $I = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \ln \dfrac{\sqrt{3+2e^x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+2e^x}+\sqrt{3}}$.

18.125. $I = \frac{2}{3}\sqrt{(1+e^x)^3}$.

Wskazówka (do zad. 18.124). Podstawić $3+2e^x = t^2$.

18.126. $I = \dfrac{-1}{e^x-1}$.

18.127. $I = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} + 2x$.

Uwaga (do zad. 18.127). Można również całkę przedstawić w postaci $4\int \cosh^2 x\, dx = 2\sinh x \cosh x + 2x$ (całkując przez części).

18.128. $I=\ln|e^x+5|$.

18.129. $I=\frac{35}{36}\ln|e^{2x}-\frac{4}{9}|-\frac{3}{2}x$.

18.130. $I=\ln|1+e^x|-\dfrac{1}{e^x}-x$.

18.131. $I=\dfrac{-1}{(n-1)(e^x+a)^{n-1}}$.

18.132. $I=\frac{1}{5}\sqrt{5}\arcsin(\sqrt{\frac{5}{3}}\,e^x)$.

18.133. $I=x-\ln|2e^x+1|+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}$.

18.134. $I=-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)$.

18.135. $x>0$, $x\neq 1$; $I=\ln|\ln x|$.

18.136. $I=x\ln|x^2+1|-2x+2\operatorname{arctg}x$.

18.137. $x\neq 0$; $I=x((\ln|x|)^2-2\ln|x|+2)$.

18.138. $I=x\ln|x+\sqrt{x^2+1}|-\sqrt{x^2+1}$.

18.139. $I=\frac{1}{5}(2+5x)(\ln|2+5x|-1)$.

18.140. $I=\operatorname{arctg}(\ln|x|)$.

18.141. $I=-\dfrac{1}{x}(\ln|x|+1)$.

18.142. $I=\frac{1}{9}(4+3x)^3\ln|x|-\frac{64}{9}\ln|x|-16x-6x^2-x^3$.

18.143. $I=\frac{1}{4}x^4\ln|x^2+3|-\frac{1}{4}(\frac{1}{2}x^4-3x^2+9\ln|x^2+3|)$.

18.144. $I=\dfrac{a^x}{\ln a}\left(x-\dfrac{1}{\ln a}\right)$.

DO ROZDZIAŁU XIX

19.5. $I=[\frac{1}{2}\ln|x^2-4|]_3^5=\frac{1}{2}\ln\frac{21}{5}$.

19.6. $I=\left[\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\right]_0^a=\dfrac{\pi}{4a}$.

19.7. $I=\left[-\dfrac{1}{x+1}\right]_{-3}^{-2}=\frac{1}{2}$.

19.8. $I=[\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{5}{2}x]_{-2/5}^{2/5}=\frac{1}{20}\pi$.

19.9. $I=\frac{3}{8}\left[\ln\dfrac{1-2x}{3+2x}\right]_{-1}^{0}=\frac{3}{8}\ln\frac{1}{9}$.

19.10. $I=[\arcsin\frac{1}{2}(x-1)]_1^2=\frac{1}{6}\pi$.

19.11. $I=[-\frac{1}{2}\sqrt{3+4x-4x^2}+\arcsin\frac{1}{2}(1-2x)]_{\frac{1}{2}}^{1}=1-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{6}\pi$.

19.12. $I=[\frac{1}{5}\sqrt{5}\arcsin\frac{1}{3}x\sqrt{5}]_{-\sqrt{3}/\sqrt{5}}^{\sqrt{3}/\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{5}(\arcsin 1-\arcsin(-1))=\frac{1}{5}\sqrt{5}\pi$.

19.13. $I=[\frac{1}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}}]_1^2=\frac{1}{2}(15^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{2}{3}})$.

19.14. $I=\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^6\frac{2x\,dx}{4+(x^2)^2}=\frac{1}{2}[\ln|x^2+\sqrt{4+x^4}|]_0^6=\frac{1}{2}\ln(18+5\sqrt{13})$.

19.15. $I=[(\sqrt{x^2+4a^2})^3]_0^a=(5\sqrt{5}-8)a^3$.

19.16. $I=[\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|]_3^4=\frac{3}{2}\sqrt{7}-\sqrt{2}+\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{7}}$.

19.17. $I=\left[\ln\dfrac{x}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}\right]_1^{10}=\ln 5\,\dfrac{3+2\sqrt{3}}{6+\sqrt{111}}.$

19.18. $I=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin(x/a)\right]_0^a=\frac{1}{4}\pi a^2.$

19.19. $I=\left[\frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{12}\pi-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\ln 2.$

19.20. $I=\left[e^x-\ln(1+e^x)\right]_0^2=e^2-1+\ln\dfrac{2}{1+e^2}.$

19.21. $I=\left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^1=\dfrac{-2}{e}+1.$

19.22. $I=\left[x^2\cdot\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_1^2=2e^4-\frac{1}{2}e.$

19.23. $I=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2+x+\frac{1}{2})\right]_{-2}^{-1}=\frac{1}{4}e^2(5e^2-1).$

19.24. $I=\left[\frac{1}{8}e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{1}{8}(3e^{\pi}-1).$

19.25. $I=\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=1.$

19.26. $I=\left[\ln\left|\dfrac{2+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{2-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\ln 3.$

19.27. $I=\left[\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}=\frac{4}{3}.$

19.28. $I=\left[\dfrac{\cos x}{3(2+\sin x)}+\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

19.29. $I=\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}=$

$$=1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}}.$$

19.30. $I=\left[\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\sin x\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{1}{5}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{10}\right].$

19.31. $I=\left[\cos x+\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}=-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{3}.$

19.32. $I=\left[(x+1)\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{1}{2}\pi.$

19.33. $I=\left[\dfrac{2}{\cos x}\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}=2(\sqrt{2}-1).$

19.34. $I=\left[2\sqrt{1+\sin x}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=2(\sqrt{2}-1).$

19.35. $I=\left[x\operatorname{tg}x+\ln\cos x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}=\frac{1}{4}\pi+\ln\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

19.36. Przyjmujemy $a>0$. Obliczone pole wynosi $\frac{1}{3}a^3$ i stanowi $\frac{1}{3}$ wymienionego prostokąta. Warto zaznaczyć, że wynik ten znany już był Archimedesowi – na innej oczywiście drodze.

19.37. $\frac{1}{3}$.

19.38. $\frac{8}{3}$.

19.39. $P=2\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=8.$

19.40. $P=\left[\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}x^4\right]_0^1=\frac{5}{6}.$

19.41. $P=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{5}{12}.$

19.42. $P=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+10x\right]_{-2}^{5}=114\frac{1}{3}.$

19.43. $\frac{64}{3}$.

19.44. $0{,}950$.

19.45. $\frac{32}{3}$.

19.46. $P=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^3+\left[\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{6}x^3\right]_3^6=\frac{27}{2}$.

19.47. $\frac{9}{2}$.

19.48. $\dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

19.49. $\frac{15}{2}-8\ln 2$.

19.50. $6(3\pi+8)$.

19.51. $\frac{1}{16}$.

19.52. $P=-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}(x+\frac{1}{2})\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{-1}$.

19.53. $P=3\left[x\sin\frac{1}{3}x+3\cos\frac{1}{3}x\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}=\frac{3}{2}(\sqrt{3}-\frac{1}{2})\pi+\frac{9}{2}(1-\sqrt{3})$.

DO ROZDZIAŁU XX

20.7. $P=\frac{1}{2}a^2\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}=\frac{1}{4}\pi a^2$; okrąg o średnicy a i środku $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

20.8. Gdy θ przebiega przedział $\frac{1}{2}\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ lub przedział $\frac{3}{2}\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, to otrzymujemy ujemne wartości promienia wodzącego r. Jeżeli $r_0>0$, to przez punkt $(\theta_0, -r_0)$ rozumiemy punkt $(\theta_0+\pi, r_0)$; przy tej umowie dane równanie wyznacza *rozetę czworolistną* (naszkicować tę krzywą), $P=\frac{1}{2}\pi a^2$.

20.9. *Rozeta dwunastolistna* (zobacz rozwiązanie poprzedniego zadania), $P=\frac{1}{2}\pi a^2$.

20.10. Naszkicować krzywą i wykazać, że krzywa jest symetryczna względem osi biegunowej:

$$P'=\tfrac{1}{2}a^2\left[\tfrac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}=\tfrac{3}{4}\pi a^2,\qquad \text{skąd}\qquad P=2P'=\tfrac{3}{2}\pi a^2.$$

20.11. Naszkicować krzywą, $P=\frac{1}{2}a^2\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^3a^2$.

20.12. $P=a^2\pi$.

20.13. $P=\dfrac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$.

20.14. $P=3\pi a^2$.

20.15. $P=\frac{72}{5}\sqrt{3}$.

20.16. $$P=9a^2\int\limits_{t_0}^{+\infty}\frac{(2t^3-1)t^2dt}{(1+t^3)^3}-9a^2\int\limits_0^{t_0}\frac{(1-2t^3)t^2dt}{(1+t^3)^3},\qquad \text{gdzie}\qquad t_0=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Całkę można napisać w postaci

$$P=9a^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{(2t^3-1)t^2dt}{(1+t^3)^2}=3a^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{(2u-1)\,du}{(1+u)^3}=3a^2\lim_{v\to\infty}\left[-\frac{2}{(1+u)}+\frac{3}{2}\,\frac{1}{(1+u)^2}\right]_0^v=\frac{3}{2}a^2.$$

Naszkicować krzywą biorąc najpierw przedział $0<t<t_0$, a potem przedział $t_0<t<+\infty$.

20.17. $P=a^2(\frac{1}{4}\pi+1-\sqrt{3})$.

20.18. $P=\frac{4}{5}\sqrt{3}$.

20.19. $P=\frac{8}{15}$.

20.20. $P=3(4\pi^3+3\pi)$.

20.21. $P=24\pi$. **20.22.** $P=\frac{3}{8}\pi\,\frac{c^4}{ab}$.

20.27. $L=\frac{2}{27}\left[\sqrt{(1+9x)^3}\right]_0^{8/9}=\frac{52}{27}$. **20.28.** $L=\frac{2}{3}\left[(1+x)^{3/2}\right]_0^3=\frac{14}{3}$.

20.29. $L=\frac{4}{3}\left[(1+\frac{1}{2}x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **20.30.** $L=\frac{2}{9}\left[(1+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{14}{9}$.

20.31. $L=\frac{8}{3}\left[(1+\frac{1}{4}x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{12}=\frac{56}{3}$.

20.32. $L=\frac{16}{81}\left[(1+\frac{27}{8}x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{16}{81}(\frac{31}{8}\sqrt{31}-1)$.

20.33. $L=\frac{16}{27}\left[(1+\frac{9}{8}x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{16}{27}(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1)$.

20.34. $L=\left[\sqrt{x^2+x}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|\right]_1^9=3\sqrt{10}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\dfrac{9{,}5+3\sqrt{10}}{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}$.

20.35. $L=\left[\arcsin(x-1)\right]_0^1=\frac{1}{2}\pi$. **20.36.** $L=\frac{1}{2}\left[\arcsin(2x-1)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\pi$.

20.37. Przyjmujemy y za zmienną niezależną i mamy

$$L=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{4+y^2}\,dy=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}).$$

20.38. $L=\left[\sqrt{3x+x^2}+\frac{3}{2}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right|\right]_0^1=2+\frac{3}{2}\ln 3$.

20.39. $L=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{14}{3}$. **20.40.** $L=\left[\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{1}{2}\ln 3$.

20.41. $L=\left[\ln\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}=\ln(\sqrt{2}+1)$. **20.42.** $L=a\left[\sinh(x/a)\right]_{-a}^{a}=a(e-e^{-1})$.

20.43. $$L=\left[\sqrt{x^2+1}-\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

20.44. $$L=\left[\ln\frac{1+x}{1-x}-x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\ln 3-\frac{1}{2}.$$

20.45. $L=\left[\ln(e^x-e^{-x})\right]_{\frac{1}{2}}^1=\ln(e^{\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}})$. **20.46.** $L=\left[\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^1=\pi$.

20.47. $L=a\left[2+\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})\right]$. **20.48.** $L=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

20.49. $L=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\left|\sqrt{1+e^2}-1\right|-1-\ln\left|\sqrt{2}-1\right|$.

20.50. $L=4a\left[\sin\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi}=4a$.

20.51. $L=\frac{1}{2}\theta\left[\theta\sqrt{\theta^2+1}+\ln\left|\theta+\sqrt{0^2+1}\right|\right]_0^1=\frac{1}{2}a(\sqrt{2}+\ln\left|1+\sqrt{2}\right|)$.

20.52. $$L=a\left[-\frac{\theta^2+1}{0}+\ln\left|\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right|\right]_{3/4}^{4/3}=a(\tfrac{5}{12}+\ln\tfrac{3}{2}).$$

20.53. $L=\left[2a\theta\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}=2\pi a$.

20.54. $L=p\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$. **20.55.** $L=\left[t+\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

20.56. $L=r\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\pi^2 r$.

20.57. $L=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi}=\frac{1}{3}\pi^3$.

20.58. $L=-\frac{5}{16}a\left[\cos t\sqrt{1+\cos^2 t}+\frac{1}{3}\sqrt{3}=\ln\left|\sqrt{3}\cos t+\sqrt{1+3\cos^2 t}\right|\right]_0^{\pi}=$

$=\frac{5}{8}a\left(2+\frac{1}{3}\sqrt{3}\ln\left|2+\sqrt{3}\right|\right)$.

20.59. $L=2a\left(\dfrac{1+3\cos^2 t_1}{\cos t_1}\sqrt{3}\ln\left|\sqrt{3}\cos t_1+\sqrt{1+3\cos^2 t_1}\right|\right)$.

20.60. $L=40$.

20.61. $L=\dfrac{a}{2}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.

20.62. $L=\dfrac{5a}{8\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})\right)$.

20.66. $V=\pi\ln\dfrac{b}{a}$.

20.67. $V=\lim\limits_{a\to+\infty}\pi\left(1-\dfrac{1}{a}\right)=\pi$.

20.68. $V=\frac{1}{2}\pi^2$, $S=2\pi\left(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right)$.

20.69. $V=\frac{15}{2}-8\ln 2$.

20.70. $V=\dfrac{\pi}{3}a^3(2-\sqrt{2})$, $S=\pi a^2\left(\sqrt{6}+1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+2}\right)$.

20.71. $V=\frac{1}{63}\pi$, $S=\frac{2}{9}\pi\sqrt{2}$.

20.72. $V=\frac{1}{4}\pi a^3(e^2+4-e^{-2})$, $S=\frac{1}{2}\pi a^2(e^2+4-e^{-2})$.

20.73. $4\pi r$.

20.74. $V=\pi\left[\frac{1}{3}x^3+rx^2+4r^2x+8r^3\ln\left|\dfrac{2r-x}{2r}\right|\right]_1^2=\frac{7}{3}+3r+4r^2+8r^3\ln\left|\dfrac{2r-2}{2r-1}\right|$,

$S=2\pi r\left[\dfrac{x-4r}{x-2r}\sqrt{8rx-3x^2}+\dfrac{8r}{3}\arccos\dfrac{3x-4r}{4r}\right]_1^2$.

20.75. $V=\pi\left[-\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x\right]_0^{\pi/2}=\frac{16}{35}\pi$.

20 76. $V=\pi\left[\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x\right]_0^{\pi/2}=\frac{16}{35}\pi$.

20.77. $S=2\pi\displaystyle\int_0^{b/4} a\cos\frac{2\pi}{b}x\cdot\sqrt{1+\frac{4\pi^2a^2}{b^2}\sin^2\frac{2\pi}{b}x}\,dx=$

$$=\frac{b^2}{8\pi^2 a}\cdot\left[\frac{2\pi a}{b}\sin\frac{2\pi}{b}x\sqrt{\frac{4\pi^2a^2}{b^2}\sin^2\frac{2\pi}{b}x+1}+\right.$$

$$\left.+\ln\left|\frac{2\pi a}{b}\sin\frac{2\pi}{b}x+\sqrt{\frac{4\pi^2a^2}{b^2}\sin^2\frac{2\pi}{b}x+1}\right|\right]_0^{b/4}=$$

$$=\frac{1}{2}a\sqrt{b^2+(2\pi a)^2}+\frac{b^2}{4\pi}\ln\left|\frac{2\pi a}{b}+\sqrt{\frac{4\pi^2a^2}{b^2}+1}\right|.$$

20.78. $V = \pi[3\sqrt{x^2-6x+15} + 10\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+15}|]_0^1 =$
$= \pi[3\sqrt{10} + 10\ln|-2+\sqrt{10}| - 3\sqrt{15} - 10\ln|-3+\sqrt{15}|]$.

20.79. $V = 8\pi\left[x - \frac{1}{27}x^3\right]_0^3 = 16\pi$. **20.80.** $V = 32\pi\left[x - \frac{1}{27}x^3\right]_0^3 = 64\pi$.

20.81. $V = \frac{25}{2}\pi\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 \pi$.

20.82. $S = 200\pi\left[\arcsin\frac{1}{5}x\right]_{-5}^{+5} = 200\pi^2$, $V = 500\pi\left[\frac{1}{25}\pi\sqrt{25-x^2} + \arcsin\frac{4}{5}x\right]_{-5}^{+5} = 5$.

20.83. $S = \frac{8}{27}\pi\left[(1+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{55}{27}\pi$. **20.84.** $S = \frac{1}{54}\pi\left[(1+36x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{37}{54}\sqrt{37}$.

20.85. $V = \pi\left[-\dfrac{1}{x-1}\right]_2^4 = \frac{2}{3}\pi$.

20.86. $V = \frac{1}{2}\pi\left[\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^4 = \frac{1}{2}\pi\ln\frac{9}{5}$.

20.87. $V = \dfrac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$. **20.88.** $V = \frac{32}{105}\pi a^3$, $S = \frac{12}{5}\pi a^2$.

20.89. $V = 2\pi\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{72}t^8\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{4}\pi$, $S = 2\pi\left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5\right]_0^{\sqrt{3}} = 3\pi$.

20.102. $I_\pi = \frac{1}{3}\rho ab^3$. **20.103.** $I_\pi = \frac{1}{2}\pi\delta r^4/l$.

20.104. $I_\pi = \frac{1}{12}\rho ah^3$. **20.105.** $I_\pi = \frac{1}{10}\pi\delta rh^2$.

20.106. $I_x = \pi\lambda r^3$.

20.107. $I_x = \frac{2}{3}\rho\left[\frac{1}{8}x(5r^2-2x^2)\sqrt{r^2-x^2} + \frac{3}{8}r^4\arcsin(x/r)\right]_{-r}^{r} = \frac{1}{4}\pi\rho r^4$.

20.108. $I_x = \frac{8}{15}\pi\delta r^3$. **20.109.** $I_x = \frac{8}{15}\pi\delta ab^4$.

20.110. $I_x = \frac{1}{12}\delta a^3(e+e^{-1})(e^2+10+e^{-2})$. **20.111.** $M_x = \frac{1}{2}\rho ah^2$.

20.112. $M_a = \frac{1}{6}\rho a^2 b$, $M_b = \frac{1}{6}\rho a^2 b$, $M_c = \frac{1}{6}\cdot\dfrac{\rho a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

20.113. $M_x = \frac{8}{15}\rho ah^2$.

20.114. $M_x = \frac{1}{2}p\left[x^2\right]_0^{x_0} = \frac{1}{4}x_0 y_0^2$, $M_y = \sqrt{2p}\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^{x_0} = \frac{2}{5}x_0^2 y_0$.

20.115. $M_x = \dfrac{ba^2}{8\pi}\left[\dfrac{2\pi}{b}x + \sin\dfrac{2\pi}{b}x\cos\dfrac{2\pi}{b}x\right]_0^{b/4} = \dfrac{a^2 b}{16}$,

$$M_y = \frac{ab^2}{4\pi^2}\left[\frac{2\pi}{b}x\sin\frac{2\pi}{b}x + \cos\frac{2\pi}{b}x\right]_0^{b/4} = \frac{ab^2}{4\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

20.116. $M_x=\frac{1}{3}\sqrt{p}\,[\sqrt{2x-p^3}]_0^2=\frac{1}{3}\sqrt{p}\,(\sqrt{4+p^3}-p\sqrt{p})$.

20.117. $M_x=\frac{1}{2}[\frac{1}{4}t^8+\frac{3}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5]_{-1}^0=\frac{3}{280}$, $M_y=[\frac{2}{7}t^7-\frac{1}{6}t^6-\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4]_{-1}^0=\frac{83}{420}$.

20.118. $M_x=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1+\cos^4 x}}{\cos^2 x}-\operatorname{arsinh}\cos^2 x\right]^{\pi/4}=0{,}6110$.

20.119. $\eta=\dfrac{2r}{\pi}$. **20.120.** $\eta=\dfrac{4r}{3\pi}$. **20.121.** $\xi=\dfrac{3r}{8}$.

20.122. Na osi stożka w odległości $\frac{1}{4}h$ od podstawy.

20.123. $\xi=\frac{1}{3}h$. **20.124.** $0=\dfrac{a(e^2+4-e^{-2})}{2(e-e^{-1})}$. **20.125.** $\eta=\frac{5}{6}a$.

20.126. $\xi=\dfrac{L}{M}a$, gdzie

$$L=[-\tfrac{1}{2}\cos^2\theta-\tfrac{5}{3}\cos^3\theta-2\cos^4\theta-\tfrac{2}{5}\cos^5\theta+\tfrac{7}{6}\cos^6\theta+\cos^7\theta+\tfrac{1}{4}\cos^8\theta]_0^\pi,$$

$$M=[-\cos\theta-2\cos^2\theta-\tfrac{4}{3}\cos^3\theta+\tfrac{1}{2}\cos^4\theta+\cos^5\theta+\tfrac{1}{3}\cos^6\theta]_0^\pi,$$

i ostatecznie $\xi=\frac{4}{5}a$.

20.127. $$\xi=\frac{16r^3}{P}\int\limits_{\pi/12}^{\pi/6}\sin^6 t\,dt=\frac{16r^3}{P}[-\tfrac{1}{192}\sin 6t+\tfrac{3}{64}\sin 4t-\tfrac{15}{64}\sin 2t+\tfrac{5}{16}t]_{\pi/12}^{\pi/6},$$

$$\eta=\frac{8r^3}{P}\int\limits_{\pi/12}^{\pi/6}\frac{\sin^7 t}{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=-\frac{8r^3}{P}[\tfrac{1}{6}\sin^6 t+\tfrac{1}{4}\sin^4 t+\tfrac{1}{2}\sin^2 t+\ln|\cos t|]_{\pi/12}^{\pi/6}.$$

20.128. $\xi=\dfrac{2}{P}[\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{21}t^7]_0^{\sqrt{3}}=\frac{9}{7}$, $\eta=\dfrac{1}{P}[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{9}t^6+\frac{1}{72}t^8]_0^{\sqrt{3}}=\frac{5}{32}\sqrt{3}$.

20.129. $\xi=\dfrac{1}{L}[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5]_0^{\sqrt{3}}=\frac{7}{5}$, $\eta=\dfrac{1}{L}[\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^4-\frac{1}{18}t^6]_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{4}\sqrt{3}$.

20.130. $$\xi=\frac{a^4\pi}{V}[\tfrac{5}{4}t^2+t\sin t(-\tfrac{11}{3}+\tfrac{3}{2}\cos t-\tfrac{1}{3}\cos^2 t)-$$

$$-\tfrac{8}{3}\cos t-\tfrac{3}{4}\cos^2 t+\tfrac{8}{9}\cos^3 t-\tfrac{1}{4}\cos^4 t+\tfrac{25}{9}]_0^\pi=a(\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{64}{45}\pi^{-1}).$$

20.131. $$\xi=\frac{3a^3}{P}[\tfrac{1}{5}\sin t-\tfrac{2}{7}\sin^7 t-\tfrac{1}{9}\sin^9 t]_0^{\pi/2}=\tfrac{256}{315}\cdot(a/\pi),$$

$$\eta=-\frac{3a^3}{2P}[\tfrac{1}{3}\cos^3 t-\tfrac{3}{5}\cos^5 t+\tfrac{3}{7}\cos^7 t-\tfrac{1}{9}\cos^9 t]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\tfrac{256}{315}\cdot(a/\pi).$$

20.132. $\xi=\frac{1}{4}b\pi^{-1}(\pi-2),\ \eta=\frac{1}{8}a\pi.$ **20.133.** $\xi=\frac{83}{77},\ \eta=\frac{9}{154}.$

20.134. $\xi=\frac{9}{20}a,\ \eta=\frac{9}{20}a.$ **20.135.** $\varphi_0=0,\ r_0=\frac{5}{6}a.$ **20.136.** $\xi=\frac{3}{5}x_0,\ \eta=\frac{3}{8}y_0.$

20.160. $t=\dfrac{1}{\mu r^2\sqrt{2g}}\displaystyle\int_0^h \frac{\left(r+x\frac{R-r}{h}\right)^2}{\sqrt{x}}\,dx=\frac{\sqrt{2gh}}{15\mu g}\left[(8+4)\frac{R}{r}+3\left(\frac{R}{r}\right)^2\right].$

20.161. 144 kG, 108 kG. **20.162.** 240000 kG. **20.163.** $\frac{2}{3}R^3.$

20.164. $250\,\pi R^4$ kGm. **20.165.** $\frac{1}{3}ah^2.$ **20.166.** $17\frac{1}{15}t.$

20.167. $x=\dfrac{h}{\sqrt{2}}.$ **20.168.** $2\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{4x-x^2}\,dx=7{,}2\pi t.$

20.169. $\dfrac{\pi R^2\cdot 1000}{H^2}\displaystyle\int_0^4 (H-x)^2\,x\,dx=30\pi$ kGm. **20.170.** $\dfrac{p_0v_0}{k-1}\left[\left(\dfrac{V_0}{V_1}\right)^{k-1}-1\right]=1598$ kGm.

20.171. $t=\dfrac{\pi}{\mu s\sqrt{2g}}\displaystyle\int_0^R (R+x)\sqrt{R-x}\,dx=\frac{14\pi R^2}{15\mu s}\sqrt{\frac{R}{2g}}.$

20.172. $L=mgR\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi+\mu\sin\varphi)\,d\varphi=mgR\,(1+\mu).$

DO ROZDZIAŁU XXI

21.4. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[-x-\ln(1-x)\right]_0^{1-\varepsilon}=+\infty.$

21.5. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_\varepsilon^1=\frac{3}{2}.$ **21.6.** $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(-\dfrac{3}{3\sqrt{x}}\right)_\varepsilon^2=+\infty.$

21.7. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[4x^{\frac{1}{4}}\right]_\varepsilon^{16}=8.$ **21.8.** $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{2}\sqrt[4]{x}\right]_\varepsilon^{16}=4\sqrt{2}.$

21.9. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}\right]_\varepsilon^1=\frac{5}{2}.$ **21.10.** $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)_0^{a-\varepsilon}=\dfrac{\pi}{2}.$

21.11. $I=\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left(\arcsin\dfrac{2x-(a+b)}{b-a}\right)_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2}=\pi$

21.12. $I=\frac{1}{6}\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\frac{6x\,dx}{\sqrt{2^2-(3x^2)^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{6}\left[\arcsin\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}-\varepsilon}=\frac{1}{12}\pi.$

21.13. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1-\varepsilon}=1$.

21.14. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}}\right]_{-2+\varepsilon}^{0}=\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}$.

21.15. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]_{1+\varepsilon}^{2}=\ln(2+\sqrt{3})$.

21.16. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\sqrt{x^2-4}\right]_{2+\varepsilon}^{3}=\sqrt{5}$.

21.17. $I=\lim\limits_{\varepsilon_1\to+0}\left[3(x^2-4)^{\frac{1}{3}}\right]_0^{2-\varepsilon_1}+\lim\limits_{\varepsilon_2\to+0}\left[3(x^2-4)^{\frac{1}{3}}\right]_{2+\varepsilon_2}^{6}=9\sqrt[3]{4}$.

21.18. $I=\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{x-x^2}-\frac{3}{8}\arcsin(1-2x)\right]_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2}=\frac{3}{8}\pi$.

21.19. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[-\arcsin\frac{1}{x}\right]_{1+\varepsilon}^{2}=\frac{1}{3}\pi$.

21.20. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{1}{x}\right]_{-2}^{-1-\varepsilon}=-\frac{1}{3}\pi$.

21.21. $I=\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\frac{1}{2}\left[\arcsin(2x-1)\right]_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2}=\frac{1}{2}\pi$.

21.22. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)-\sqrt{x-x^2}\right]_0^{1-\varepsilon}=\frac{1}{2}\pi$.

21.23. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{(4-x)(x-2)}+\frac{7}{2}\arcsin(x-3)\right]_2^{4-\varepsilon}=\frac{7}{2}\pi$.

21.24. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\ln(\arcsin x)\right]_{\frac{1}{2}}^{3-\varepsilon}=\ln 3$.

21.25. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x\right]_0^{\pi/4-\varepsilon}=+\infty$.

21.26. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/2-\varepsilon}=+\infty$

21.35. $I=\lim\limits_{u\to-\infty}\int\limits_u^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim\limits_{v\to+\infty}\int\limits_0^v\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{u\to-\infty}\left[\operatorname{arctg}x\right]_u^0+\lim\limits_{v\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}x\right]_0^v=\pi$

21.36. $I=\lim\limits_{u\to-\infty}\int\limits_u^0\frac{(\operatorname{arctg}x)^2dx}{1+x^2}+\lim\limits_{v\to+\infty}\int\limits_0^v\frac{(\operatorname{arctg}x)^2dx}{1+x^2}=\lim\limits_{u\to-\infty}\left[\frac{(\operatorname{arctg}x)^3}{3}\right]_u^0+$

$+\lim\limits_{u\to+\infty}\left[\frac{(\operatorname{arctg}x)^3}{3}\right]_0^v=\frac{1}{12}\pi^3$.

21.37. $I=\lim\limits_{v\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}x\right]_{\sqrt{3}}^{v}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{9}\pi$.

21.38. $I=\lim\limits_{u\to+\infty}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{u}\right]=\frac{1}{3}$.

21.39. $I=\lim\limits_{u\to+\infty}\left[-\frac{1}{x-3}\right]_4^u=1$.

21.40. $I=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{4}\sqrt{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x\sqrt{2}\right]_1^u=\frac{1}{8}\pi\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

21.41. $I=\lim\limits_{u\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}\right)\right]_1^u=\frac{3}{8}\pi$.

21.42. $I=\lim\limits_{u\to-\infty}\left[\frac{2}{3}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_u^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\pi\sqrt{3}.$

21.43. $I=\lim\limits_{u\to-\infty}\left[\operatorname{arctg}(x+1)\right]_u^0+\lim\limits_{v\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}(x-1)\right]_0^v=\pi.$

21.44. $I=\lim\limits_{v\to+\infty}\left[\frac{1}{x+1}+\ln\frac{x}{x+1}\right]_1^v=-\frac{1}{2}+\ln 2.$

21.45. $I=\lim\limits_{v\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^v=\frac{2}{9}\pi\sqrt{3}.$

21.46. $I=\lim\limits_{v\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(x-5)^2}{x^2+12}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}}\right]_0^v=\frac{1}{6}\pi\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{12}.$

21.47. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left[-\arcsin\frac{1}{x}\right]_{1+\varepsilon}^a+\lim\limits_{u\to+\infty}\left[-\arcsin\frac{1}{x}\right]_a^u=\frac{1}{2}\pi.$

21.48. $I=\lim\limits_{v\to+\infty}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^v=\frac{1}{a}.$ **21.49.** $I=\lim\limits_{u\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^u=\frac{1}{2}.$

21.50. $I=\lim\limits_{v\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)\right]_0^v=\frac{1}{2}.$ **21.51.** $I=\lim\limits_{u\to+\infty}\left[-e^{1/x}\right]_1^u=e-1.$

21.52. $I=\left[\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)\right]_0^\pi=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$

21.53. $I=\left[\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}x\right)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{\pi}{2ab}.$

SKOROWIDZ

SPIS RZECZY

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie dwudzieste piąte
Arkuszy drukarskich 32
Druk ukończono w lutym 1999 r.
Druk i oprawa: OZGraf – Olsztyńskie Zakłady Graficzne S.A.