Zad.1 X ma rozkład jednostajny $U(a,b)$, gdzie $a<b$ są nieznanymi parametrami

Momenty zmiennej losowej X:

$$E(X)=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Momenty z próby: $A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$, itd.

Uwaga. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i=\bar{X}$.

$$\begin{cases}\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i\\ \dfrac{b^2+ab+a^2}{3}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+b=\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i\\ (a+b)^2-ab=\dfrac{3}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=2\bar{X}-b\\ (2\bar{X})^2-ab=\dfrac{3}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=2\bar{X}-b\\ (2\bar{X})^2-(2\bar{X}-b)b=\dfrac{3}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2\end{cases}$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe

$$(2\bar{X})^2-(2\bar{X}-b)b-\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2=0$$

$$b^2-2\bar{X}b+4\bar{X}^2-\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2=0$$

$$\Delta=4\bar{X}^2-4\left(4\bar{X}^2-\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)=\frac{12}{n}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2-n\bar{X}^2\right)=12\tilde{S}^2$$

$$\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}\cdot\tilde{S}$$

$$\begin{cases}b_1=\bar{X}-\sqrt{3}\cdot\tilde{S}\\ a_1=\bar{X}+\sqrt{3}\cdot\tilde{S}\end{cases}\text{ lub }\begin{cases}b_2=\bar{X}+\sqrt{3}\cdot\tilde{S}\\ a_2=\bar{X}-\sqrt{3}\cdot\tilde{S}\end{cases}$$

Tutaj $a_1>b_1$, a tu $a_2<b_2$.

Uwaga. $EMM(a) = \bar{X} - \sqrt{3} \cdot \tilde{S}$, $EMM(b) = \bar{X} + \sqrt{3} \cdot \tilde{S}$, ale $ENW(a) = min\{X_1, \dots, X_n\}$, $ENW(b) = max\{X_1, \dots, X_n\}$.

Zad.2 X ma rozkład Poissona $\pi(\lambda)$, $\lambda > 0$. Metoda momentów:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) e^{-\lambda} = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} = \lambda$$

$$A_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\lambda = \bar{X}$$

Stąd $EMM(\lambda) = \bar{X}$.

Metoda największej wiarogodności:

$$L(\lambda, \boldsymbol{x}) = \frac{\lambda^{x_1 + \cdots + x_n}}{x_1! \dots x_n!} e^{-n\lambda}$$

$$ln\, L(\lambda, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, ln(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} x_i\,! - n\lambda$$

$$\frac{\partial ln\, L(\lambda, \boldsymbol{x})}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0$$

Stąd $ENW(\lambda) = \bar{X}$. Ponadto $ENMW(\lambda) = \bar{X}$ jako nieobciążony estymator średniej w populacji.

Zad.4 X ma rozkład Rayleigha $R(\lambda)$, $\lambda > 0$. Na podstawie zadania 3 wiemy, że $ENW(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

Ponieważ wartość oczekiwana dla rozkładu Rayleigha wynosi

$$E(X) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\lambda} x^2 e^{-\frac{x^2}{\lambda}} dx = \frac{\sqrt{\pi\lambda}}{2},$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\lambda} x^3 e^{-\frac{x^2}{\lambda}} dx = \lambda,$$

stąd wariancja dla rozkładu Rayleigha wynosi $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \lambda\left(\frac{4-\pi}{4}\right)$. Estymatory największej wiarogodności dla funkcji parametru otrzymujemy podstawiając do wzoru funkcji estymator parametru

$$ENW\left(\frac{\sqrt{\pi\lambda}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{4n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2}\,,$$

$$ENW\left(\lambda\left(\frac{4-\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{4-\pi}{4n}\right) \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$