1 Iloczyn tensorowy macierzy

$$A = [a_{i,j}] \in M_{rxs}(\mathbb{C})$$
$$B = [b_{i,j}] \in M_{txu}(\mathbb{C})$$

iloczynem tensorowym macierzy A i B nazywamy macierz $A \otimes B = M_{rt \times su}(\mathbb{C})$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & a_{13}B & \dots & a_{1s}B \\ a_{21}B & a_{22}B & a_{23}B & \dots & a_{2s}B \\ \vdots & & & & \\ a_{r1}B & a_{r2}B & a_{r3}B & \dots & a_{rs}B \end{bmatrix}$$

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.1 Własności iloczynu tensorowego

Iloczyn tensorowy tworzy półgrupę.

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$

$$(B + C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A$$

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

$$(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

2 Postulaty mechaniki kwantowej

2.1 Postulat 1, postulat układu

Każdemu układowi kwantowemu można przypisać skończenie wymiarową $\mathbb{C}^n$ przestrzeń Hilberta, w której określa się kwantowo-mechaniczną teorię tego układu. Układ ten jest opisywany przez unormowany wektor stanu. (Jeden stan wyrażony jest przez jeden konkretny wektor).

$$|Y\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in \mathbb{C}^2$$

dla $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

2.2 Postulat 2, postulat ewolucji układu

Ewolucja układu kwantowego $|\psi\rangle$ jest opisywana przez przekształcenia unitarne przestrzenii $\mathbb{C}^2$. To znaczy, że wektor $|\psi\rangle$ w czasie t_1 jest związany z wektorem —Y'¿ w czasie t_2 operatorem unitarnym U.

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$

Algorytm kwantowy to sekwencja przekształceń unitarnych.

2.3 Postulat 3, postulat iloczynu tensorowego

Jeżeli $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{C}^m$ są przestrzeniami stanów dwóch niezależnych i nierozróżnialnych układów kwantowych, to przestrzeń stanów obu tych układów branych jako całość jest iloczynem tensorowym tych przestrzeni.

$$|00\rangle = |0\rangle|0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Dla kubitu $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^4$ mamy:

$$|\psi\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle$$

gdzie $\sum_\alpha |\alpha|^2 = 1$

Nie każdy stan można przedstawić jako iloczyn tensorowy np. $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \in \mathbb{C}^4$. (jest to układ nierozkładalny, splątanie kwantowe)

$$(\alpha_1|0\rangle+\beta_1|1\rangle)\otimes(\alpha_2|0\rangle+\beta_2|1\rangle) = (\alpha_1|0\rangle+\beta_1|1\rangle)\otimes\alpha_2|0\rangle+(\alpha_1|0\rangle+\beta_1|1\rangle)\otimes\beta_2|1\rangle = \alpha_1\alpha_2|00\rangle+\beta_1\alpha_2|10\rangle+\alpha_1\beta_2|01\rangle+$$

wynika z tego układ równań (sprzeczny).

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta_1\beta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta_1\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

2.4 Postulat 4, postulat pomiaru

Pomiar kwantowy w bazie obliczeniowej jest opisywany przez zbiór $\{M_m\}$ (macierzy) (hermitowskie operatory projekcji). Operatory te działają w przypisanej przestrzenii stanów mierzonego układu. Indeks m jest wynikiem pomiaru.

Jeśli $|\psi\rangle$ jest mierzonym stanem, to $p(m)$ - prawdopodobieństwo, że wynikiem pomiaru będzie m wynosi $p(m) = \langle\psi M_m|\psi\rangle$, a stan $|\psi\rangle$ po pomiarze znajdzie się w stanie

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}$$

.

Przykład: Dla $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ mamy

$$M_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pomiar to $\{M_0, M_1\}$

$$p(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$p(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$|\psi'\rangle = \frac{M_0|\psi\rangle}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1|0\rangle$$

Dla kubitu:

Pomiar $p(0) = |\alpha|^2$ tworzy $|\psi'\rangle = \frac{\alpha}{|\alpha|}|0\rangle$

Pomiar $p(1) = |\beta|^2$ tworzy $|\psi'\rangle = \frac{\beta}{|\beta|}|1\rangle$

3 Bramki kwantowe

Przekształcenia unitarne z 2.2 to bramki algorytmów kwantowych.

3.1 Bramka Hadamarda

Dla $n \in \mathbb{N}$:

$$H^{\otimes n} = \underbrace{(H \otimes \cdots \otimes H)}_{\text{n razy}} = 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{bin}_n(i)\rangle$$

gdzie $\mathrm{bin}_n(i)$ to n bitowa reprezentacja dwójkowa liczby i